ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 6 Nr kol. 126

JÓZEF SZPILECKI

OBCOWZBUDNE REZONANSE PARAMETRYCZNE W UKŁADACH O N STOPNIACH SWOBODY

Streszczenie. W pracy podano rozwiązanie trzech rodzajów macierzowych równań różniczkowych zwyczajnych typu (2) z warunkiem (8), zagadnienie diagonalizacji i wykresy stateczności, których rozpatrzono w [3], w przypadku, gdy równania te są doprowadzone do postaci diagonalnej. Współczynniki rozwiązania w formie szeregu Fouriera (9) dadzą się wyliczyć z równania (11) o macierzy współczynników (13). Równania rozwiązano uwzględniając rezonans liniowy i sumowy i różnicowy rezonans parametryczny. Otrzymane formuły pozwalają zobaczyć wpływ charakterystycznego dla układu parametru na postać krzywej rezonansu liniowego oraz przebieg jego krzywej fazowej.

W końcu rozszerzono stosowaną metodę na równania nie diagonalizowane i wieloperiodyczne.

1. WSTĘP. CEL PRACY

W pracy [3] rozpatrzono problem diagonalizacji macierzowego równania jednorodnego typu

$$\left[A(t)\, d^2/dt^2 + B(t)\, d/dt + \Phi(t)\right] y = 0 \qquad (1)$$

gdzie y oznacza wektor kolumnę niewiadomych wielkości $y_1 \ldots y_n$.

Macierze $A(t)$, $B(t)$ i $\Phi(t)$ obrano w ten sposób, by po diagonalizacji wykorzystać znane wykresy obszarów stateczności. Są to macierze kwadratowe n rzędu, których elementy są funkcjami ciągłymi lub odcinkami ciągłymi o nieciągłościach pierwszego rodzaju.

Celem niniejszej pracy jest rozpatrzenie rezonansów parametrycznych obcowzbudnych w układach, opisanych równaniem macierzowym

$$\left[A(t)\, d^2/dt^2 + B(t)\, d/dt + \Phi(t)\right] y = f(t) \qquad (2)$$

gdzie $f(t)$ wektor-kolumna o elementach, będących znanymi funkcjami przedstawialnymi w postaci szeregu Fouriera.

Ze względu na różnorodność metod, przy użyciu których zagadnienie daje się rozwiązać, pracę podzielono na dwie części

W pierwszej części rozpatrzono rozwiązanie w formie szeregu Fouriera, przedstawiające stan ustalony oscylacji obcowzbudnych, przy założeniu, że macierz $B(t)$ posiada elementy stałe, macierze $A(t)$, $B(t)$ i $\Phi(t)$ są zresztą tego samego typu, co w wymienionej już pracy [3] i doprowadzone do postaci diagonalnej. Przedstawia to pewne udogodnienie, polegające na tym, że można rozważania przeprowadzać dla jednego elementu macierzy. Metoda mogłaby być również stosowana bez założenia o diagonalizacji macierzy, ale wyniki byłyby bardziej nie przejrzyste.

W części drugiej rozwiązano zagadnienie ogólniejsze, mianowicie z uwzględnieniem stanu nieustalonego i dla macierzy nie diagonalizowanych.

Część pierwsza

2. UWAGI OGÓLNE

W części pierwszej rozpatrzono rezonanse liniowe z częstością podstawową funkcji f(t) oraz rezonanse parametryczne sumowe i różnicowe. Rozumowanie daje się przy pewnym wkładzie pracy prosto uogólnić na dowolną ilość rezonansów liniowych (wyższe harmoniczne) i parametrycznych (dowolne liniowe kombinacje częstości).

Aby móc porównać wyniki dla rezonansów parametrycznych z wynikami dla układów o stałych elementach, przedstawiono otrzymane rozwiązania w postaci ułamków łańcuchowych. Pozwala to w prosty sposób prześledzić różnice w kształcie krzywych rezonansów oraz zdefiniować parametry, decydujące o tych odstępstwach.

3. ROZPATRZONE TYPY RÓWNAŃ

Podobnie jak w [3] rozpatrzono następujące typy równań:

1) Równanie Mathieu z tłumieniem.

W tym przypadku

$$A(t) = I, \quad \Phi(t) = (a) + (2q) \cos \omega_{1,0} t, \quad B(t) = (b) \qquad (3)$$

gdzie I macierz jednostkowa, (a), (b) macierze diagonalne n rzędu o stałych i dodatnich elementach.

