ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

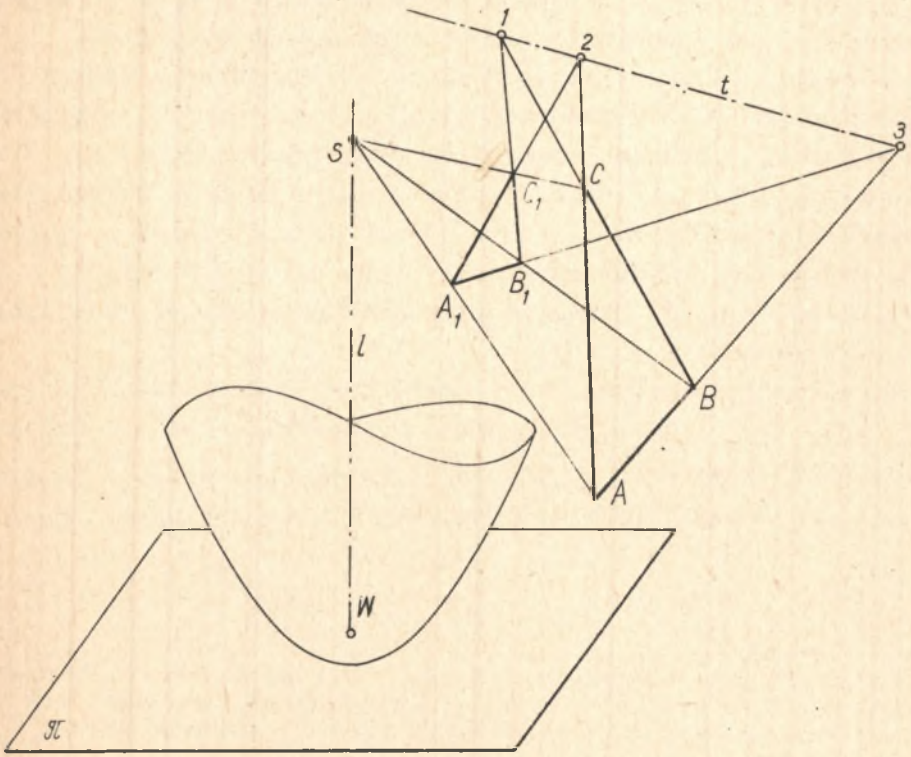
Nr 114 Matematyka - Fizyka z. 5 1964

MARIAN PALEJ

O PEWNYM UOGÓLNIENIU TWIERDZENIA DESARGUESA

Przedmiotem pracy jest rozważenie pewnego uogólnienia następującego, znanego twierdzenia Desarguesa o dwóch trójkątach: jeżeli proste łączące odpowiadające sobie wierzchołki dwóch trójkątów przecinają się w jednym punkcie, to punkty przecięcia się odpowiadających sobie boków tych trójkątów leżą na jednej prostej.

W celu uproszczenia rozważań sięgnijmy do pośrednictwa paraboloidy obrotowej o osi prostopadłej do rzutni π (rys. 1).



Rys. 1

Wiadomo, że każda elipsa leżąca na takiej paraboloidzie jest w rzucie prostokątnym na π okręgiem [1]. Korzystając z tej własności przeprowadźmy następujące rozumowanie.

Niech dany będzie taki przestrzenny układ Desarguesa, którego jeden z wierzchołków jest punktem osi paraboloidy, a żadna z prostych nie leży na rzutni π (rys. 1). Rzućmy z wierzchołka paraboloidy W na jej powierzchnię poszczególne proste układu, czyli rozważmy obrazy tych prostych na powierzchni paraboloidy. Proste przecinające się w punkcie leżącym na osi paraboloidy rzucają się w parabole - pozostałe proste - w elipsy. Obrazy prostych rzućmy z kolei prostopadle na rzutnię π. W wyniku otrzymujemy:

a) trzy proste przecinające się w wierzchołku paraboloidy (rzutnię przyjęto stycznie do paraboloidy w jej wierzchołku),

b) siedem okręgów przechodzących przez tenże wierzchołek - są to rzuty obrazów trzech boków jednego trójkąta, trzech boków drugiego trójkąta oraz prostej, w której przecinają się odpowiadające sobie boki tych trójkątów.

