ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 6 Nr kol. 126

JÓZEF SZPILECKI

OSCYLACJE RELAKSACYJNE W UKŁADACH LINIOWYCH OPISANYCH PRZEZ PARAMETRY, KRÓRE SĄ WIELKOŚCIAMI STOCHASTYCZNYMI

Streszczenie. W pracy sformułowano zagadnienie wymiany ciepła w układzie n ciał oraz z otoczeniem według liniowych praw z uwzględniemiem charakteru stochastycznego współczynników wymiany, gdy jedno z ciał posiada źródło ciepła w określonych chwilach załączane lub wyłączane. Metodą macierzową otrzymano rozwiązanie problemu. Rozwiązanie zastosowano do wyznaczenia "stanu ustalonego" oscylacji temperatur, obliczonego w tym przypadku formalnie tak samo jak w przypadku [3, 4] bez uwzględnienia składowej stochastycznej.

1. WSTĘP

W pracy [3] autora były rozpatrywane oscylacje temperaturowe w układzie złożonym z n ciał, z których jedno posiada źródło ciepła, w określonych chwilach załączane lub wyłączane (np. przy pomocy termometru kontaktowego). Jako pierwsze przybliżenie przyjęto, że proces wymiany ciepła odbywa się według liniowych praw. W rzeczywistości, szczególnie proces konwekcji, posiadający dla wymiany ciepła zasadnicze znaczenie, jest procesem skomplikowanym. Podobnie jak w hydro i aeromechanice możemy go traktować jako proces o charakterze stochastycznym.

W pracy niniejszej uogólniono równania problemu [3], przyjmując parametry charakteryzujące wymianę ciepła w postaci sumy dwu składowych: składowej deterministycznej i składowej stochastycznej i doprowadzono je następnie do postaci podobnej w pracy [3], wskutek czego można stosować formalnie ten sam sposób sformułowania i rozwiązanie problemu "stanu ustalonego" oscylacji jak w pracy [3]. Stan ustalony, ściśle rzecz biorąc nie istnieje ze względu na stochastyczny charakter procesów przebiegających w rozpatrywanym układzie. Nazwę zatrzymano dlatego, że metoda rozwiązania problemu jest formalnie taka sama jak w pracy [3].

Zagadnienie rozwiązano posługując się rachunkiem macierzowym.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Korzystając z zasady zachowania energii i organiczając się do liniowego przybliżenia opisu procesu wymiany ciepła, otrzymuje się układ równań, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$d\,\vartheta/dt + A(t)\,\vartheta = f(t) \tag{1}$$

gdzie:

ϑ - wektor-kolumna o elementach ϑ_i, gdzie ϑ_i temperatura i-tego ciała, $i = 1,\dots,n$,

$A(t) = (a_{ik}(t))$ - kwadratowa macierz n-go rzędu współczynników równania.

Podobnie jak w pracy [3] założono, że elementy diagonalne są równe sumie elementów danego wiersza, wziętych ze znakiem przeciwnym, plus element $a_{i,o}(t)$ charakteryzujący wymianę z otoczeniem.

f(t) wektor-kolumna o elementach

$$\nu_i + a_{i,o}(t)\ \vartheta_o,\ i=1,\ldots n$$

gdzie:

ν_i - moc i-tego źródła ciepła (dla prostoty przyjęto, że jest tylko różne od zera ν_1, pozostałe zaś ν_i = =0, i=2,...n,

ϑ_o - oznacza temperaturę otoczenia.

Warunki początkowe problemu przyjęto w postaci wektora, kolumny o elementach ϑ_o.

O elementach macierzy A(t) założono, że dadzą się one przedstawić w postaci sumy

$$a_{i,k}(t) = a_{i,k,1} + a_{i,k,2}(t),\ i=1,\ldots n,\ k=0,\ldots n \qquad (2)$$

gdzie:

$a_{i,k,1}$ - element stały rzeczywisty ujemny dla i = k, dodatni dla i=k, macierz $(a_{i,k,1})$ posiada pojedyncze elementarne dzielniki λ_i rzeczywiste ujemne.

Aby wykonywane dalej na funkcjach stochastycznych o wartości średniej równej zeru $a_{i,k,2}(t)$ działania były wykonalne, zakładamy o nich, że są ograniczone w rozpatrywanym przedziale ciągłe i całkowalne po Riemanowsku w sensie średniej kwadratowej [1].

Wektorowa funkcja $f(t)$ posiada również charakter stochastyczny, ze względu na występowanie w jej elementach wyrażenia $a_{i,o}(t)$, może więc być przedstawiona w postaci sumy dwu składowych

$$f(t) = f_1 + f_2(t) \tag{3}$$

gdzie:

f_1 - wektor-kolumna przedstawiająca składową deterministyczną,

$f_2(t)$ - wektor-kolumna, przedstawiającą składową stochastyczną.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Rozwiązanie problemu przyjmujemy w postaci

$$\vartheta(t) = \vartheta_1(t) + \vartheta_2(t) \tag{4}$$

gdzie:

$\vartheta_1(t)$ - wektor-kolumna zbudowana z elementów będących składowymi deterministycznymi rozwiązania,

$\vartheta_2(t)$ - wektor-kolumna o elementach będących składowymi stochastycznymi rozwiązań.