2) Równanie Meissnera z tłumieniem

W tym przypadku

$$A(t) = I, \quad \Phi(t) = (a) \pm 2(q), \quad B(t) = (b) \qquad (4)$$

Elementy diagonalnych macierzy n rzędu (a), (q), (b) są stałe i spełniają następujące nierówności:

$$a_{ik} > 0, \quad 0 < 2\, q_{i,k} < a_{i,k} \qquad (5)$$

Przejście od wartości (a) + (2q) do wartości (a) - (2a) i odwrotnie odbywa się w chwili $k\pi/\omega$ lub $2\pi/\omega$, gdzie $0 < k < 1$, ω pulsacja zmian parametru $(a) \pm (2q)$.

3) Równanie Weiganda I

W tym przypadku

$$A(t) = (1/\lambda) + (\varkappa/\lambda)\cos\omega_{1,0}\, t, \quad \Phi(t) = I, \quad B(t) = (b) \qquad (6)$$

Macierze $(1/\lambda)$ i $(\varkappa/\lambda)$, (b) są diagonalne n rzędu o elementach stałych, przy czym dla żadnej wartości t żaden z elementów macierzy A(t) nie zeruje się.

4) Równanie Weiganda II

Ze względu na pewną zmianę oznaczeń w porównaniu z [3] mamy

$$A(t) = 1/\lambda)/\omega_{1,0}^2 + \left[(2h^2/\lambda^2)/\omega_{1,0}^2\right]\cos\omega_{1,0}\, t \qquad (7)$$

$$B(t) = -\left[8(h^2/\lambda^2)/\omega_{1,0}^2\right]\sin\omega_{1,0}t$$

$$\Phi(t) = I$$

Macierze $(1/\lambda)$ i (h^2/λ^2) są diagonalne n rzędu o stałych elementach. Wszystkie elementy macierzy $A(t)$ są różne od zera.

4. ROZWIĄZANIE PRZEDSTAWIAJĄCE STAN USTALONY OSCYLACJI

Założono, że

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(\omega_{0,m} t + \varphi_{0,m}) \tag{8}$$

gdzie B_m, $\omega_{0,m}$, $\varphi_{0,m}$ - stałe.

Rozwiązanie równania (2) przyjmujemy w następującej postaci:

$$y = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{k,l}\cos(\omega_{k,l} t + \omega_{k,l}) \tag{9}$$

gdzie

$$\omega_{k,l} = k\,\omega_{1,0} + l\,\omega_{0,1},\quad kl=1,2... \tag{10}$$

Stałe $A_{k,l}$, $\psi_{k,l}$ wyznaczamy w ten sposób, by równanie (2) było spełnione niezależnie od tego, jakie wartości przybiera zmienna niezależna t.

4.1. ROWNANIE MACIERZOWE NA WYZNACZENIE AMPLITUD I FAZ SZEREGU (9).

Problem wyznaczenia amplitud i faz rozwiązania równania 1),3) i 4) możemy ująć we wspólne równanie

$$(C)\ (A) = (B) \tag{11}$$

gdzie (A) jest wektorem kolumną złożoną z elementów: .... $A_{-2,1,c}$, $A_{-2,1,s}$, $A_{-1,1,c}$, $A_{-1,1,s}$, $A_{0,1,c}$, $A_{0,1,s}$, $A_{1,1,c}$, $A_{1,1,s}$, $A_{2,1,c}$, $A_{2,1,s}$ ...

(B) jest wektorem-kolumną złożoną z elementów: $B_{l,c}$, $B_{l,s}$, $l=1,2,\ldots n$ różnych od zera w przypadku równań odnoszących się do rezonansu liniowego odpowiadającego częstości $0,1$.