Zauważmy, że w wyniku zachowania się incydencji okręgi, będące rzutami obrazów poszczególnych boków trójkąta, przecinają się z sobą w punktach leżących na tych trzech prostych, które przechodzą przez wierzchołek paraboloidy. Ponadto okręgi przyporządkowane sobie na zasadzie odpowiedniości boków - przecinają się z sobą w punktach leżących na okręgu. Otrzymuje się więc układ (rys. 2) będący odpowiednikiem płaskiej konfiguracji Desarguesa.

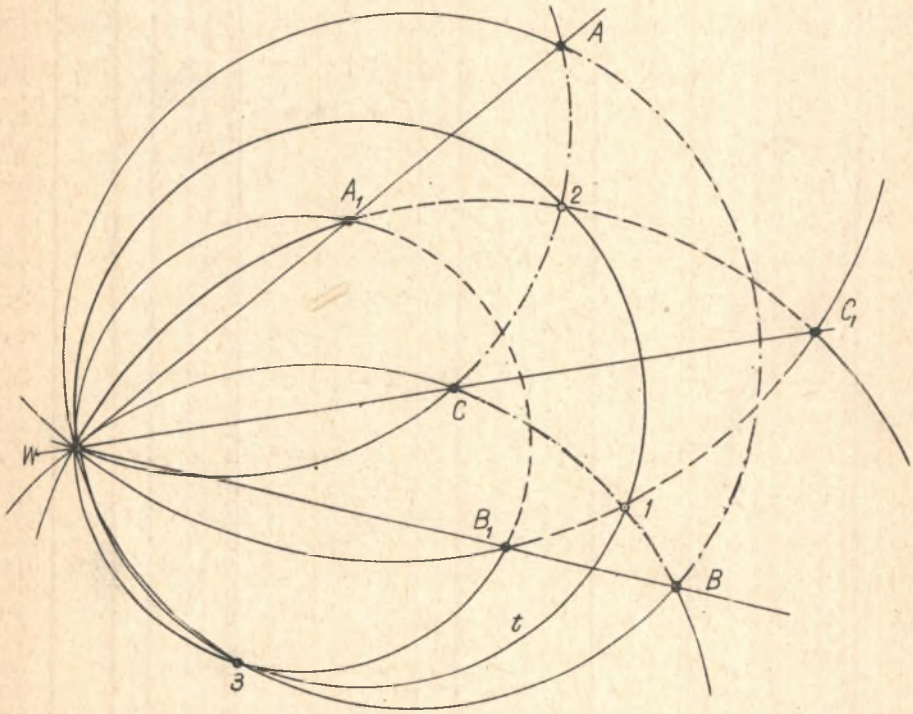
Zauważmy jeszcze, że dla szczególnego położenia trójkątów ABC i $A_1B_1C_1$ (rys. 1) otrzymać można takie dwa trójkąty sferyczne[x)] (rys. 3), w których odpowiadające sobie boki przecinają się w punktach współliniowych z wierzchołkiem parabo-

x) Termin trójkąt sferyczny przyjęto tu w szerokim znaczeniu określając nim nie tylko trójkąt leżący na sferze, czy też na paraboloidzie, ale również trójkąt płaski, którego bokami są łuki okręgów.

loidy. Zachodzi to wówczas, kiedy prosta t (rys. 1) przechodzi przez punkt $S \in l$. Uwzględniając powyższe można sformułować następujące:

