ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 6 Nr kol.126

RYSZARD BARTŁOMIEJCZYK

O PEWNYM SPOSOBIE PRZYBLIŻENIA ŁAMANYMI FUNKCJI WYPUKŁYCH KLASY C^3

Praca dotyczy pewnych własności optymalnych (w sensie aproksymacji) łamanych wpisanych w funkcję $f(x)$ w przedziale $<a,b>$ oraz związku między optymalną łamaną wpisaną i dowolną optymalną łamaną o tej samej liczbie boków (twierdzenia 1, 2).

Tw. 3 podaje oszacowania maksymalnego odchylenia cięciwy łączącej punkty krzywej o odciętych t, $t+h$ od tej krzywej. Oszacowania te można również otrzymać z nierówności podanej w pracy [1], lecz oszacowania w niniejszej pracy otrzymano na innej drodze.
Na podstawie twierdzenia 3 podana jest konstrukcja łamanych, których odchylenie od danej funkcji nie przekracza z góry zadanej liczby δ.

Niech funkcja $f(x)$ będzie klasy C^3 i $f''(x) \neq 0$ dla $x \in <\alpha,\beta>$. (1)

a funkcja $g(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $<a,b>$ i liniową w każdym przedziale

$$<a,x_1>, <x_1, x_2> \dots, <x_{n-1}, b>, \tag{2}$$

i nie będzie liniową w żadnym przedziale zawierającym wewnątrz punkt $x_i (i=0...n)$. Funkcję $g(x)$ nazywać będziemy łamaną, liczbę n ilością boków łamanej, a punkty funkcji $g(x)$ o odciętych $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ wierzchołkami łamanej.
Łamaną $g(x)$ nazywamy wpisaną w funkcję $f(x)$, jeśli $g(x_i) = f(x_i)$, dla $i = 0, \ldots n$.
liczbę $\Delta = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|$ nazywamy odchyleniem łamanej $g(x)$ od funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$.

Przez $\Delta(t,u)$ oznaczamy odchylenie boku łamanej $g(x)$ (którego końce mają odcięte t i u) od funkcji $f(x)$. (3)
Jeśli $g(x)$ spełnia założenia (2) to zachodzi związek

$$\Delta = \max\left[\Delta(a, x_1), \Delta(x_1, x_2), \ldots, \Delta(x_{n-1}, b)\right] \tag{4}$$

Odchylenie boku łamanej wpisanej (którego końce mają odcięte t i u) od funkcji $f(x)$ oznaczamy przez $\delta(t, u)$. (5)

Łamaną $g(x)$ nazywamy optymalną dla funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, jeśli dla każdej innej łamanej $g_1(x)$ o n bokach zachodzi nierówność

$$\max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)| \le \max_{a\le x\le b} |f(x) - g_1(x)|.$$

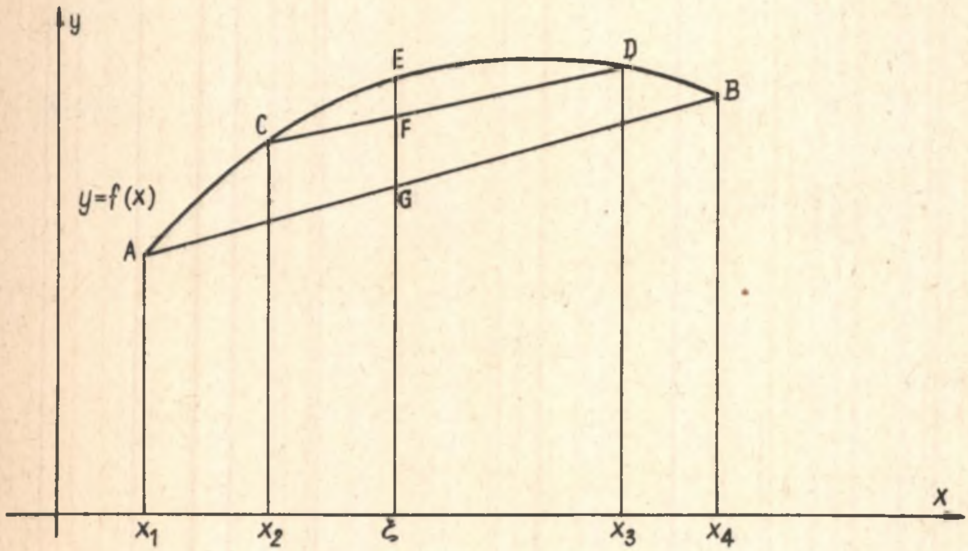
Analogicznie definiujemy optymalną łamaną wpisaną.
Udowodnimy teraz 4 lematy potrzebne dla dowodów twierdzeń.