Ze względu na liniowość równania (1) można je zastąpić przez następujący układ

$$d\,\vartheta_1(t)/dt + A_1\,\vartheta_1(t) = f_1 \tag{5}$$

$$d\,\vartheta_2(t)/dt + A(t)\,\vartheta_2(t) = f_2(t) - A_2(t)\,\vartheta_1(t) \tag{6}$$

gdzie:

$A_1, A_2(t)$ macierze n rzędu zbudowane odpowiednio z elementów $a_{i,k,1}$ i $a_{i,k,2}(t)$.

4. ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ (5), (6)

Rozwiązując równanie (5) przy pomocy transformacji Laplace'a [2] i oznaczając parametr transformacji ze względu na czas t przez s, otrzymujemy

$$\vartheta_1(t) = \sum_{k=1}^{n} A_1'(s_k)\, e^{s_k t}\,(f_1/s_k + \vartheta_0) \Big/ \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}{}' (s_k - s_i) + A_1'(0)\, f_1 \Big/ \prod_{i=1}^{n} (-s_i) \tag{7}$$

gdzie:

$A_1'(s)$ - macierz, utworzona z algebraicznych dopełnień elementów macierzy $(s\,E + A_1)$,

E - macierz jednostkowa n rzędu,

s_k - charakterystyczne wartości macierzy A_1.

Stosując podobnie transformację Laplace'a do równania (6), otrzymujemy rozwiązanie w następującej postaci

$$\vartheta_2(t) = \sum_{k=1}^{n} A_1'(s_k)\, e^{s_k t}\, \vartheta_0 \Big/ \prod_{i=1}^{n}{}' (s_k - s_i) + \int_0^t \Bigg[\sum_{k=1}^{n} A_1'(s_k) \cdot$$

$$\cdot\, e^{s_k(t-\tau)} \Big/ \prod_{i=1}^{n}{}' (s_k - s_i)\Bigg]\Bigg[f_2(\tau) - A_2(\tau)\Bigg\{\sum_{k=1}^{n} A_1'(s_k) \cdot$$

$$\cdot\, e^{s_k \tau}\,(f_1/s_k + \vartheta_0) \Big/ \prod_{i=1}^{n}{}' (s_k - s_i) + A_1'(0)\, f_1 \Big/$$

$$\Big/ \prod_{i=1}^{n}{}' (-s_i)\Bigg\}\, d\tau - \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \Bigg[A_1'(s_k)\, e^{s_k(t-\tau)} \Big/$$

$$\Big/ \prod_{i=1}^{n}{}' (s_k - s_i)\Bigg] \cdot A_2(\tau)\, \vartheta_2(\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

Jest to równanie całkowe na wyznaczenie funkcji $\vartheta_2(t)$. Z postaci tego równania wynika, że pierwszy wyraz jest deterministyczny, drugi zaś i trzeci stochastyczny. Równanie (8) na wyznaczenie funkcji $\vartheta_2(t)$ rozwiązuje się metodą interacji. Jako pierwsze przybliżenie można przyjąć wartość $\vartheta_{2,0}(t)$ pow stałą gdy w prawej stronie równania (8) pominiemy ostatnie wyrażenie. Jako następne przybliżenie przyjmuje się

$$\vartheta_{2,1}(t) = \vartheta_{2,0}(t) - \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \left[A_1'(s_k)\, e^{s_k(t-\tau)} \Big/ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}{}' (s_k - s_i) \right] \cdot$$

$$\cdot\, A_2(\tau)\, \vartheta_{2,0}(\tau)\, d\tau \tag{9}$$

i tak dalej. Zbieżność otrzymanego ciągu iteracji można udowodnić podobnie jak zbieżność matrycantu w [2].
Rozwiązanie można przekształcić wyłączając przed znak całki czynnik $e^{s_k t}$ wskutek czego funkcję $\vartheta(t)$ określoną przez równanie (4) można napisać w postaci

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[B_{k,1} + B_{k,2}(t) \right] e^{s_k t} + \theta_1 \tag{10}$$

przy czym wektory kolumny współczynników $B_{k,1}$, Θ są określone deterministycznie, wektory kolumny $B_{k,2}(t)$ stochastycznie.
Jeżeli oznaczymy

$$e^{s_k t} = \zeta_k \quad . \tag{11}$$

wtedy równanie (9) możemy uważać za równanie transformacyjne między dwoma układami współrzędnych: układem współrzędnych prostokątnych Kartezjusza ζ_k, które są wielkościami deterministycznymi oraz układem współrzędnych $\vartheta_k - \theta_k$ odpowiadających poszczególnym elementom macierzy $\vartheta(t) - \theta$. Transformacja ta jest na ogół affiniczna, więc układ osi współrzędnych $\vartheta_k - \theta_k$ jest na ogół skośnokątny i poza tym występują liniowe odkształcenia w kierunku poszczególnych osi. Obie cechy są na ogół stochastycznie zmienne z czasem, ponieważ współczynniki równania (9) są stochastycznie zmienne z czasem.