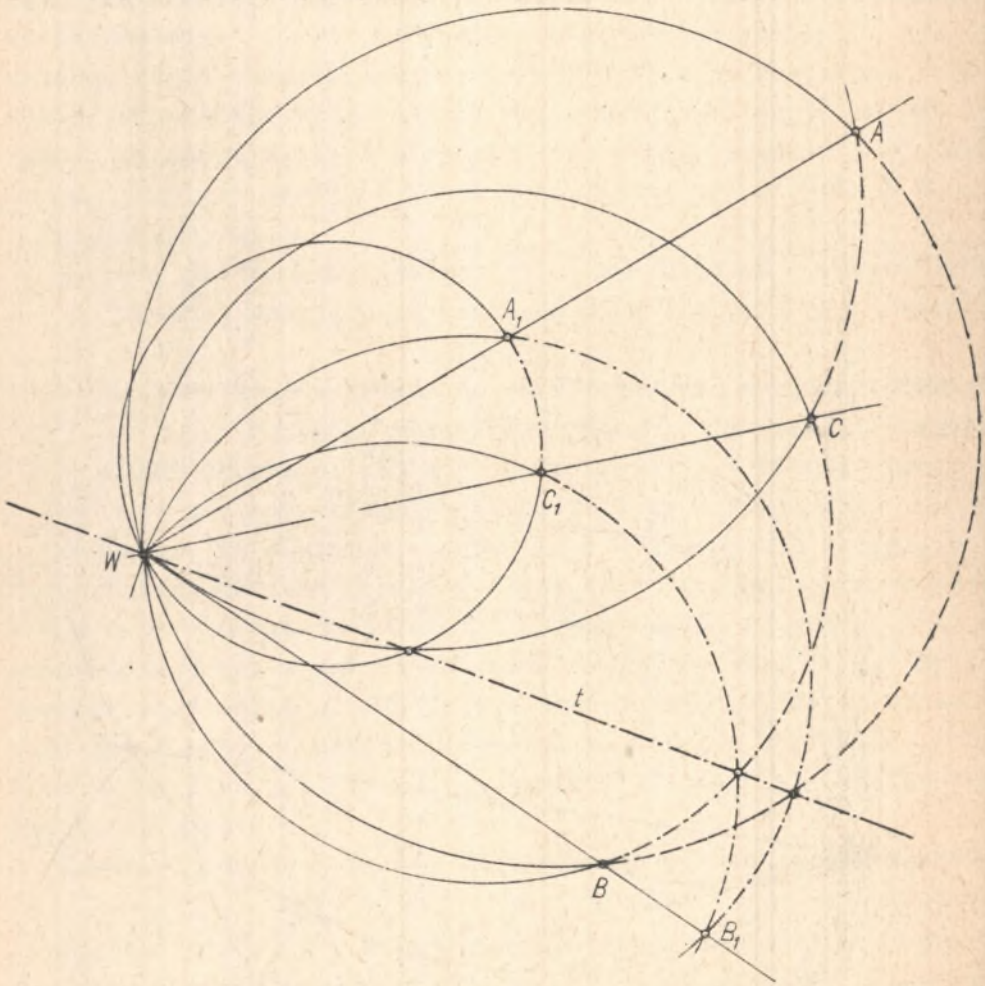
Twierdzenie 1.

Dwa trójkąty sferyczne, których wszystkie boki przechodzą przez jeden punkt W, a odpowiadające sobie wierzchołki leżą



Rys. 2

na prostych przecinających się w punkcie W, mają tę własność, że punkty przecięcia się odpowiednich boków leżą na okręgu incydentnym z punktem W, bądź też na prostej do tego punktu przynależnej.



Rys. 3

Spróbujmy zbadać, czy słuszne byłoby twierdzenie odwrotne. W tym celu przyjmijmy, że na płaszczyźnie π dane są okręgi: ω_1, ω_2, ω_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3, i t przechodzące przez jeden wspólny punkt W. Okręgi ω_1 i Ω_1, ω_2 i Ω_2, ω_3 i Ω_3 przecinają się parami w punktach leżących na okręgu t. Wprowadźmy dowolną paraboloidę obrotową o osi l prostopadłej do π i wierzchołku w punkcie W. Rzutując na paraboloidę w kierunku l okręgi $\omega_{1\div3}$, $\Omega_{1\div3}$ i t otrzymamy na tej powierzchni siedem elips $\omega'_{1\div3}$, $\Omega'_{1\div3}$ i t' przynależnych do punktu W. Każda z nich wyznacza dokładnie jedną płaszczyznę. W rezultacie otrzymujemy siedem różnych płaszczyzn wiązki (W).