Dla skrócenia oznaczono

$$A_{i,k,c} = A_{i,k} \cos \psi_{i,k} \tag{12}$$

$$A_{i,k,s} = A_{i,k} \sin \psi_{i,k}$$

$$B_{l,c} = B_l \cos \varphi_l$$

$$B_{l,s} = B_l \sin \varphi_l$$

Podwójnie nieskończona macierz (C) posiada następującą postać (u góry ponad poszczególnymi kolumnami oznaczono zmienne, do których odnoszą się te kolumny)

$$\ldots\ldots \quad A_{-1,1,c} \quad A_{-1,1,s} \quad A_{0,1,c} \quad A_{0,1,s} \quad A_{1,1,c} \quad A_{1,1,s} \quad \ldots\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
p_{-2}, & 0, & \lambda_{-1,1}, & \mu_{-1,1}, & q_0 & & & & & \\
 & p_{-2}, & \nu_{-1,1}, & \varrho_{-1,1}, & 0, & q_0 & & & & \\
 & & p_{-1}, & 0, & \lambda_{0,1}, & \mu_{0,1}, & q_1 & & & \\
 & & & p_{-1}, & \nu_{0,1}, & \varrho_{0,1}, & 0, & q_1 & & \\
 & & & & p_0, & 0, & \lambda_{11}, & \mu_{1,1}, & q_2 & \\
 & & & & & p_0, & \nu_{1,1}, & \varrho_{1,1}, & 0, & q_2
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{13}$$

przy czym znaczenie poszczególnych symboli podaje tabela.

Tabela 1

Równanie	Mathieu	Weigand I	Weigand II
$\lambda_{k,1} = \varrho_{k,1}$	$(-\omega_{k,1}^2 + a)$	$(1-\omega_{k,1}^2/\lambda)$	$(1-(\omega_{k,1}/\omega_{1,0})^2/\lambda)$
$-\mu_{k,1} = \nu_{k,1}$	$b\omega_{k,1}$	$b\omega_{k,1}$	0
p_k	q	$-\omega_{k,1}^2 \delta_{0,1}$	$-(h^2/\lambda^2)(\omega_{k,1}^2 + 4\omega_{k,1})$
q_k	q	$-\omega_{k,1}^2 \delta_{0,1}$	$-(h^2/\lambda^2)(\omega_{k,1}^2 - 4\omega_{k,1})$

$$\delta_{0,1} = -\varkappa/2\lambda$$

Kolumna 2 wymaga uwagi. Gdyby, jak w pracy Weiganda elementy macierzy $(1/\lambda)$ i $(\varkappa/2\lambda)$ były bezwymiarowe, należałoby wielkość $\omega_{k,1}$ podzielić przez ω_{10}, by otrzymać wyrażenie bezwymiarowe.

4.2. Kilka uwag matematycznych

Równania typu (11) do których rozwiązania sprowadza się rozwiązanie problemu, są równaniami o nieskończonej liczbie niewiądomych i o podwójnie nieskończonej macierzy współczynników (C).

W ogólności rozwiązanie tego rodzaju równań przedstawia się bardziej skomplikowanie, niż w przypadku skończonej liczby zmiennych. Z teorii równania Mathieu [2] znane jest jednak twierdzenie E. Schmidta, pozwalające uprościć zagadnienie: Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to by równanie

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{q,p} x_p = c_q, \quad q=1,2,... \tag{14}$$

posiadało rozwiązanie o zbieżnej sumie kwadratów $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2$ jest, by dla każdego wiersza (kolumny) macierzy (C) był spełniony warunek zbieżności szeregu $\sum_{p=1}^{\infty} a_{q,p}^2$ $\left(\sum_{q=1}^{\infty} a_{q,p}^2\right)$ przy dowolnych c_q. Zbieżność ta wynika prosto w przypadku macierzy (C) z tego, że liczba różnych od zera elementów poszczególnych wierszy (kolumn) macierzy C jest skończona i wartości tych elementów są również skończone.

Przy założeniu słuszności powyższego twierdzenia wolno stosować przybliżony sposób rozwiązania równania (11), polegający na tym, że macierz (C) zastępujemy macierzą n rzędu przez wykreślenie pozostałych wierszy i kolumn i zagadnienie rozwiązujemy dla n niewiadomych. Gdy n zmienia się od 1 do nieskończoności ciąg rozwiązań dąży do rozwiązania szukanego.

4.3. Ograniczenie rozważań do rezonansu liniowego i rezonansów parametrycznych

Korzystając z uwag podanych w poprzednim paragrafie i dotyczących rozwiązania, ograniczymy się do rozpatrzenia trzech rezonansów: rezonansu liniowego i dwu rezonansów parametrycznych: sumowego i różnicowego. W przypadku uwzględnienia tylko wyrazów odpowiadających w równaniu (11) amplitudzie $A_{0,1}$ otrzymujemy wyniki dla rezonansu liniowego charakterystycznego dla obwodu o jednym stopniu swobody.