Poza tymi cechami odróżniającymi te równania od równań rozpatrywanych w pracy [3], postępowanie zmierzające do wyznaczenia "stanu ustalonego" możemy zasadniczo prowadzić analogicznie, gdyż jest ono prowadzone w przestrzeni deterministycznej ζ_k.

5. ZAGADNIENIE "STANU USTALONEGO" W PRZESTRZENI KONFIGURACYJNEJ ζ_k

Zagadnienie to można rozpatrywać podobnie jak w pracy [3,4]. Należy znaleźć wspólne punkty ζ_i^*, ζ_i^{**} następujących dwu krzywych w przestrzeni n wymiarowej

$$(1 - \zeta_i^*)/(1 - \zeta_i^{**}) = ((1 - \zeta_1^*)/(1 - \zeta_1^{**}))^{\varkappa_i} \tag{12}$$

$$\zeta_i^*/\zeta_i^{**} = (\zeta_1^*/\zeta_1^{**})^{\varkappa_i}$$

$$\varkappa_i = \frac{s_i}{s_1}$$

z warunkami, by punkty te leżały na hiperpłaszczyznach

$$\vartheta_{n,1} - \theta_n = \sum_{k=1}^{n} (B_{k,1,n} + B_{k,2,n}(t))(1 - \zeta_k^*) \tag{13}$$

$$\vartheta_{n,1} + \Delta\vartheta - \theta_n = \sum_{k=1}^{n} (B_{k,1,n} + B_{k,2,n}(t))\ \zeta_k^{**}$$

gdzie średnie wartości $\vartheta_{n,1}$ i $\Delta\vartheta$ są z góry zadane.

Obierając jedną z metod rozwiązania problemu, podanych w pracach [3, 4] można zasadniczo otrzymać rozwiązanie tego samego rodzaju. Różnica polega na tym, że równania hiperpłaszczyzn (12) mają współczynniki stochastycznie zmienne. Powoduje to, że punkty wspólne ζ_i^*, ζ_i^{**} ustalające krzywe "stanu ustalonego" i okres "stanu ustalonego" są stochastycznie zmienne.

LITERATURA

[1] Blanc-Lapierre A., Fortet R.: Théorie des fonctions aléatoires, Masson & Cie, Paris 1953.

[2] Bułhakow B.W.: Kolebania, Gos.Izd.T.T. Lit. Moskwa 1954.

[3] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr. dokt. Wydz. Mechan.-Energet. Politechniki Śląskiej 1959 r.

[4] Szpilecki J.: Projektowanie układów aperiodycznie statecznych, Zeszyty Nauk. Politechniki Śląskiej, Energetyka Nr 11, 1963 r. s.9.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ПАРАМЕТРОВ, КОТОРЫЕ ЯВЛЯЮТСЯ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Р е з ю м е

В работе автора [3] рассматриваются температурные осцилляции в системе n тел, из которых одно снабжено источником теплоты, включаемым или выключаемым в определенных моментах времени (например, при помощи контактного термометра). В первом приближении принято, что теплообмен подчинен линейным законам. В действительности теплообмен это сложный аэро- или гидродинамический процесс случайного типа. Регулирующая аппаратура тоже работает по случайным законам.

Поэтому в работе обобщены уравнения работы [3], предполагая, что параметры определяющие поведение системы имеют два компонента: детерминистический и случайный.

При помощи матричного исчисления решена задача разделения уравнений, определяющих эти компоненты при предположениях о характеристических числах матриц как в [3]. Существует возможность получить и решить формально подобным методом как в [3] уравнения "установившегося состояния" осцилляций. Это название использовано в работе, чтобы подчеркнуть формальное подобие методов.

RELAXATION OSCILLATIONS IN LINEAR SYSTEMS DESCRIBED BY MEANS OF PARAMETERS WHICH ARE RANDOM FUNCTIONS OF TIME

S u m m a r y

In the authors paper [3] were discussed temperature oscillations in a system composed of n bodies, one of which is provided with a heat source, put on or out at certain intervals of time (for example with the help of a contact thermometer).

As first it was approximately assumed that heat exchange processes are following linear laws. In reality the process of convection, which is of first importance in heat exchange, is a stochastic process. The operation of controling apparatus is also of random character.

In the paper the problem of [3] is generalised by the assumption that the parameters, describing this system, are composed of two components: one of determinate character, the other of random function character, borned, continuous and integrable in the av. s qu. sense, with zero average value.

By means of matri x calculus, it has been demonstrated, that it is possible to separate the two components of the process and to reduce the problem of a "steady state" determination to the problem of [3]. The name "steady state" is used here in spite of the similarity of the formulation and solution of the problem.