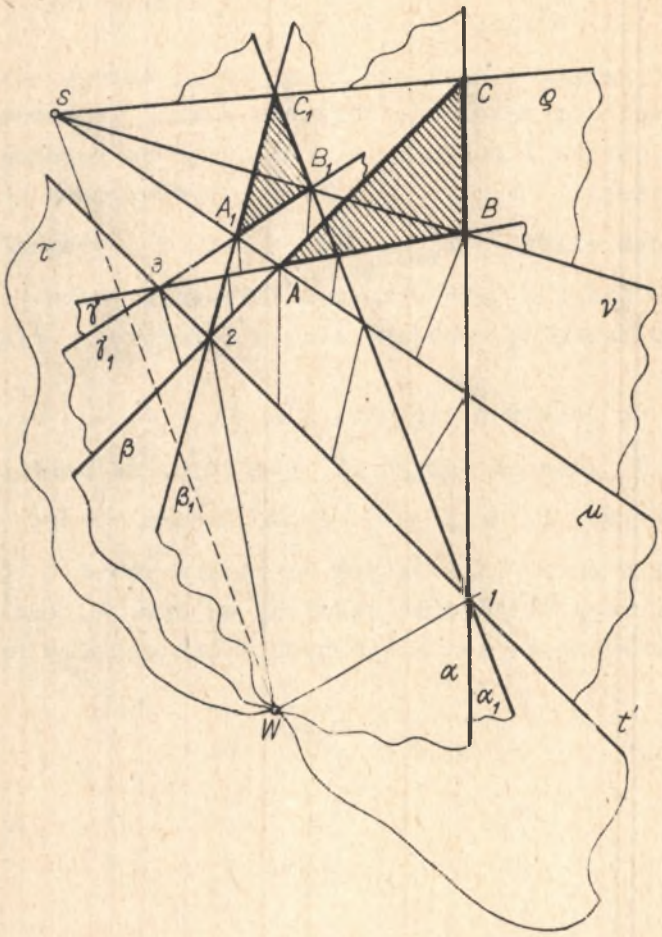
Założenie, że punkty przecięcia $\omega_1 \Omega_1 = 1$, $\omega_2 \Omega_2 = 2$ i $\omega_3 \Omega_3 = 3$ leżą na okręgu t powoduje, że pary płaszczyzn elips: ω'_1 i Ω'_1, ω'_2 i Ω'_2 oraz ω'_3 i Ω'_3 przecinają się w prostych leżących na płaszczyźnie τ ($t' \in \tau$).

Otrzymujemy więc układ przedstawiony na rys. 4, gdzie płaszczyzny przynależne do poszczególnych elips opisano symbolami:

$$\omega'_1 \in \alpha, \quad \Omega'_1 \in \alpha_1$$
$$\omega'_2 \in \beta, \quad \Omega'_2 \in \beta_1$$
$$\omega'_3 \in \gamma, \quad \Omega'_3 \in \gamma_1$$
$$t' \in \tau,$$

Dokonując przekroju wiązki płaszczyzn W (α, α_1, β, β_1, γ, γ_1, τ) dowolną płaszczyzną nieprzechodzącą przez punkt W otrzymuje się dwa trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ ($AB \in \gamma$, $A_1B_1 \in \gamma_1$, $BC \in \alpha$, $B_1C_1 \in \alpha_1$, $CA \in \beta$, $C_1A_1 \in \beta_1$), których odpowiadające sobie boki przecinają się w jednej prostej. Jest to więc płaska konfiguracja Desarguesa, z której wynika, że proste AA_1, BB_1 i CC_1 przecinają się w jednym punkcie S, a stąd - w konsek-

wencji - że płaszczyzny $\mu = WAA_1$, $\nu = WBB_1$ i $\varrho = WCC_1$ przecinają się w jednej prostej WS.



Rys. 4

Zauważmy, że do tego samego wniosku doprowadza przyjęcie prostej w miejsce okręgu t, tj. założenie, że punkty przecięcia się par okręgów ω_1 i Ω_1, ω_2 i Ω_2 oraz ω_3 i Ω_3 są współliniowe. Płaszczyzny μ, ν i ϱ mogą przecinać paraboloidę:

a) w parabolach,

b) w elipsach,

c) w jednej paraboli i dwóch elipsach.

