ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 9 Nr kol. 146

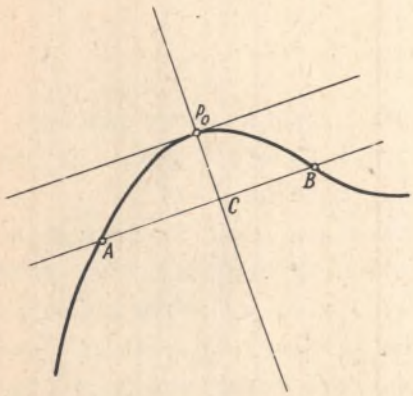
JULIAN MARSZAŁ, WŁADYSŁAW MORYTKO

PEWNE UWAGI O DEFINICJI KRZYWIZNY KRZYWEJ PŁASKIEJ

§ 1. Z elementarnego kursu geometrii różniczkowej wiadomo, że do definicji krzywizny krzywej w punkcie wystarcza, by ta krzywa miała w tym punkcie drugą pochodną ciągą [1].
Były różne próby osłabienia tego założenia przez podawanie innych definicji [2]. Np. można określić krzywiznę krzywej przy założeniu, że istnieje tylko styczna do niej w danym punkcie. Dla spełnienia tego warunku wystarcza istnienie pierwszej pochodnej różnej od zera w tym punkcie. Jest oczywiste, że w sensie takiej definicji może istnieć krzywizna krzywej nawet w takich punktach, w których w klasycznej definicji nie istniała. W artykule tym podamy inną definicję krzywizny dla krzywej w punkcie, w którym istnieje tylko styczna do tej krzywej. Podamy następnie dowód na to, że definicja przez nas podana pokrywa się z definicją klasyczną, gdy krzywa jest w punkcie dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły. Na koniec podamy przykład obliczenia krzywizny w sensie przyjętej przez nas definicji dla krzywej w takim jej punkcie, w którym nie istnieje druga pochodna.

§ 2. Niech będzie dana krzywa K mająca styczną w punkcie P_0 (rys. 1) Załóżmy, że krzywa ta spełnia następujący warunek W: istnieje takie otoczenie U punktu P_0, w którym krzywa K nie pokrywa się ze styczną na żadnym odcinku zawierającym punkt P_0. Poprowadźmy w tym punkcie styczną i normalną do krzywej. Jeżeli punkt P_0 jest punktem wypukłości krzywej, wówczas w pewnym otoczeniu tego punktu krzywa leży po jednej stronie stycznej. Obierzmy na normalnej punkt C, po tej stronie stycznej, po której leży krzywa, o tej własności, żeby prosta równoległa do stycznej i przechodząca przez punkt C przecina-

ła krzywą w punktach A i B. Istnienie punktu C możemy np. pokazać w następujący sposób: W otoczeniu U istnieją na krzywej punkty P_1 i P_2, nie leżące na stycznej, takie, że jeden z nich poprzedza a drugi następuje po punkcie P_0. Odległość jednego z nich, np. punktu P_1 od stycznej jest nie większa od odległości drugiego. Równoległa do stycznej przechodząca przez punkt P_1 przecina normalną w punkcie C i krzywą w punkcie P_3, leżącym między P_2 i P_0. Oznaczamy zatem $P_1 = A$ i $P_3 = B$. Gdyby punktów przecięcia prostej z krzywą było więcej, wówczas za A i B przyjmujemy punkty najbliższe normalnej. Oznaczmy dalej przez S pole ograniczone łukiem krzywej i odcinkiem AB, zaś długość odcinka AB przez a. Przyjmujemy następującą definicję:



Rys. 1

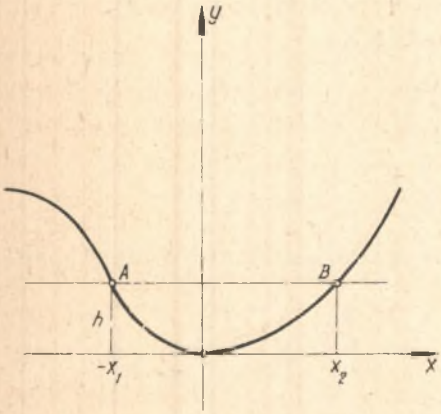
<u>Definicja</u>: Krzywizną k krzywej K w punkcie P_0 nazywamy granicę wyrażenia $\frac{12S}{a^3}$, gdy długość odcinka P_0C dąży do zera co zapisujemy: $k = \frac{I}{\varrho} = 12 \lim_{P_0C \to 0} \frac{S}{a^3}$.

