ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 6 Nr kol. 126

RYSZARD BARTŁOMIEJCZYK

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH LICZBY Θ WYSTĘPUJĄCEJ W TWIERDZENIU O PRZYROSTACH SKOŃCZONYCH

Celem artykułu jest podanie pewnych własności liczby Θ w zależności od funkcji $f(x)$ oraz pewnych własności funkcji $f(x)$ w zależności od Θ.

W dostępnej literaturze napotkałem trzy prace dotyczące punktu pośredniego w twierdzeniu Lagrange'a.

W publikacji [1] udowodniono, że:
Jeśli funkcja $f(x)$ posiada pochodną w przedziale (a,b), przy czym istnieje funkcja $h(x,y)$ określona dla $a<x<y<b$, ciągła ze względu na każdą zmienną z osobna, taka, że $x<h(x,y)<y$ oraz

$$f(y) - f(x) = (y-x)\, f'(h(x,y))$$

dla $a<x<y<b$, wówczas funkcja $f(x)$ ma pochodną silnie monotoniczną lub jest liniowa.

W zbiorze [2] znajduje się kilka zadań, które zawierają parę szczególnych wyników na temat liczby Θ.
Poza tym w zbiorach zadań [2], [3] znajduje się zadanie, z którego wynika, że Θ dąży do $\frac{1}{2}$ przy $h \to 0$.
Po kilku wstępnych wiadomościach podam twierdzenia dowodzone w niniejszej pracy.

Niech funkcja $f(x)$ będzie klasy C^3 i $f''(x) \neq 0$ dla $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$. (1)

Na mocy twierdzenia Lagrange'a

$$f(a+h) - f(a) = h\, f'(a + \theta h), \tag{2}$$

gdzie $a \in \langle\alpha\rangle$, $a + h \in \langle\alpha,\beta\rangle$ i $0 < \theta < 1$.

Z założenia (1) wynika, że $f''(x)$ jest stałego znaku w przedziale $\langle\alpha,\beta\rangle$, a zatem $f'(x)$ posiada funkcję odwrotną $x = g(y)$.

Stąd i ze wzoru (2) wynika, że

$$\theta = \frac{1}{h}\, g\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) - \frac{a}{h} \tag{3}$$

A zatem, każdej funkcji $f(x)$ spełniającej założenia (1) odpowiada dokładnie jedna funkcja dwóch zmiennych $\theta = \theta(a,h)$ określona w obszarze $D\{\alpha \leqslant a < \beta, 0 < h \leqslant \beta - a\}$.

W pracy tej zostaną udowodnione następujące twierdzenia:

T.1. Funkcja $\theta(a,h)$ posiada następujące własności:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \theta(a,h) = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\partial\theta(a,h)}{\partial h} = \frac{f'''(a)}{24\, f''(a)}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\partial\theta(a,h)}{\partial a} = 0.$

T.2. Funkcjom $f(x)$ i $g(x)$ spełniającym założenia (1) odpowiada ta sama funkcja $\Theta(a,h)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x) = C_1 g(x) + C_2 x + C_3, \tag{4}$$

gdzie $C_1 \neq 0$, C_2, C_3 - dowolne liczby rzeczywiste.

T.3. Funkcja $\Theta(a,h)$ jest funkcją jednej zmiennej h wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$f(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \tag{5}$$

lub

$$f(x) = C_1 b^x + C_2 x + C_3, \tag{6}$$

gdzie $C_1 \neq 0$, $b>0$, $b \neq 1$, C_2 C_3 - dowolne liczby rzeczywiste.

Jeśli $f(x)$ jest postaci (5) to $\Theta(a,h) = \frac{1}{2}$, jeśli $f(x)$ jest postaci (6), to

$$\Theta(a,h) = \frac{1}{h} \log_b \frac{b^h - 1}{h \ln b}$$

T.4. Funkcja $\Theta(a,h)$ jest funkcją jednorodną wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$f(x) = C_1 x \ln|x| + C_2 x + C_3,$$

lub

$$f(x) = C_1 \ln|x| + C_2 x + C_3, \tag{7}$$

lub

$$f(x) = C_1\, x^c + C_2\, x + C_3,$$

gdzie $C_1 \neq 0$, $C \neq 0,1$; C_2, C_3 - dowolne liczby rzeczywiste. $\theta(a,h)$ jest wtedy funkcją jednorodną stopnia 0.