Jest oczywiste, że dla przypadku a) musi zachodzić przynależność punktu S do osi l, czyli WS = l. Wówczas płaszczyzny μ, ν i ϱ zawierając oś paraboloidy l = WS przecinają tę powierzchnię w trzech parabolach, które rzucone prostokątnie na π dają trzy proste przechodzące przez punkt W. W tym więc przypadku odwrócenie twierdzenia 1 jest prawdziwe.

Jeżeli jednak płaszczyzny μ, ν i ϱ przecinają paraboloidę w elipsach m, n i r (przypadek b)) - wówczas rzutami prostokątnymi elips na π są okręgi m', n' i r' przechodzące przez wspólny punkt W i przecinające się w punkcie S' stanowiącym prostokątny rzut punktu S.

Przypadek ten, jak również przypadek c) nie mieści się w odwróceniu twierdzenia 1 i prowadzi do następującego sformułowania ogólniejszego.

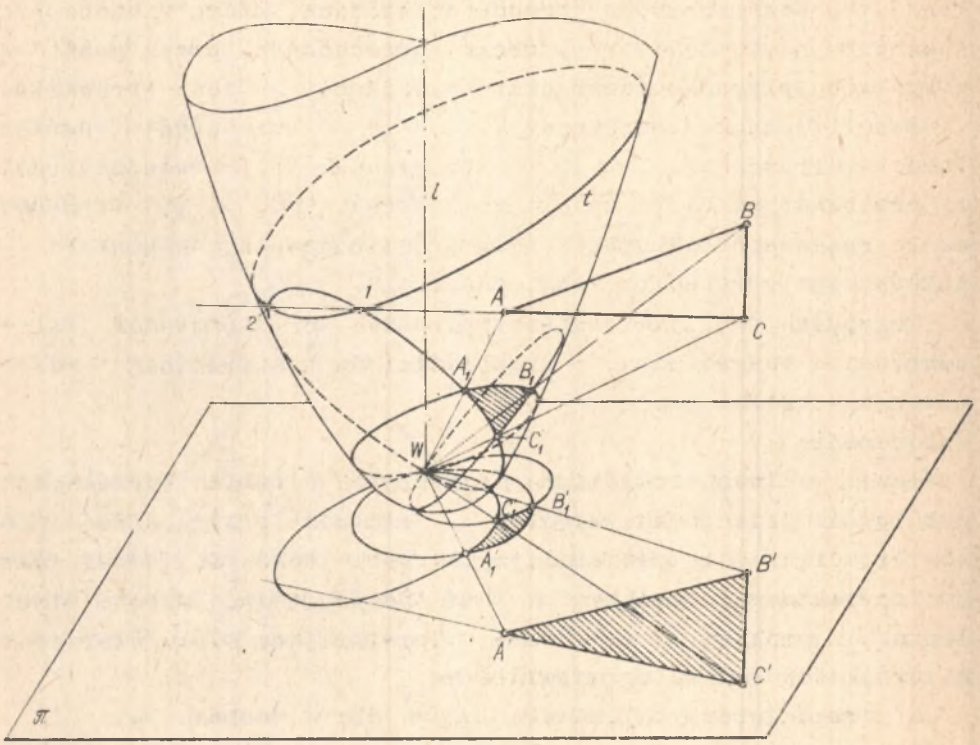
Twierdzenie 2.

Jeżeli w dwóch trójkątach sferycznych o bokach przechodzących przez jeden punkt wspólny W zachodzi przynależność punktów przecięcia się odpowiadających sobie boków do jednego okręgu incydentnego z punktem W bądź też do jednej prostej incydentnej z punktem W - wówczas odpowiadające sobie wierzchołki trójkątów leżą alternatywnie na:

a) trzech prostych przecinających się w punkcie W,
b) trzech okręgach przechodzących przez punkt W i przecinających się z sobą w jeszcze jednym punkcie wspólnym,
c) dwóch okręgach i prostej incydentnych z punktem W i przecinających się z sobą w jeszcze jednym punkcie wspólnym.