Jeżeli ponadto uwzględnimy amplitudy $A_{-1,1}$, $A_{1,1}$ odpowiadające częstości sumowej i różnicowej, otrzymujemy możliwość występowania rezonansu liniowego i dwu rezonansów parametrycznych. Na przebieg rezonansu liniowego wywiera wpływ poza wielkością $\omega_{0,1}$ generatora czy wielkości a obwodu, jeszcze parametr wspólny wielkościom p_k, q_k, więc q w przypadku równania Mathieu, $\delta_{0,1}$ w przypadku równania Weiganda I i h^2/λ^2 w przypadku równania Weiganda II. Stąd wynika, że krzywa rezonansu liniowego ulega zniekształceniu, jeżeli rezonans ten występuje w układzie parametrycznym.

4.4. Wyliczenie amplitud $A_{i,1,c}$, $A_{i,1,s}$ dla i=1,0,1

Ograniczając się do amplitud podanych w tytule, możemy podać dla nich rozwiązanie równania (11) w postaci

$$A_{i,1,c} = L_{i,c}/M \qquad i=-1,0,1 \tag{15}$$

$$A_{i,1,s} = L_{i,s}/M$$

przy czym

$$M = (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2)(\lambda_{0,1}^2 + \nu_{0,1}^2)(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2) -$$

$$- p_o q_1(\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2)(\lambda_{0,1}\,\lambda_{1,1} - \nu_{0,1}\,\nu_{1,1} -$$

$$- \nu_{0,1}\,\nu_{1,1} + \lambda_{0,1}\,\lambda_{1,1}) -$$

$$- 2q_o p_{-1}(\lambda_{-1,1}\lambda_{0,1} - \nu_{0,1}\nu_{-1,1})(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2) +$$

$$+ p_o^2 q_1^2 (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2) - q_o q_1 p_o p_{-1} (-2\nu_{-1,1}\nu_{1,1} -$$

$$- 2\lambda_{-1,1}\lambda_{1,1}) + q_o^2 p_{-1}^2 (\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2) \qquad (16)$$

$$L_{-1,c} = B_{1,c}\Big\{-q_o(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2)(-\nu_{-1,1}\nu_{0,1} +$$

$$+ \lambda_{0,1}\lambda_{-1,1}) + q_o p_o q_1 (\lambda_{-1,1}\lambda_{1,1} + \nu_{-1,1}\nu_{1,1}) +$$

$$+ q_o^2 p_{-1}(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,2}^2)\Big\} - B_{1,s}\Big\{- q_o(-\nu_{-1,1}\lambda_{0,1} -$$

$$- \lambda_{-1,1}\nu_{0,1})(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2) + q_o p_o q_1 \cdot (-\nu_{-1,1}\lambda_{1,1} +$$

$$+ \lambda_{-1,1}\nu_{1,1})\Big\} \qquad (17)$$

$$L_{-1,s} = -B_{1,c}\cdot\Big\{(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2)(-\lambda_{-1,1}\nu_{0,1} - \nu_{-1,1}\lambda_{0,1}) q_o$$

$$+ q_o p_o q_1 (\nu_{-1,1}\lambda_{1,1} - \lambda_{-1,1}\nu_{1,1})\Big\} + B_{1,s}\Big\{(\lambda_{1,1}^2 +$$

$$+ \nu_{1,1}^2) \cdot (-\lambda_{-1,1}\lambda_{0,1} + \nu_{-1,1}\nu_{0,1}) q_o + p_o q_o q_1 \cdot$$

$$(\lambda_{-1,1}\lambda_{1,1} + \nu_{-1,1}\nu_{1,1}) + q_o^2 p_{-1} (\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2)\Big\} \qquad (18)$$

