ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 9 Nr kol. 146

BOLESŁAW SZAFNICKI

O MOŻLIWOŚCI ROZSZERZENIA RACHUNKU OPERATOROWEGO NA PEWNĄ KLASĘ FUNKCJI ANALITYCZNYCH

Jeśli w klasie C rzeczywistych funkcji ciągłych określić splot dwóch funkcji

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

to klasa C ze względu na to działanie stanowi pierścień bez dzielników zera.
Przytoczoną własność klasy C, która jest podstawą stworzenia rachunku operatorów Mikusińskiego [1], da się wykazać i dla pewnych klas funkcji analitycznych.
Wprowadzimy mianowicie:

<u>Określenie I</u>

Klasą A nazwiemy klasę funkcji analitycznych w kole $|z|<r$, gdzie $r\leqslant\infty$.
Zdefiniujmy dalej splot dwóch funkcji $f(z)$, $g(z)\in A$.

<u>Określenie</u> II

Splotem dwóch funkcji analitycznych $f(z)$, $g(z)\in A$, który oznaczać będziemy $f(z)*g(z)$ nazywamy

$$\int_L f(z-u)g(u)\,du$$

gdzie L - dowolną krzywą regularną łączącą punkt O z punktem z ($|z|<r$) znajdującą się w obszarze Ω , wartości u spełniających:

<u>Warunek</u> I

$$|z-u|<r$$

i

$$|u|<r.$$

Jak łatwo zauważyć w obszarze tym funkcja $f(z-u).g(u)$ jest funkcją analityczną od u, wartość splotu nie zależy więc od kształtu krzywej L zawartej w obszarze Ω. Można zatem za krzywą L przyjąć odcinek łączący punkt 0 z punktem z i tak powstanie równoważne z określeniem II

Określenie IIa

$$f(z)*g(z) = \int_0^z f(z-u)g(u)\,du$$

gdzie przez całkowanie od 0 do z rozumieć będziemy całkowanie po odcinku łączącym te punkty.

Uwaga I

Z tego co zostało powiedziane wyżej wynika, że funkcja $f(z)*g(z)$, jest funkcją analityczną.

Aby udowodnić dla tak zdefiniowanego splotu własności analogiczne do własności splotu funkcji rzeczywistych należy udowodnić:

Twierdzenie I

$$f(z)*g(z) = g(z)*f(z).$$

a więc splot jest przemienny.

Dowód:

Z definicji, a następnie przez przyjęcie $u = zt$, gdzie t - rzeczywiste, otrzymujemy:

$$f(z)*g(z) = \int_0^z f(z-u)g(u)du = \int_0^1 f(z(1-t))g(zt)z\,dt \qquad (1)$$

$$g(z)*f(z) = \int_0^z g(z-u)f(u)du = \int_0^1 g(z(1-t))\,f(zt)z\,dt$$

a następnie po zmianie w (1) zmiennej $t = 1 - \tau$ otrzymujemy

$$f(z) * g(z) = - \int_1^0 f(z\tau)g(z(1-\tau))\, z d\tau =$$

$$= \int_0^1 f(z\tau)\, g(z(1-\tau))\, z d\tau = g(z)*f(z) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Należy obecnie udowodnić łączność splotu, a więc

Twierdzenie II

$$(a(z) * b(z)) * c(z) = a(z)*(b(z) * c(z)).$$

Dowód:

Wprowadzimy oznaczenia

$$g(z) = \int_0^z a(z-u)b(u)du \qquad h(z) = \int_0^z b(z-u)c(u)du$$

Należy więc udowodnić, że

$$\int_0^z g(z-v)\, c(v)\, dv = \int_0^z a(z-v)\, h(v)\, dv.$$

Po następującej zmianie zmiennych:

$$t = e^{-i\varphi}.\, z$$

$$\tau = e^{-i\varphi}.\, u$$

$$s = e^{-i\varphi}.\, v$$

gdzie $\varphi = \arg z$. Pamiętając o określeniu IIa splotu z którego wynika, że dla wszystkich u i v

$$\arg(z) = \arg(u) = \arg(v)$$

otrzymujemy jako wniosek, że liczby t, τ i s są liczbami rzeczywistymi.