Lemat 1.

Jeśli $x_1 \leqslant x_2 < x_3 < x_4$ lub $x_1 < x_2 < x_3 \leqslant x_4$

to $\delta(x_2, x_3) < \delta(x_1, x_4)$.

Dowód.



Rozpatrujemy przypadek gdy $f''(x) < 0$, dowód przypadku $f''(x) > 0$ analogiczny.

Ponieważ $f(x)$ jest funkcją wypukłą, więc odcinki AB i CD mogą mieć wspólny co najwyżej jeden z punktów końcowych. Niech w punkcie ζ odcinek CD najbardziej odchyla się od funkcji $f(x)$.

Zachodzą więc nierówności

$$\delta(x_2, x_3) = EF < EG \leqslant \delta(x_1, x_4),$$

z których wynika prawdziwość lematu.

Wniosek 1.

Funkcja $\delta(t,u)$ jest malejącą ze względu na zmienną t, a rosnącą ze względu na zmienną u.

Zamieniając w założeniu słabe nierówności na równości otrzymujemy wniosek.

Lemat 2.

Funkcja $\delta(t,u)$ jest ciągła w obszarze $\{a \leqslant t \leqslant b, t \leqslant u \leqslant b\}$.

Dowód.

Łatwo zauważyć, że

$$\delta(t,u) = \max_{t \leqslant x \leqslant u} \left| F(t, x, u) \right| \tag{6}$$

gdzie

$$F(t,x,u) = \begin{cases} f(x) - f(t) - \dfrac{f(u) - f(t)}{u - t}(x-t) & \text{dla } t < u \\ 0 \quad \text{dla} \quad t = u. \end{cases}$$

Funkcja $F(t, x, u)$ jest ciągła w obszarze

$$\{a \leqslant t \leqslant b, \quad t \leqslant x \leqslant b, \quad x \leqslant u \leqslant b\}$$

Zatem $\delta(t,u)$ jest też funkcją ciągłą w obszarze

$$\{a \leqslant t \leqslant b, \quad t \leqslant u \leqslant b\}.$$

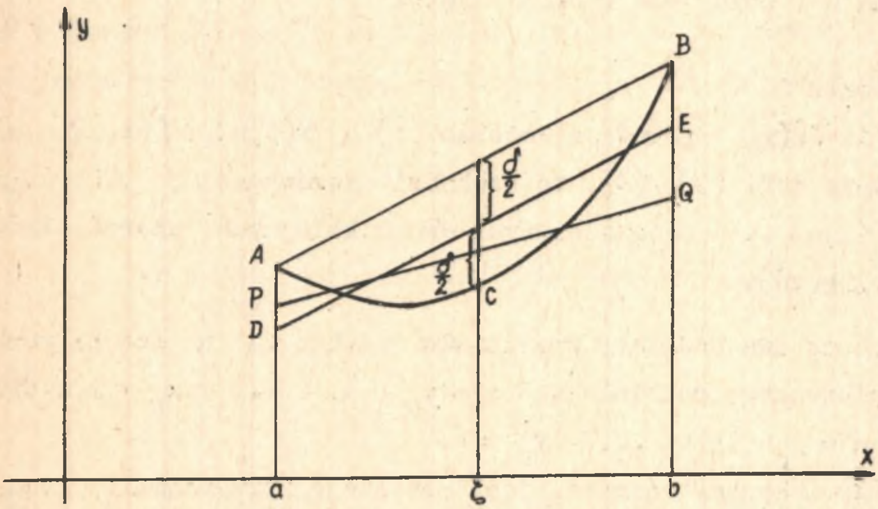
Lemat 3.

Funkcja liniowa, której odchylenie od funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$ jest najmniejsze dana jest równaniem

$$y = g(x) \pm \frac{\delta(a.b)}{2}, \tag{7}$$

gdzie $g(x)$ jest równaniem cięciwy łączącej punkty o odciętych a i b. Znak + bierzemy jeśli $f''(x) < 0$, a znak - jeśli $f''(x) > 0$.