Przejdźmy z kolei do rozważenia następnego układu. Dany jest dowolny trójkąt ABC (rys. 5). Z wierzchołka paraboloidy obrotowej o osi $l \perp \pi$ rzućmy na tę powierzchnię wierzchołki trójkąta. Otrzymujemy punkty A_1, B_1, C_1. Figura $A_1B_1C_1$ będzie trójkątem sferycznym, którego boki są, ogólnie biorąc, łukami elips przecięcia paraboloidy płaszczyznami WAB, WBC i WCA. Zrzutujmy prostokątnie na π trójkąt ABC i trójkąt sferyczny $A_1B_1C_1$. Otrzymamy nowy trójkąt sferyczny $A'_1B'_1C'_1$ oraz trójkąt A' B' C', przy czym odpowiadające sobie wierzchołki w tych trójkątach leżą na prostych przechodzących przez punkt W.

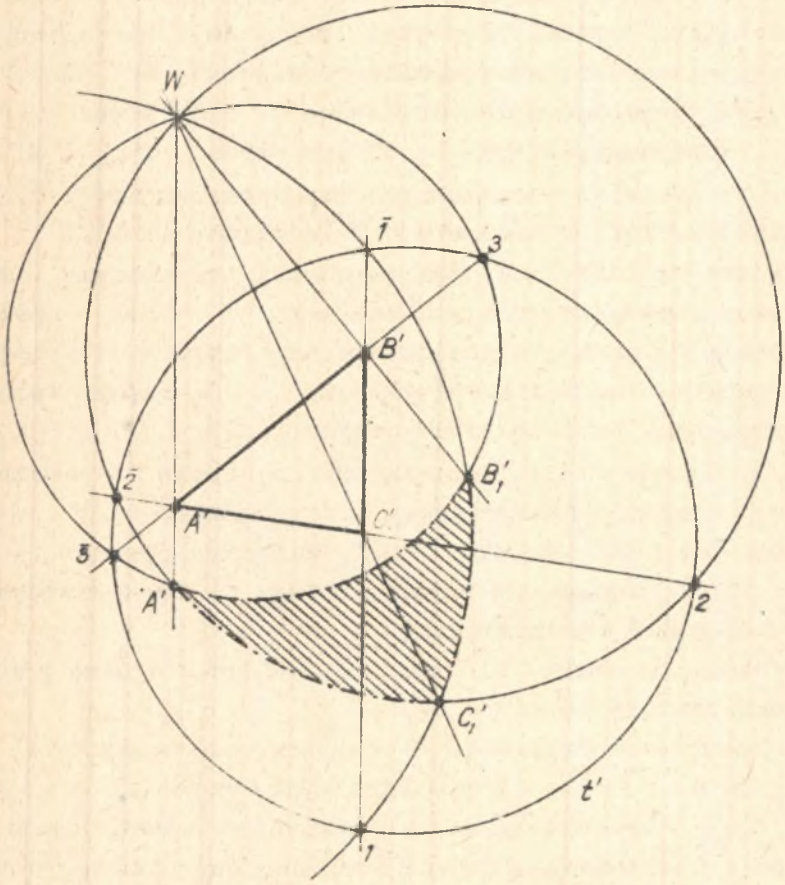
Położenie tych dwóch trójkątów nosi więc cechę położenia Desarguesa. Zbadajmy, gdzie leżą punkty przecięcia się odpo-



Rys. 5

wiadających sobie boków. Załóżmy np., że położenie punktu A w przestrzeni zmieniamy zbliżając go ku powierzchni paraboloidy. Zauważmy, że zbliżać się będą wówczas do siebie punkty w parach: A i A_1 oraz A' i A'_1. W momencie osiągnięcia przez punkt A powierzchni paraboloidy nastąpi zjednoczenie: $A = A_1$ i $A' = A'_1$. Zjednoczone punkty obydwu układów – trójkąta $A'B'C'$ i trójkąta sferycznego $A'_1B'_1C'_1$ są więc rzutami punktów przekroju

powierzchni paraboloidy płaszczyzną trójkąta ABC. Uwzględniając, że jest to w ogólnym przypadku elipsa (parabola wystąpiłaby tylko wówczas, gdyby płaszczyzna trójkąta była prostopadła do π, co dla naszych rozważań nie ma znaczenia) - w rzucie na π otrzymuje się układ przedstawiony na rys. 6.