Po zmianie zmiennych otrzymujemy:

$$g(z) = \int_0^t a(e^{i\varphi}(t-\tau))\, b(e^{i\varphi}\tau)\, e^{i\varphi}\, d\tau$$

$$h(z) = \int_0^t b(e^{i\varphi}(t-\tau))\, c(e^{i\varphi}\tau)\, e^{i\varphi}\, d\tau$$

$$a(z) * h(z) = e^{2i\varphi} \int_0^t a(e^{i\varphi}(t-s)) \int_0^s b(e^{i\varphi}(s-\tau))\, c(e^{i\varphi}\tau)\, d\tau\, ds =$$

$$= e^{2i\varphi} \int_0^t \int_0^s a(e^{i\varphi}(t-s))\, b(e^{i\varphi}(s-\tau))\, c(e^{i\varphi}\tau) d\tau\, ds$$

zaś

$$g(z) * c(z) = \int_0^t \int_0^{t-s} a(e^{i\varphi}(t-\tau-s))\, b(e^{i\varphi}\tau) e^{i\varphi} d\tau\, c(se^{i\varphi}) e^{i\varphi}\, ds =$$

$$= e^{2i\varphi} \int_0^t \int_0^{t-s} a(e^{i\varphi}(t-\tau-s)) b(e^{i\varphi}\tau)\, d\tau\, c(se^{i\varphi}) ds$$

a zmieniając w całce wewnętrznej zmienną $w = \tau + s$ otrzymujemy:

$$g(z) * c(z) = e^{2i\varphi} \int_0^t \int_s^t a(e^{i\varphi}(t-w)) b(e^{i\varphi}(w-s)) dw\, c(se^{i\varphi})\, ds$$

$$= e^{2i\varphi} \int_0^t \int_s^t a(e^{i\varphi}(t-w))\, b(e^{i\varphi}(w-s))\, c(e^{i\varphi}s)\, dw\, ds =$$

$$= e^{2i\varphi} \iint_T a(e^{i\varphi}(t-w))\, b(e^{i\varphi}(w-s))\, c(e^{i\varphi}s)\, dw\, ds$$

gdzie całka podwójna jest rozciągnięta na obszar trójkątny T, określony nierównościami $o < s < w < t$. Zamieniając tę całkę podwójną z powrotem na iterowaną, lecz ze zmienioną kolejnością całkowania, otrzymujemy:

$$g(z) * c(z) = e^{2i\varphi} \int_0^t \int_0^w a(e^{i\varphi}(t-w))\, b(e^{i\varphi}(w-s))\, c(e^{i\varphi}s)\,ds\, dw$$

stąd zaś już wprost wynika, że

$$g(z) * c(z) = a(z) * h(z)$$

czyli, że

$$(a(z) * b(z)) * c(z) = a(z) * (b(z) * c(z)) \quad \text{c.b.d.o.}$$

Splot jest również rozdzielny względem dodawania o czym mówi

Twierdzenie III

$$a(z) * (b(z) + c(z) = a(z) * b(z) + a(z) * c(z)$$

Dowód:

Twierdzenie to wynika wprost z rozdzielności całkowania względem dodawania na mocy bowiem tej własności

$$a(z) * (b(z)+c(z)) = \int_0^z a(z-u)(b(u) + c(u))du =$$

$$= \int_0^z a(z-u)b(u)du + \int_0^z a(z-u)c(u)du = a(z) * b(z) + a(z) * c(z)$$

c.b.d.o.

Należy obecnie udowodnić

Twierdzenie IV

$$f(z) * g(z) = 0$$

wtedy i tylko wtedy gdy $f(z) = 0$ lub $g(z) = 0$.

Dowód:

Pierwsza część tezy jest oczywista, zajmiemy się więc udowodnieniem jej drugiej części dla

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad i \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \text{ w kole } |z|<r .$$

W określonym poprzez warunek I obszarze Ω funkcje $f(z-u)$ i $g(u)$ dadzą się przedstawić w postaci

$$f(z-u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-u)^k$$

$$g(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k$$

gdzie szeregi stojące po prawej stronie są zbieżne bezwzględnie i niemal jednostajnie w obszarze Ω .

Jeżeli dla szeregów $\sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda$, $\sum_{\lambda=0}^{\infty} e_\lambda$ wszystkie iloczyny $d_\lambda e_\mu$ ($\lambda = 0,1,2,\ldots$ $\mu = 0,1,2,\ldots$) oznaczone będą w jakiejkolwiek kolejności przez $p_0, p_1, p_2,,,$ to zachodzi następujące ([2] str. 156) twierdzenie:

Jeżeli szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = S$ $\sum_{n=0}^{\infty} e_n = T$ są zbieżne bezwzględnie,

to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ jest też bezwzględnie zbieżny i ma sumę ST.