$$
\begin{aligned}
L_{0,c} = B_{1,c} \Big\{ & (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2)(\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2)\, \lambda_{0,1} - \\
& - q_1\, p_o\, \lambda_{1,1} \cdot (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2) - q_o\, p_{-1}\, \lambda_{-1,1} (\lambda_{1,1}^2 + \\
& + \nu_{1,1}^2) \Big\} - B_{1,s} \Big\{ -(\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2) \cdot \nu_{0,1} (\nu_{1,1}^2 + \\
& + \lambda_{1,1}^2) - q_1\, p_o\, \nu_{1,1} (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2)\; q_o\, p_{-1} (\lambda_{1,1}^2 + \\
& + \nu_{1,1}^2)\, \nu_{-1,1} \Big\}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{0,s} = -B_{1,c} \Big\{ & \nu_{0,1} (\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2)(\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2) + \\
& + q_1\, p_o\, (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2)\, \nu_{1,1} + q_o\, p_{-1} (\lambda_{1,2}^2 + \nu_{1,1}^2) \cdot \\
& \cdot \nu_{-1,1} \Big\} + B_{1,s} \Big\{ (\lambda_{-1,1}^2 + \nu_{-1,1}^2) \cdot \lambda_{0,1} (\lambda_{1,1}^2 + \nu_{1,1}^2) + \\
& + q_1\, p_o\, \lambda_{1,1} (- \nu_{-1,1}^2 - \lambda_{-1,1}^2) - q_o\, p_{-1} \cdot \lambda_{-1,1} (\lambda_{1,1}^2 + \\
& + \nu_{1,1}^2) \Big\}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$\begin{aligned} L_{1,c} = B_{1,c} \Big\{ & -(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2})(-\nu_{0,1}\,\nu_{1,1} + \lambda_{0,1}\,\lambda_{1,1})p_{o} + \\ & + p_{o}^{2}\,q_{1}(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2}) + q_{o}\,p_{o}\,p_{-1}\,(\lambda_{-1,1}\cdot\lambda_{1,1} + \\ & + \nu_{-1,1}\,\nu_{1,1})\Big\} - B_{1,s}\Big\{(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2})(\lambda_{0,1}\,\nu_{1,1} + \\ & + \nu_{0,1}\,\lambda_{1,1})\,p_{o} + q_{o}\,p_{o}\,p_{-1}\,(-\nu_{-1,1}\,\lambda_{1,1} + \nu_{1,1}\,\lambda_{-1,1})\Big\} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} L_{1,s} = -B_{1,c} \Big\{ & (\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2})(-\nu_{0,1}\,\lambda_{1,1} - \lambda_{0,1}\,\nu_{1,1})p_{o} + \\ & + q_{o}\,p_{o}\,p_{-1}\,(\lambda_{-1,1}\,\nu_{1,1} - \nu_{-1,1}\,\lambda_{1,1})\Big\} + B_{1,s}\Big\{(\lambda_{-1,1}^{2} + \\ & + \nu_{-1,1}^{2})(-\lambda_{0,1}\,\lambda_{1,1} + \nu_{0,1}\,\nu_{1,1})\,p_{o} + p_{o}^{2}\,q_{1}\,(\lambda_{-1,1}^{2} + \\ & + \nu_{-1,1}^{2}) - p_{o}\,q_{o}\,p_{-1}(-\nu_{-1,1}\,\nu_{1,1} - \lambda_{-1,1}\,\lambda_{1,1})\Big\} \end{aligned} \tag{22}$$

Posługując się wyrażeniami (16)-(22) możemy wyznaczyć

$$L_{i} = \sqrt{L_{i,c}^{2} + L_{i,s}^{2}} \tag{23}$$

$$\operatorname{tg}\psi_{i} = L_{i,s}/L_{i,c} \tag{24}$$

4.5. Dyskusja otrzymanych wyrażeń

Z postaci wyrażeń (17)-(22) wynika, że wyrażenia (23) na L_i są proporcjonalne do amplitudy B_1 czynnika wzbudzającego oscylacje w układzie.

W przypadku równania 4) jest

$$\psi_{k,l} = \varphi_{k,l} \tag{25}$$

w przypadku równania 1) i 3) jest spełniona zależność

$$\psi_{kl} = \varphi_{k,l} - \chi_{k,l} \tag{26}$$

przy czym

$$\operatorname{tg} \chi_{-1,1} = \Big[-(-\nu_{-1,1}\,\lambda_{0,1} - \lambda_{-1,1}\,\nu_{0,1})(\lambda_{1,1}^{2} + \nu_{1,1}^{2}) + q_0\,q_1\,(-\nu_{-1,1}\,\lambda_{1,1} + \lambda_{-1,1}\,\nu_{1,1})\Big] \Big/ \Big[-(\lambda_{1,1}^{2} + \nu_{1,1}^{2})(-\nu_{1,1}\,\nu_{0,1} + \lambda_{0,1}\,\lambda_{-1,1}) + q_0\,q_1\,(\lambda_{-1,1}\,\lambda_{1,1} + \nu_{-1,1}\,\nu_{1,1}) + q_0\,q_1\,(\lambda_{1,1}^{2} + \nu_{1,1}^{2})\Big] \tag{27}$$