T.5. Jeśli $f''(x) \cdot f'''(x) > 0$ dla $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ to $\theta(a,h) \geqslant \frac{1}{2}$, jeśli $f''(x) \cdot f'''(x) < 0$ to $\theta(a,h) \leqslant \frac{1}{2}$ w obszarze D.

Dowód twierdzenia T.1.

Funkcja $y = f'(x)$ posiada funkcję odwrotną $x = g(y)$. Różniczkując $g(y)$ otrzymujemy

$$g'(y) = \frac{1}{[f'(x)]'}\bigg|_{x=g(y)} = \frac{1}{f''(x)}\bigg|_{x=g(y)} \tag{8}$$

$$g''(y) = \frac{-f'''(g(y))\, g'(y)}{[f''(g(y))]^2} = \frac{-f'''(x)}{[f''(x)]^3}\bigg|_{x=g(y)} \tag{9}$$

Oznaczmy $\lambda(a,h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Oczywiście $\lim\limits_{h \to 0} \lambda(a,h) = f'(a)$.

Skąd i ze wzorów (8), (9) wynika, że

$$\lim_{h \to 0} g'[\lambda(a,h)] = \frac{1}{f''(a)}$$

$$\lim_{h \to 0} g''[\lambda(a,h)] = \frac{-f'''(a)}{[f''(a)]^3}$$

Łatwo wykazać stosując regułę d'Hospitala, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial \lambda}{\partial h} = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial \lambda}{\partial a} = f''(a)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial a \, \partial h} = \frac{f''(a)}{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial h^2} = \frac{f'''(a)}{3}.$$

Wobec tego

$$\lim_{h \to 0} \Theta(a,h) = \lim_{h \to 0} \frac{g\left[\lambda(a,h)\right] - a}{h} = \lim_{h \to 0} g'\left[\lambda(a,h)\right] \frac{\partial \lambda}{\partial h} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial \Theta(a,h)}{\partial h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\, g'\left[\lambda(a,h)\right] \frac{\partial \lambda}{\partial h} - g\left[\lambda(a,h)\right] + a}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\, g''\left[\lambda(a,h)\right] \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h}\right)^2 + h\, g'\left[\lambda(a,h)\right] \frac{\partial^2 \lambda}{\partial h^2}}{2\,h} = \frac{f'''(a)}{24 f''(a)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial \Theta(a,h)}{\partial a} = \lim_{h \to 0} \frac{g'\left[\lambda(a,h)\right] \frac{\partial \lambda}{\partial a} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} g''\left[\lambda(a,h)\right] \frac{\partial \lambda}{\partial a} \frac{\partial \lambda}{\partial h} + \lim_{h \to 0} g'\left[\lambda(a,h)\right] \frac{\partial^2 \lambda}{\partial a \, \partial h} = 0.$$

Przyjmując $\Theta(a,0) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial \Theta(a,0)}{\partial h} = \frac{f'''(a)}{24 f''(a)}$, $\frac{\partial \Theta(a,0)}{\partial a} = 0$

określamy funkcję $\Theta(a,h)$ i jej pierwsze pochodne cząstkowe dla $h = 0$.

Tak uzupełniona funkcja $\Theta(a,h)$ jest ciągła i posiada ciągłe pochodne cząstkowe dla $h = 0$.

Wniosek.

Funkcja $\Theta(a,h)$ nie może być postaci:

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \Theta(a,h) = \alpha(a).\beta(h) \\ 2^\circ & \Theta(a,h) = \alpha(a)+\beta(h) \\ 3^\circ & \Theta(a,h) = \alpha(a) \\ 4^\circ & \Theta(a,h) = \alpha(a+h) \end{array}\right\} \quad \alpha(a) \neq \text{const}$$

Dowód.

Z T.1a wynika, że

Ad.1°) $\alpha(a)\beta(0) = \frac{1}{2}$, a więc $\alpha(a) = \text{const}$,

Ad.2°) $\alpha(a)+\beta(0) = \frac{1}{2}$, a więc $\alpha(a) = \text{const}$,

Z T.1c wynika, że

Ad.$3^\circ - 4^\circ$) $\alpha'(a) = 0$, a więc $\alpha(a) = \text{const}$.

Ponieważ każdy z 4 przypadków został sprowadzony do niedorzeczności, więc wniosek został wykazany.

Dowód twierdzenia T.2.