Uwaga. Łatwo widzieć, że każdy punkt leżący na odcinku P_0C ma własność punktu C, dlatego można rozpatrywać granicę przy $C \to P_0$.

§ 3. Wykażemy teraz, że powyższa definicja pokrywa się z definicją klasyczną dla krzywej będącej klasy C^2. Niech będzie dana krzywa K o równaniu $r = r(t)$ klasy C^2, taka, że $r't \neq 0$ i spełniająca warunek W w punkcie P_0. Obliczymy jej krzywiznę w punkcie P_0, w sensie przyjętej przez nas definicji. Umieśćmy tę krzywą tak, żeby punkt P_0 pokrywał się z początkiem układu współrzędnych, zaś styczna do niej w tym punkcie niech pokrywa się z osią x. Skierujmy oś y w tę stronę, po której leży krzywa (rys. 2). W pewnym otoczeniu punktu P_0 krzywą można przedstawić równaniem $y = f(x)$. Z założenia wynika, że

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ i niech ponadto } f''(0) > 0 \qquad (1)$$

Druga pochodna $f''(x)$ nie może być identycznie równa zero, ponieważ zachodzi warunek W. Na normalnej, czyli na osi y obierzmy punkt C, którego rzędną oznaczmy przez h i poprowadźmy cięciwę równoległą do stycznej. Odcięte punktów A i B oznaczmy odpowiednio przez $-x_1$ i x_2. Obliczmy pole ograniczone krzywą i cięciwą:



Rys. 2

$$S = (x_1+x_2).h - \int_{-x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad (2)$$

Po rozwinięciu funkcji $f(x)$ według wzrou Maclaurina dla $n = 2$ z resztą Peano mamy uwzględniając (1):

$$f(x) = \frac{1}{2!} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{2!} \varepsilon(x) \,.\, x^2 \qquad (3)$$

przy czym $\varepsilon(x) \to 0$ dla $x \to 0$.
Podstawiając (3) w (2) mamy:

$$S = (x_1 + x_2).h - \frac{1}{2!} f''(0) \int_{-x_1}^{x_2} x^2 dx - \frac{1}{2!} \int_{-x_1}^{x_2} \varepsilon(x) x^2 dx \qquad (4)$$

Z definicji krzywizny obliczamy k uwzględniając (4):

$$k = 12 \lim_{h \to 0} \frac{(x_1+x_2).h - \frac{1}{6} f''(0)(x_1^3 + x_2^3) - \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon(x) x^2 \, dx}{(x_1 + x_2)^3} =$$

$$= 12 \lim_{h \to 0} \left[\frac{h - \frac{1}{6} f''(0)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{(x_1+x_2)^2} \right] = 6 \lim_{h \to 0} \frac{\int_{-x_1}^{x_2} \varepsilon(x) x^2 dx}{(x_1 + x_2)^3} \qquad (5)$$

Uwzględniając (3) dla x_1 i x_2 mamy:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2h}{f''(0)+\varepsilon(x_1)}}, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{2h}{f''(0)+\varepsilon(x_2)}} \tag{6}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym w (5) po podstawieniu (6) przy $h \to 0$ zmierza do $\frac{1}{12} f''(0)$, zaś wyrażenie

$$\frac{\int_{-x_1}^{x_2} \varepsilon(x)\, x^2 dx}{(x_1 + x_2)^3}$$

zmierza do zera, gdyż zgodnie z określeniem $\varepsilon(x) < \varepsilon$ jeżeli tylko $|x| < \delta$ gdzie δ = maks. (x_1, x_2).

Więc $\left|\int_{-x_1}^{x_2} \varepsilon(x) x^2 dx\right| \leq \int_{-x_1}^{x_2} |\varepsilon(x)| . x^2 dx < \varepsilon \int_{-x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{1}{3}\varepsilon . (x_1^3 + x_2^3)$

Mamy zatem $\int_{-x_1}^{x_2} \frac{(x).x^2 dx}{(x_1+x_2)^3} < \frac{1}{3}\varepsilon . \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 + x_2)^3}$ bowiem z (6) wynika, że $\frac{x_1}{x_2} \to 1$ przy $h \to 0$. Obliczyliśmy zatem, że $k = f''(0)$, co oczywiście daje nam wzór na krzywiznę w klasycznym przypadku, gdyż $f'(0) = 0$.