Rys. 6

Związki łączące trójkąt $A'B'C'$ ze sferycznym $A'_1B'_1C'_1$ można ująć w postaci twierdzenia:

Twierdzenie 3.

Jeżeli dla dowolnego trójkąta sferycznego, którego boki przechodzą przez jeden wspólny punkt W oraz dowolnego trójkąta zachodzi przynależność par odpowiadających sobie wierz-

chołków do prostych przecinających się w punkcie W, wówczas punkty przecięcia się odpowiadających sobie boków tych trójkątów leżą na okręgu.

Odwrócenie twierdzenia 3 jest zawsze prawdziwe. Przyjmijmy bowiem, że na płaszczyźnie π dany jest trójkąt sferyczny $A_1'B_1'C_1'$ o bokach przechodzących przez dowolny punkt W - (rys. 5) i dowolny trójkąt $A'B'C'$, tak że punkty przecięcia się odpowiadających sobie boków tych trójkątów leżą na okręgu $t' \in W$. Zrzutujmy na dowolną paraboloidę obrotową o osi $l \perp \pi$, $l \in W$ w kierunku równoległym do osi okrąg t' i trójkąt sferyczny $A_1'B_1'C_1'$. Otrzymamy elipsę t i łuki elips A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1. Elipsa t ustali jednoznacznie pewną płaszczyznę τ, na którą dokonajmy rzutu w kierunku l trójkąta $A'B'C'$.

Ponieważ zgodnie z założeniem punkty przecięcia odpowiednich boków obydwu trójkątów leżały na t' - po dokonanych konstrukcjach punkty te znajdą się na elipsie t i będą stanowiły punkty przecięcia się elipsy t z elipsami przechodzącymi przez boki trójkąta sferycznego A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1. Rozważmy np. punkty 1 i 2 przecięcia z elipsą t elipsy boku C_1A_1 trójkąta sferycznego. Przez punkty 1 i 2 przechodzić musi bok CA trójkąta ABC (będącego rzutem na τ trójkąta $A'B'C'$), ponieważ zarówno elipsa t jak i trójkąt ABC leżą w tej samej płaszczyźnie τ.
Wynika stąd, że boki CA oraz C_1A_1 leżą w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez punkt W.

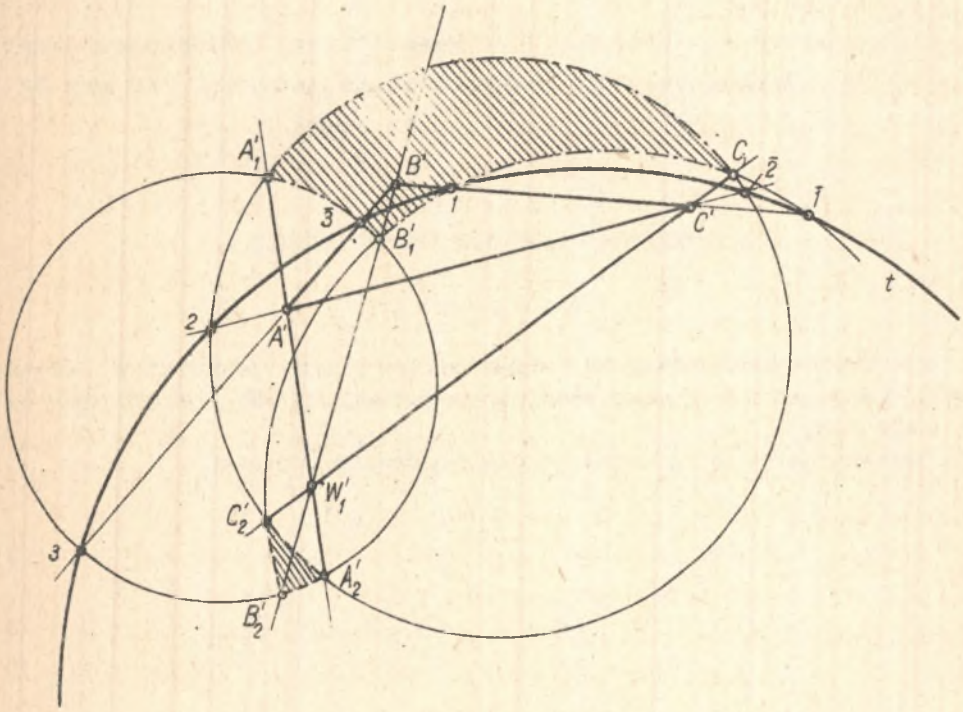
Dowiódłszy analogicznie, że w jednej płaszczyźnie przechodzącej przez W leżą odpowiednio pary boków AB i A_1B_1 oraz BC i B_1C_1 stwierdzamy, że odpowiadające sobie boki trójkąta zwykłego i sferycznego leżą na ścianach ostrosłupa o wierzchołku w punkcie W.