$$\operatorname{tg}\chi_{0,1} = \Big[-(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2})\,\nu_{0,1}(\lambda_{1,1}^{2} + \nu_{1,1}^{2}) -$$

$$- q_o q_1 \nu_{1,1}(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2}) - q_o q_1 \nu_{-1,1}(\lambda_{1,1}^{2} +$$

$$+ \nu_{1,1}^{2})\Big] \Big/ \Big[(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2})(\lambda_{1,1}^{2} + \nu_{1,1}^{2})\,\lambda_{0,1} -$$

$$+ q_o q_1 \lambda_{1,1}(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2}) - q_o q_1 \lambda_{-1,1}(\lambda_{1,1}^{2} + \nu_{1,1}^{2})\Big] \tag{28}$$

$$\operatorname{tg}\chi_{1,1} = \Big[(\lambda_{-1,1}^{2} + \nu_{-1,1}^{2})(\lambda_{0,1}\nu_{1,1} + \nu_{0,1}\lambda_{1,1}) +$$

$$+ q_o q_1 (-\nu_{-1,1}\lambda_{1,1} + \nu_{1,1}\lambda_{-1,1})\Big] \Big/ \Big[-(\lambda_{-1,1}^{2} +$$

$$+ \nu_{-1,1}^{2})(-\nu_{0,1}\nu_{1,1} + \lambda_{0,1}\lambda_{1,1}) + q_o q_1 (\lambda_{-1,1}^{2} +$$

$$+ \nu_{-1,1}^{2}) + q_o q_1 (\lambda_{-1,1}\lambda_{1,1} + \nu_{-1,1}\nu_{1,1})\Big] \tag{29}$$

Z postaci otrzymanych wyrażeń widać, jak zmieniłyby się one, gdyby w szeregu Fouriera (3) uwzględnić większą ilość składników. Można powiedzieć ogólnie, że L_i^2 z równania (23) oraz tg ψ_i z równania (24) są funkcjami wymiernymi całkowitymi parametru charakterystycznego dla danego układu parametrycznego, wspólnego parametrom p_k, q_k. W wyrażeniach odnoszących się do rezonansu liniowego występują tylko parzyste potęgi charakterystycznego parametru. Wyrażenia amplitud odnoszących się do rezonansów parametrycznych są proporcjonalne do tego parametru.

4.6. Przekształcenie wyrażeń (23) i (24) odnoszących się do rezonansu liniowego w celu wykazania różnic występujących w układzie liniowym i parametrycznym

Wyrażenia L_1^2 oraz $\operatorname{tg}\psi$ z równań (23) i (24) są typu $F(x) =$

$$= (c_{1,0} + c_{1,1}\,x + c_{1,2}\,x^2 + \ldots)/(c_{0,0} + c_{0,1}\,x + c_{0,2}x^2 + \ldots) \tag{30}$$

Stąd otrzymujemy wyrażenia odpowiadające układowi liniowemu, zakładając $x = 0$.

W celu podkreślenia wyraźnego wpływu parametru x na krzywą rezonansu i krzywą zmienności kąta fazy, można dokonać przybliżonego dzielenia wielomianów urywając na potęgach parametru charakterystycznego, które można pominąć ze względu na ich małość.

Inna metoda polega na zastosowaniu ułamków łańcuchowych. W [1] podano algorytm, pozwalający zamienić wyrażenie typu (30) na ułamek łańcuchowy postaci

$$F(x) = c_{1,0}/\left\langle c_{0,0} + c_{2,0}\,x/\left\{c_{1,0} + c_{3,0}\,x/\left[c_{2,0} + \ldots\right]\right\}\right\rangle \tag{31}$$

W wyrażeniu tym stosunek $c_{1,0}/c_{0,0}$ przedstawia wartość odnoszącą się do układu liniowego. Wpływ układu parametrycznego figuruje w mianowniku w postaci ułamka

$$c_{2,0}\,x/\left\{c_{1,0} + c_{3,0}\,x/\left[c_{2,0} + \ldots\right]\right\} \tag{32}$$

Na podstawie powyższego przedstawienia wynika, że w układzie parametrycznym przebieg krzywej rezonansu liniowego i przebieg kąta fazy są inne niż w układzie liniowym oraz na czym polega odstępstwo.