Dowód.



Rozpatrujemy przypadek gdy $f''(x) > 0$, dowód przypadku $f''(x) < 0$ analogiczny. Można prowadzić dowód arytmetyczny tego lematu, jednak dowód geometryczny jest bardziej przyjrzysty. Odcinek AB jest wykresem funkcji $y = g(x)$, odcinek DE jest wykresem funkcji (7), a odcinek PQ wykresem dowolnej funkcji liniowej różnej od funkcji (7).

Mogą zajść cztery przypadki:

1° $AP > \frac{\delta}{2}$ i $BQ < \frac{\delta}{2}$

2°) $AP < \frac{\delta}{2}$ i $BQ > \frac{\delta}{2}$

3°) $AP < \frac{\delta}{2}$ i $BQ < \frac{\delta}{2}$

4°) $AP > \frac{\delta}{2}$ i $BQ > \frac{\delta}{2}$

W każdym z tych 4 przypadków odchylenie odcinka PQ od przynajmniej jednego z punktów A, B, C przekracza $\frac{\delta}{2}$.
A więc równanie (7) przedstawia optymalną funkcję liniową (łamaną o 1 boku) dla funkcji $f(x)$.

Wniosek 2.

Jeśli $f(x)$ spełnia założenia (1) a $\Delta(t,u)$, $\delta(t,u)$ są określone def. (3), (5), to zachodzi nierówność $\Delta(t,u) \geqslant \frac{1}{2}\delta(t,u)$ (t i u są odciętymi dwóch kolejnych wierzchołków łamanej $g(x)$).

Dane są dwa podziały przedziału $\langle a,b \rangle$ na n części, punktami pierwszego podziału są $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, a drugiego $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$.
Podziały nazywamy różnymi, jeśli istnieje przynajmniej jeden punkt x_i taki, że $x_i \neq y_j$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$.

Lemat 4.

Dla każdych dwóch różnych podziałów przedziału $\langle a,b \rangle$ istnieje para liczb (i,k) taka, że

$$y_i \leqslant x_k < x_{k+1} < y_{i+1}$$

Dowód.

Przedziałów $(a, x_1>, (x_1, x_2>, \ldots (x_{n-1}, b>$ jest n, natomiast punktów wewnętrznych drugiego podziału jest $n - 1$. Istnieje więc przedział $(x_k, x_{k+1}>$ nie zawierający żadnego punktu y_i.

Niech i będzie największą liczbą taką, że $y_i \leqslant x_k$.

Dla tak określonej pary liczb (i, k) zachodzi nierówność podana w tezie.

Twierdzenie 1.

Jeśli $f(x)$ spełnia założenia (1), to dla każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie jedna optymalna łamana wpisana w funkcję $f(x)$ w przedziale $<a,b>$ o n bokach. Odchylenia boków tej łamanej od funkcji $f(x)$ są sobie równe.

Dowód.

Niech

$$\delta_{n+1}(x) = \min_{a<y\leqslant x} \left[\delta_n(y), \delta(y, x)\right] \quad \text{dla } n = 1,2,3\ldots \tag{8}$$

gdzie

$$\delta_1(x) = \delta(a, x).$$

Funkcja $\delta_n(x)$ oznacza odchylenie optymalnej łamanej wpisanej o n bokach od funkcji $f(x)$ w przedziale $<a, x>$.

Aby twierdzenie było prawdziwe należy udowodnić, że:

1^o minimum we wzorze (8) realizuje się przy ustalonym x dla dokładnie jednego $y_n = y_n(x)$ spełniającego związek

$$\delta_n(y_n) = \delta(y_n, x),$$

2^0 funkcja $\delta_{n+1}(x)$ jest funkcją rosnącą i ciągłą zmiennej x.

Prowadzimy dowód indukcyjny:

Dla $n = 1$ otrzymujemy

$$\delta_2(x) = \min_{a \leqslant y \leqslant x} \left[\delta(a,y),\ \delta(y,x)\right] \tag{9}$$

Niech x będzie ustaloną liczbą.

Ponieważ $\delta(a,y)$ jest funkcją rosnącą ze względu na y, $\delta(y,x)$ jest funkcją malejącą ze względu na y, więc minimum we wzorze (9) realizuje się dla takiego $y_1 = y_1(x)$, że

$$\delta(a, y_1) = \delta(y_1, x). \tag{10}$$

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania $y_1 = y_1(x)$ równania (10) wynika z ciągłości i monotoniczności funkcji $\delta(a,y)$, $\delta(y,x)$ ze względu na zmienną y.