Wynika stąd jasno, że rozważane na płaszczyźnie π trójkąty $A'B'C'$ i $A_1'B_1'C_1'$ będące rzutami figur ABC i $A_1B_1C_1$ mają tę własność, że pary odpowiadających sobie wierzchołków $A'A_1'$, $B'B_1'$ i $C'C_1'$ są współliniowe z punktem W. Własność ta jest treścią odwróconego twierdzenia 3.

Na koniec zauważmy, że warunek przecinania się boków trójkątów sferycznych w jednym punkcie (W) nie jest warunkiem koniecznym dla prawdziwości twierdzeń 1, 2 i 3. Jeżeli bowiem

zamiast rzutu na paraboloidę układu Desarguesa (rys. 1), bądź też jednego tylko trójkąta (rys. 5)- z punktu W rozpatrywać będziemy rzuty na tę powierzchnię z innego dowolnego punktu W_1 (np. z ogniska paraboloidy), wówczas obrazy prostych na paraboloidzie zrzutowane prostokątnie na π dadzą nam układ okręgów nieprzynależnych do jednego punktu wspólnego. Okręgi te jednak muszą spełniać pewien warunek: jako rzuty elips przekroju paraboloidy płaszczyznami ścian ostrosłupa o wierzchołku W_1 - muszą przecinać się na rzutach krawędzi tego ostrosłupa, tj na prostych łączących odpowiadające sobie wierzchołki trójkątów.

Dla układu z rys. 6 przedstawiono tę zmienioną relację na rys. 7



Rys. 7

Podsumowując powyższe wywody warto zwrócić uwagę na pewną symetrię własności trójkątów w położeniu Desarguesa[x)].

a) W przypadku obydwu trójkątów zwykłych - punkty przecięcia się boków sobie odpowiadających leżą na prostej.

b) W przypadku jednego trójkąta zwykłego i jednego sferycznego - punkty przecięcia się boków sobie odpowiadających leżą na okręgu.

c) W przypadku obydwu trójkątów sferycznych - punkty przecięcia się boków odpowiadających sobie mogą leżeć bądź to na okręgu, bądź też na prostej.

Rękopis złożono w Redakcji 15.I.64 r.

LITERATURA

[1] Kounovský J., Vyčichlo F.: Deskriptivni geometrie. Praha 1963. Nakladatelstvi Československé Akademie VĚD str 442.

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ДЕЗАРГА

Содержание

В работе обсуждено обобщение теоремы Дезарга о двух треугольниках, состоящее в замене некоторого числа прямых окружностями, которые проходят через одну общую точку.
Рассуждения проведено при использовании параболоида вращения.

x) W określeniu tym dla trójkątów sferycznych rozumiemy położenie takie, że punkty przecięcia się par odpowiadających sobie boków (w ogólnym przypadku punktów takich jest sześć) leżą na prostych przecinających się w jednym punkcie wspólnym.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES SATZES VON DESARGUES

Zusammenfassung

Man hat eine Verallgemeinerung des Desargueschen Satzes über zwei Dreiecke besprochen, die auf Ersetzung einer Zahl der Geraden durch mit einem Punkt inzidierende Kreise beruht.

Die Betrachtungen sind mit Hilfe des Drehparaboloids durchgeführt worden.