4.7. Uogólnienie rozważania na macierze nie diagonalizowane

W przypadku, gdy równanie (2) posiada macierze nie diagonalizowane, możemy rozwiązanie problemu sprowadzić również do rozwiązania równania (11), przy czym w macierzy (13) należy dokonać następujących zmian: Wielkości napisane u góry oznaczają wektory-wiersze, przestawione wektorów-kolumn, występujących w równaniu (9). Zmienia się również znaczenie elementów macierzy, mianowicie skalarne elementy a,q,b itd. zastępujemy kwadratowymi macierzami (a, (q), (b) itd. Wektor-kolumna (B) równania (11) jest zbudowany z odpowiednio nad sobą ustawionych elementów wektorów-kolumn równania (2). Wektor-kolumna (A) zbudowany jest analogicznie z elementów wektorów-kolumn rozwiązania (9).

Ze względu na podobne własności macierzy (13) i zbudowanej według ostatnich uwag, możemy zastosować i w tym przypadku do rozwiązania równania (11) metodę podobną jak w przypadku zastosowania macierzy (13).

4.8. Uogólnienie metody na układy wieloperiodyczne

Z jeszcze większym nakładem pracy daje się rozwiązać równanie macierzowe o następującej postaci

$$\left[d^2/dt^2 + b\, d/dt + (a + 2 \sum_{i=1}^{r} q_i \cos (\omega_{i,0} t + \chi_{i,0})\right] y =$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos (\omega_{0,m} t + \varphi_{0,m}) \qquad (33)$$

przy czym (a), (b), (q_i) macierze kwadratowe n rzędu, r liczba skończona. Możemy je rozłożyć na r problemów typu rozpatrywanego wyżej. Problemy te można zresztą ująć we wspólne równanie macierzowe typu (11). Ze względu na występowanie tu faz początkowych $\chi_{i,0}$ ulegają pewnym zmianom poprzednio podane macierze, wyprowadzone pod założeniem, że $\chi_{i,0} = 0$.

4.9. Uwaga dotycząca równania Meissnera

Ze względu na nieco odmienny charakter i sposób rozwiązania równania przypadku 2), rozpatrzono ten przypadek oddzielnie w innym miejscu.

LITERATURA

[1] Demidowicz B.P., Maron J.A.: Osnowy wyczislitelnoj matematyki, Gos.Izd.F.M.Lit. Moskwa, 1960.

[2] Lachlan Mc.: Theory and applications of Mathieu functions 1947.

[3] Szpilecki J.: Rezonanse autoparametryczne w układach o n stopniach swobody, Spraw. Zebr. Nauk. Oddz. Gliw. PTMTS, zesz. 8, 1962, 37.

Rękopis złożono w Redakcji 5 stycznia 1964 r.

ВНЕШНИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ВОЗБУЖДЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМАХ ИМЕЮЩИХ n СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Р е з ю м е

В работе дано решение трех родов матричных дифференциальных обыкновенных уравнений типа (2) с условием (8), вопрос о которых диагонализации и диаграммы устойчивости рассмотрены были в (3), где эти уравнения сведены к диагональной форме. Коэффициенты решения в виде рядов Фурье (9) могут быть получены с уравнения (II) с матрицей коэффициентов (13)

Эти уравнения решены при соблюдении линейного и суммарного и разничного параметрического резонанса. Получены формулы показывают влияние характеристического для данной системы параметра на форму кривой линейного резонанса и на его фазовую характеристику.

Использованный метод обобщен тоже на уравнения не диагонализированные и многопериодические.

EXTERNALLY EXCITED PARAMETRIC RESONANCES IN SYSTEMS OF N DEGREES OF FREEDOM

S u m m a r y

In the paper is the solution given for three diagonalised ordinary matrix differential equations of the type (2) with condition (8), whose diagonalisation and stability problem is in [3] discussed. The coefficients of the Fourier series solution (9) can be computed from the equation (11) with coefficient matrix (13). The solution in given for the linear and sum and difference parametric resonances. From the received formulas it is seen the influence of characteristic for a given system parameter on the shape of the resonance curve and the course of the phase curve.

Finally is the method used for the non diagonalised and multiperiodic equations.