Niech $x_1 > x_2$.

$$\delta_2(x_1) = \max_{a \leqslant y \leqslant x_1} \left[\delta(a,y_1), \delta(y_1,x_1)\right] = \delta(a,y_1) = \delta(y_1,x_1),$$

$$\delta_2(x_2) = \max_{a\ y\ x_2} \left[\delta(a,y_1'),\ \delta(y_1',x_2)\right] = \delta(a,y_1') = \delta(y_1',x_2).$$

Mogą zaistnieć dwa przypadki:

$1^0)$ $y_1 \leqslant y_1'$, $2^0)$ $y_1 > y_1'$

W przypadku 1^o) zachodzi nierówność

$$y_1 \leqslant y_1' < x_2 < x_1,$$

z której wynika na podstawie lematu 1

$$\delta_2(x_1) = \delta(y_1,x_1) > \delta(y_1',x_2) = \delta_2(x_2).$$

W przypadku 2^o zachodzi nierówność

$$a < y_1' < y_1,$$

z której wynika, że

$$\delta_2(x_2) = \delta(a,y_1') < \delta(a,y_1) = \delta_2(x_1)$$

Stąd wynika, że $\delta_2(x)$ jest funkcją rosnącą. Ciągłość funkcji $\delta_2(x)$ wynika z ciągłości funkcji $\delta(x,y)$.

Dla $n = 2$ twierdzenie jest prawdziwe.

Dowód przejścia indukcyjnego od $n = k$ do $n = k+1$ analogiczny.

Twierdzenie 2.

Jeśli funkcja $g(x)$ spełniająca założenie (2) jest optymalną łamaną wpisaną o n bokach dla funkcji $f(x)$ w przedziale $<a,b>$, to

$$y = g(x) \pm \frac{\Delta}{2} \tag{11}$$

jest optymalną łamaną o n bokach dla funkcji $f(x)$ w prze- $\langle a, b\rangle$.

Znak + bierzemy jeśli $f''(x) < 0$, znak - jeśli $f''(x) > 0$,

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - g(x) \right|.$$

Dowód.

Odchylenie łamanej (11) od funkcji $f(x)$ wynosi $\frac{\Delta}{2}$. Udowodnimy, że każda inna łamana $g_1(x)$ której rzuty wierzchołków mają współrzędne $a, y_1, \ldots, y_n = b$ ma odchylenie od funkcji $f(x)$ większe niż $\frac{\Delta}{2}$.

Jeśli $x_i = y_i$ dla $i = 0, 1 \ldots n$, to na podstawie lematu 3 otrzymujemy nierówność

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - g_1(x) \right| > \frac{\Delta}{2}.$$

Jeśli x_i i y_i dla $i = 0, 1, \ldots n$ tworzą różne podziały przedziału $\langle a, b\rangle$, to z lematu 4 wynika istnienie pary liczb (i, k) takiej, że

$$y_i \leq x_k < x_{k+1} < y_{i+1}$$

Stosując lemat 1,3 i wniosek 2 otrzymujemy nierówności

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\delta(x_k, x_{k+1})}{2} < \frac{\delta(y_i, y_{i+1})}{2} \leq \Delta(y_i, y_{i+1}) \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - g_1(x) \right|$$

z których wynika prawdziwość tezy.

Twierdzenie 3.

Jeśli $f''(x)\, f'''(x) < 0$ dla $x \in \langle a,b\rangle$, to zachodzi nierówność

$$\frac{h^2}{8}\left|f''(t+h)\right| < \delta(t,\ t+h) < \frac{h^2}{8}\left|f''(t)\right|.$$

Jeśli $f''(x)\, f'''(x) > 0$ dla $x \in \langle a,b\rangle$, to zachodzi nierówność

$$\frac{h^2}{8}\left|f''(t)\right| < \delta(t,\ t+h) < \frac{h^2}{8}\left|f''(t+h)\right|.$$

Dowód.