Wstawiając do wzoru (2) $f(x) = C_1 g(x) + C_2 x + C_3$ otrzymujemy $g(a+h) - g(a) = h\, g'(a+\Theta h)$.

A więc jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ spełniają związek (4), to odpowiadająca im funkcja $\Theta(a,h)$ jest ta sama.

Odwrotnie, jeśli funkcjom $f(x)$ i $g(x)$ odpowiada ta sama funkcja $\Theta(a,h)$, to na podstawie T.1 mamy

$$\frac{f'''(a)}{24 f''(a)} = \frac{g'''(a)}{24 g''(a)}$$

Stąd otrzymujemy $f'''(a) \cdot g''(a) - g'''(a)\, f''(a) = 0$.
A po podzieleniu przez $[g''(a)]^2$ mamy

$$\frac{f'''(a)\, g''(a) - g'''(a)\, f''(a)}{[g''(a)]^2} = \left[\frac{f''(a)}{g''(a)}\right]' = 0.$$

Więc $f''(a) = C_1\, g''(a)$. Stąd całkując stronami otrzymujemy (4).

Dowód twierdzenia T.3.

Warunkiem koniecznym na to, by $\Theta(a,h)$ była funkcją jednej zmiennej h jest, by $\frac{\partial \Theta(a,0)}{\partial h} = \text{const}$.

Stąd i z T 1b wynika, że

$$\frac{f'''(a)}{24\, f''(a)} = \frac{C}{24}.$$

A więc funkcja $f(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$f'''(x) - C\, f''(x) = 0. \qquad (10)$$

Rozwiązania równania (10) dane są wzorem (5) jeśli $C = 0$, a wzorem (6) jeśli $C \neq 0$.
Z prostych obliczeń wynika, że Θ dla funkcji określonych związkami (5) i (6) wyraża się wzorami podanymi w tezie.
Więc $\Theta(a,h)$ jest tylko wtedy funkcją jednej zmiennej h, jeśli $f(x)$ jest postaci (5) lub (6).

Wniosek.
Jedynymi funkcjami, dla których $\Theta(a,h) = \text{const}$ są funkcje kwadratowe.

Dowód twierdzenia T.4.

Niech $\Theta(a,h)$ będzie funkcją jednorodną stopnia k.

Z wzoru Eulera dla funkcji jednorodnej

$$h\frac{\partial\Theta}{\partial h} + a\frac{\partial\Theta}{\partial a} = k\,\Theta(a,h)$$

po wstawieniu $h = 0$ i zastosowaniu T.1 wynika, że $k = 0$.

A więc $\Theta(ta, th) = \Theta(a,h)$.

Stąd po zróżniczkowaniu ze względu na h, wstawieniu $h = 0$ i zastosowaniu T 1b otrzymujemy

$$\frac{f'''(ta)}{f''(ta)} = t^{-1}\,\frac{f'''(a)}{f''(a)}.$$

Ostatnia równość oznacza, że funkcja jednej zmiennej $\frac{f'''(x)}{f''(x)}$ jest funkcją jednorodną stopnia -1, a więc jest postaci $\frac{c}{x}$.

Jeśli więc $\Theta(a,h)$ jest funkcją jednorodną, to funkcja $f(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{f'''(x)}{f''(x)} = \frac{c}{x}$$

Rozwiązaniami tego równania są funkcje $f(x)$ postaci (7).

Funkcjom danym wzorami (7) odpowiadają następujące funkcje $\Theta(a,h)$

$$\Theta(a,h) = \frac{1}{h}\exp\left[\frac{(a+h)\ln(a+h) - a\ln a}{h} - 1\right] - \frac{a}{h},$$

$$\Theta(a,h) = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)} - \frac{a}{h},$$

$$\Theta(a,h) = \frac{1}{h}\left[\frac{(a+h)^c - a^c}{h\,c}\right]^{\frac{1}{c-1}} - \frac{a}{h},$$

a więc istotnie funkcje jednorodne stopnia 0.

Dowód twierdzenia T.5 opiera się na następującym lemacie:

Lemat 1.

Niech $g(x) \in C^1$ i $g(x) \neq$ const w każdym podprzedziale przedziału $\langle 0,b\rangle$, $g(0) = \frac{1}{2}$.

Jeśli w przedziale $\langle 0,b\rangle$ zachodzi nierówność różniczkowa

$$1 - 2\,g(x) < x\,g'(x), \tag{11}$$

to $g(x) \geqslant \frac{1}{2}$, jeśli natomiast zachodzi nierówność

$$1 - 2\,g(x) > x\,g'(x) \quad \text{to } g(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

Udowodnimy pierwszą część tezy.