§ 4. W poragrafie tym podamy przykład krzywej nie będącej klasy C^2 i obliczymy krzywiznę w takim jej punkcie, w którym istnieje styczna, a nie istnieje druga pochodna.

Rozważmy krzywą K zbudowaną w ten sposób, że dla $x \leq 0$ $y_1 = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, zaś dla $\geq x$ 0 $y_2 = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ i niech np. $r < R$ (rys. 3). Krzywa tak zbudowana nie jest oczywiście klasy C^2, posiada jednak styczną w początku układu. Obliczmy krzywiznę tej krzywej w początku układu w sensie naszej definicji. Powtórzmy jak zwykle w tym przypadku konstrukcje siecznej i zachowajmy oznaczenia z poprzedniego paragrafu. Oznaczmy ponadto:

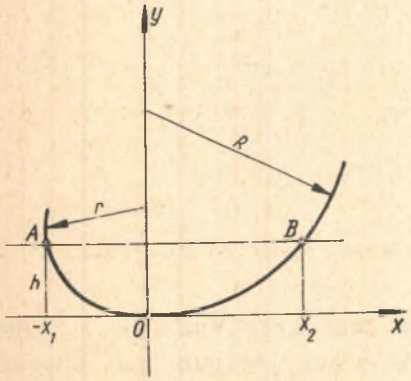
$$y_1 = g_1(x), \qquad y_2 = g_2(x).$$

Mamy zatem

$$g_1(0) = g_2(0) = g_1^{-\prime}(0) = g_2^{+\prime}(0) = 0 \quad \text{i} \quad g_1^{-\prime\prime}(0) > 0 \quad \text{i} \quad g_2^{+\prime\prime}(0) > 0 \tag{7}$$

gdzie znaki "-" i "+" oznaczają odpowiednio lewostronne i prawostronne pochodne. Zgodnie z definicją będzie:

$$k = 12 \lim_{h \to 0} \frac{(x_1 + x_2)h - \int_{-x_1}^{0} g_1(x)dx - \int_{0}^{x_2} g_2(x)dx}{(x_1 + x_2)^3}$$



Rys. 3

co po wykonaniu analogicznych rachunków jak w § 3 doprowadzi nas do wyniku

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{2}\right)^2} \quad \text{lub} \quad \sqrt{\varrho} = \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{2} \tag{8}$$

Wynik otrzymany w tym paragrafie nasuwa spostrzeżenie, że zamiast łuków okręgów można rozważać dowolne łuki krzywych wypukłych K_1 i K_2 mających wspólną styczną w początku układu i mających drugie pochodne jednostronne w tym punkcie.

Wtedy wzór (8) przyjmie postać:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}}{2}$$

gdzie k_1 i k_2 oznaczają krzywizny jednostronne krzywych K_1 i K_2 w sensie definicji klasycznej.
Tymi uwagami kończymy niniejszą pracę.

LITERATURA

[1] Biernacki M.: Geometria różniczkowa cz. I, PWN 1954 r.

[2] Fudali S.: O krzywiźnie krzywej płaskiej. Prace Mat. III (1954) str. 147-165.

[3] Jarnik V.: O kružnice křiwosti, Časopis pro pěstowani matematiky a fisiky, t. 74(1949).

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИВИЗНЫ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Р е з ю м е

В работе дано определение кривизны кривой плоской в точке, в которой существует только касательная.
Доказано что определение это равносильно определению для кривых класса C^2.
Доказательство проиллюстрировано примером.

EINIGE BEMERKUNGEN ÜBER DIE DEFINITION DER KRÜMMUNG EINER EBENEN KURVE

Z u s s a m m e n f a s s u n g

In dieser Arbeit geben die Autoren die Definition der Krümmung einer ebenen Kurve in einem solchen Punkte in welchen nur die Tangente existiert. Sie beweisen auch, das diese Definition mit der klassischen Definition für eine Kurve der C^2-Klasse uber-einstimmt. Ein Beispiel ilustriert diese Betrachtungen.