Wstawiając do wzoru (6) $u = t + h$ otrzymujemy

$$\delta(t,t+h) = \max_{t \leq x \leq t+h} \left| f(x) - f(t) - \frac{f(t+h) - f(t)}{h}(x-t) \right| \tag{12}$$

Z wypukłości funkcji $f(x)$ wynika, że maksimum we wzorze (12) realizuje się dla z spełniającego związek

$$f'(z) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wiadomo, że $z = t + \Theta h$, gdzie $0 < \Theta < 1$.

Stąd po wstawieniu do wzoru (12) otrzymujemy

$$\delta(t,\ t+h) = \left| f(t+\Theta h) - f(t) - f'(t+\Theta h)\, \Theta h \right|. \tag{13}$$

Z wzoru Taylora wynika, że

$$f(t) = f(t+\Theta h) - f'(t+\Theta h)\,\Theta h + \frac{f''(\zeta)\,\Theta^2 h^2}{2}, \text{gdzie } t<\zeta<t+\Theta h$$

Wstawiając ostatni wzór do (13) otrzymujemy

$$\Theta(t,\ t+h) = \frac{\Theta^2 h^2}{2}\left|f''(\zeta)\right|. \tag{14}$$

Zastosujemy teraz następujące twierdzenie podane w [2]:
Jeśli $f''(x)\,f'''(x)<0$ dla $x\in\langle a,b\rangle$ to $\Theta \leqslant \frac{1}{2}$,
jeśli $f''(x)\,f''(x)>0$ dla $x\in\langle a,b\rangle$ to $\Theta \geqslant \frac{1}{2}$.

Zauważmy, że jeśli $f''(x)\,f'''(x)<0$ to $|f''(x)|$ jest funkcją malejącą.

Mogą mianowicie zajść dwa przypadki:

1^0 $f''(x)<0$ i $f'''(x)>0$ lub 2^0 $f''(x)>0$ i $f'''(x)<0$.

W przypadku 1^0 $f''(x)$ jest funkcją rosnącą po wartościach ujemnych, zatem $|f''(x)|$ jest funkcją malejącą.

Przypadek 2^0 jest oczywisty.

Analogicznie, jeśli $f''(x)\,f''(x)>0$ to $|f''(x)|$ jest funkcją rosnącą.

Stosując do wzoru (14) podane wyżej wiadomości, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\delta(t,\ t+h) < \frac{h^2}{8}\left|f''(t)\right| \quad \text{jeśli } f''(x)\ f'''(x)<0, \\ &\delta(t,\ t+h) > \frac{h^2}{8}\left|f''(t)\right| \quad \text{Jeśli } f''(x)\ f'''(x)>0, \end{aligned} \tag{15}$$

Przez $\delta_1(t,u)$ oznaczmy odchylenie boku łamanej wpisanej (którego końce mają odcięte t i u) od funkcji $g(x) = f(-x)$.
Łatwo zauważyć, że $\delta(t,t+h) = \delta_1(-t-h, -t)$.
Niech $f''(x)\ f'''(x) < 0$, wtedy $g''(x)\ g'''(x) > 0$.

Stąd na podstawie wzorów (15) otrzymujemy

$$\delta(t,\ t+h) = \delta_1(-t-h,\ -t) > \frac{h^2}{8}\ \left|g''(-t-h)\right| = \frac{h^2}{8}\ \left|f''(t+h)\right| \quad (16)$$

Analogicznie, jeśli $f''(x)\ f'''(x) > 0$ to zachodzi nierówność

$$\delta(t,\ t+h) = \delta_1(-t-h,\ -t) < \frac{h^2}{8}\ \left|g''(-t-h)\right| = \frac{h^2}{8}\ \left|f''(t+h)\right| \quad (17)$$

Z nierówności (15), (16), (17) otrzymujemy tezę.

Uwaga.

Łatwo stwierdzić, że dla funkcji $y = a\,x^2 + b\,x + c$

$$\delta(t,\ t+h) = \frac{a\,h^2}{4}$$

Twierdzenie 3 może służyć do konstrukcji łamanych (wpisanych w funkcję $f(x)$ lub dowolnych), których odchylenie od funkcji $f(x)$ nie przekracza liczby δ.

Rozpatrzmy kilka zadań, które mogą mieć zastosowanie w praktyce numerycznej.

Zadanie 1.

Dana jest funkcja $f(x)$ taka, że $f''(x)\ f'''(x) < 0$ dla $x \in \langle a,b \rangle$.