Dowód prowadzimy nie wprost. Jeśli teza nie zachodzi, to istnieje liczba $x_0 \in \langle 0,b\rangle$ taka, że $g(x_0) < \frac{1}{2}$ i w pewnym lewostronnym otoczeniu punktu x_0 funkcja $g(x)$ jest malejąca. W otoczeniu tym zachodzą nierówności

$$1 - 2\,g(x) > 0 \quad \text{i} \quad x\,g'(x) < 0,$$

które są sprzeczne z nierównością (11).

Pierwsza część tezy została więc udowodniona.

Dowód twierdzenia T.5.

Różniczkując wzór (2) ze względu na h otrzymujemy

$$f'(a+h) - f'(a+\Theta h) = h\Theta f''(a+\Theta h) + h^2 \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial h} f''(a+\Theta h).$$

Stąd po zastosowaniu do lewej strony wzoru twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$f''(a+\Theta h + \Theta_1(1-\Theta)h)(1-\Theta) = \Theta f''(a+\Theta h) + h\frac{\partial\Theta}{\partial h} f''(a+\Theta h) \qquad (12)$$

Jeśli $f'''(x) > 0$ dla $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$ to $f''(x)$ jest funkcją rosnącą. Z (12) wynika zatem nierówność

$$f''(a+\Theta h)(1-\Theta) < \Theta f\ (a+\Theta h) + h\frac{\partial\Theta}{\partial h} f''(a+\Theta h).$$

Po podzieleniu przez $f''(a+\Theta h)$ otrzymujemy nierówność $1 - 2\Theta < h\frac{\partial\Theta}{\partial h}$ jeśli $f''(x) > 0$ lub nierówność $1 - 2\Theta > h\frac{\partial\Theta}{\partial h}$ jeśli $f''(x) < 0$.

Analogicznie rozpatrujemy przypadek, gdy $f'''(x) < 0$.

Otrzymane wyniki można krótko zapisać:

jeśli $f''(x)\ f'''(x) > 0$ to zachodzi nierówność $1-2\Theta < h\frac{\partial\Theta}{\partial h}$,

jeśli $f''(x)\ f'''(x) < 0$ to zachodzi nierówność $1-2\Theta > h\frac{\partial\Theta}{\partial h}$

Stąd i z lematu 1 wynika teza.

LITERATURA

[1] Łojasiewicz S.: Funkcje wypukłe a twierdzenie o przyrostach skończonych. Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiellońskiego seria Matem.-Fizyczna Nr 1. 1955 r.

[2] Demidowicz: Sbornik Zadacz i upražnienij po matematiczeskomu analizu. 1956 r. Str.114-115, 129.

[3] Berman: Zbiór zadań z analizy matematycznej. 1962 r. Str. 103.

Rękopis złożono w Redakcji 15 stycznia 1964 r.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧИСЛА θ, КОТОРОЕ ВЫСТУПАЕТ В ТЕОРЕМЕ О КОНЕЧНОМ ПРИРОЩЕНИИ

Р е з ю м е

Число θ выступающее в формуле Лагранжа

$$f(a+h) - f(a) = h\, f'(a+\theta h)$$

в этой статье рассматривается как функция переменных a и h. В работе определены классы функций, для которых $\theta\,(a,h)$:

а) константа,

б) функция одного переменного h,

в) однородная функция переменных a и h.

Доказана также теорема:

Если $f''(x)\, f'''(x) > 0$ то $\theta > \frac{1}{2}$, если $f''(x)\, f'''(x) < 0$ то $\theta < \frac{1}{2}$.

ON SOME PROPERTIES OF NUMBER Θ WHICH APPEARS IN THE THEOREM ON FINITE INCREMENTS

S u m m a r y

In the present paper the number Θ which appears in Langrange's formula

$$f(a+h) - f(a) = h\, f'(a+\Theta h)$$

is considered as function of variables a and h. There werc determined classes of function for which $\Theta\,(a,h)$ is:

a) a constant number,

b) a function of one variable h,

c) a homogeneous function of variables a and h.

The following theorem was also proved:

If $f''(x)\, f'''(x) > 0$ then $\Theta > \frac{1}{2}$, if $f''(x)\, f'''(x) < 0$ then $\Theta < \frac{1}{2}$