Zbudować łamaną wpisaną, której odchylenie od funkcji $f(x)$ nie przekracza liczby δ.

Wystarczy oczywiście wyznaczyć długości rzutów h_i boków łamanej na oś x.

Na podstawie twierdzenia 3 wystarczy obrać

$$h_1 = 2\sqrt{\frac{2\delta}{|f(a)|}},\quad h_2 = 2\sqrt{\frac{2\delta}{|f(a+h_1)|}},\ \ldots,\ h_n = 2\sqrt{\frac{2\delta}{\left|f\left(a+\sum_{i=1}^{n-1} h_i\right)\right|}}$$

gdzie

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_i < b-a, \qquad \sum_{i=1}^{n} h_i \geqslant b-a.$$

Liczbę h_n zastępujemy nie większą od niej liczbą h_n' spełniającą warunek

$$h_n' + \sum_{i=1}^{n-1} h_i = b - a.$$

Liczby $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n'$ wyznaczają łamaną wpisaną, której odchylenie od funkcji $f(x)$ nie przekracza δ.

Zadanie 2.

Dana jest funkcja $f(x)$ taka, że $f''(x)\, f'''(x) > 0$ dla $x \in \langle a,b \rangle$. Zbudować łamaną wpisaną, której odchylenie od funkcji $f(x)$ nie przekracza liczby δ.

Rozpatrujemy konstrukcję łamanej wpisanej w krzywą $f(-x)$ w przedziale $<-b, -a>$, której odchylenie nie przekracza δ. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku można zastosować zadanie 1. Otrzymujemy więc liczby $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}, h_n'$ będące długościami rzutów łamanej wpisanej w funkcję $f(-x)$ w przedziale $<-b, -a>$. Zatem liczby $h_n', h_{n-1}, \ldots, h_2, h_1$ będą długościami rzutów kolejnych boków łamanej wpisanej w funkcję $f(x)$ w przedziale $<a,b>$, której odchylenie nie przekracza liczby δ

Zadanie 3.

Dana jest funkcja $f(x)$ spełniająca założenie (1). Zbudować łamaną wpisaną, której odchylenie od funkcją $f(x)$ w przedziale $<a,b>$ nie przekracza δ.

Przedział $<a,b>$ dzielimy na takie maksymalne podprzedziały, że wewnątrz każdego z tych podprzedziałów $f''(x)$ $f'''(x)$ jest stałego znaku. Do każdego z tych podprzedziałów stosujemy wyniki zadań 1 i 2.

Zadanie 4.

Dana jest funkcja $f(x)$ spełniająca założenia (1). Zbudować łamaną, której odchylenie od funkcji $f(x)$ w przedziale $<a,b>$ nie przekracza δ

Korzystając z zadania 3 zbudujemy łamaną wpisaną, której odchylenia od funkcji $f(x)$ nie przekracza 2δ. Niech jej równanie będzie $y = g(x)$.
Łamana $y = g(x) \pm \delta$ ma odchylenie od funkcji $f(x)$ nie przekraczające δ. Znak + bierzemy jeśli $f''(x) < 0$, znak − jeśli $f''(x) > 0$.

LITERATURA

[1] Łukaszewicz J., Warmus M.: Metody numeryczne i graficzne. Warszawa 1956, str.100.

[2] Bartłomiejczyk R.: O pewnych własnościach liczby Θ występującej w twierdzeniu o przyrostach skończonych.

Rękopis złożono w Redakcji 5 marca 1964 r.

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОМАНЫМИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА C^3

Р е з ю м е

В статье указаны свойства оптимальных (в смысле апроксимации) ломаных вписанных в функцию f(x) в интервале $<\alpha, \beta>$ а также связь между оптимальной ломаной вписанной и какой либо оптимальной ломаной с тем же самым числом боков.
Указана также конструкция ломаной, которой уклон от данной функции f(x) меньше б.

ON SOME METHOD OF APPROXIMATING OF CONVEX FUNCTIONS OF C^3 CLASS WITH BROKEN LINES

S u m m a r y

This paper gives the properties of optimal broken lines (in sense of approximations) inscribed in function $f(x)$ in the interval $<\alpha, \beta>$ and the relationship between optimal broken line inscribed in $f(x)$ and arbitrary optimal broken line with the same number of sides.

Besides, there is given the method of construction of a broken line having from the given function $f(x)$ a smaller deflection than δ.