Z tego co powyżej wynika natychmiast, że

$$f(z-u)\, g(u) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-u)^k\Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k\Big) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(z,u)$$

gdzie

$$c_l(z,u) = \sum_{s=0}^{l} a_s b_{l-s}(z-u)^s (u)^{l-s}$$

Posiłkując się przytoczonym twierdzeniem i przy pomocy kryterium Weierstrassa można łatwo udowodnić niemal jednostajną zbieżność szeregu $\sum_{l=0}^{\infty} c_l(z,u)$ w obszarze Ω.

A więc przy naszej umowie o sposobie obliczania splotu można napisać:

$$\int_0^z f(z-u)g(u)du = \int_0^z \sum_{l=0}^{\infty} c_l(z,u)du = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^z c_l(z,u)du \qquad (1)$$

Zajmijmy się obecnie obliczeniem

$$\begin{aligned}\int_0^z c_l(z,u)du &= \int_0^z \sum_{s=0}^{l} a_s b_{l-s}(z-u)^s (u)^{l-s} du = \\ &= \sum_{s=0}^{l} (a_s b_{l-s} \int_0^z (z-u)^s u^{l-s} du)\end{aligned} \qquad (2)$$

Całkę występującą w ostatnim członie powyższego wzoru można obliczyć stosując do $(z-u)^s$ wzór dwumienny Newtona i mnożąc uzyskany w ten sposób wielomian przez u^{l-s}, a następnie całkując. Po wykonaniu tych czynności otrzymamy równość

$$\int_0^z (z-u)^s u^{l-s} du = K_{l,s} z^{l+1} \qquad (3)$$

gdzie $K_{l,s}$ jest liczbą stałą.

Ponieważ dla zmiennej rzeczywistej i dla $t \neq 0$, ze zbadania przebiegu funkcji $(t-x)^s x^{l-s}$ w przedziale $[0,t]$ wynika

$$\int_0^t (t-x)^s x^{l-s}\, dx \neq 0,$$

a jednocześnie z przyjętego sposobu obliczania całki

$$\int_0^z (z-u)^s\, u^{l-s}\, du$$

wynika

$$\int_0^t (t-x)^s\, x^{l-s}\, dx = K_{l,s}\, t^{l+1}$$

a więc

$$K_{l,s} \neq 0 \qquad (l = 0,1,2,\ldots,\ s = 0,1,2,\ldots).$$

(2) i (3) i po przyjęciu $\sum\limits_{s=0}^{l} a_s b_{l-s} K_{l,s} = A_l$

$$\int_0^z c_l\,(z,u)du = z^{l+1} \sum_{s=0}^{l} a_s b_{l-s} K_{l,s} = A_l z^{l+1}$$

po uwzględnieniu (1) otrzymujemy

$$\int_0^z f(z-u)\, g(u)du = \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^{l+1}$$

Jeżeli teraz $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k \neq 0$

i

$$g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^p \neq 0$$

to istnieje takie k_o, że $a_{k_o} \neq 0$, a dla $0 \leq k < k_o$ stale $a_k = 0$ i istnieje takie p_o, że $b_{p_o} \neq 0$, a dla $0 \leq p < p_o$ stale $b_p = 0$ wówczas

$$A_{k_o+p_o} = \sum_{s=0}^{k_o+p_o} a_s b_{k_o+p_o-s} K_{k_o+p_o,s} = a_{k_o} b_{p_o} K_{k_o+p_o,k_o} \neq 0$$

a więc

$$\int_0^z f(z-u)g(u)du = \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^{l+1} \neq 0 \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Z udowodnionych w tym paragrafie twierdzeń wynika

Twierdzenie V

Klasa A jest ze względu na działanie dodawania i "splatania" pierścieniem bez dzielników zera.

Wniosek I

Można utworzyć rachunek operatorowy funkcji klasy A.

Określenie III

Klasą B nazwiemy klasę funkcji analitycznych w kole $|z-z_o| < r$, gdzie $r \leq \infty$.

Dla każdej liczby z, spełniającej nierówność $|z-z_o| < r$, określmy obszar Ω' wartości u spełniających

Warunek II

$$|u-z_o| < r$$

i

$$|z-u| < r$$

Można wówczas wprowadzić

Określenie IV

Splotem dwóch funkcji analitycznych $f(z), g(z) \in B$ nazwiemy

$$\int_L f(z-u+z_0)g(u)du$$

gdzie L jest odcinkiem łączącym punkt z_0 z punktem z.(Można tu było oczywiście całkować i po innej drodze zawartej w obszarze Ω').
Przy przyjętych ostatnio określeniach, można łatwo dla funkcji klasy B udowodnić wszystkie podane tu twierdzenia. Wypływa stąd

Wniosek II

Można utworzyć rachunek operatorowy funkcji klasy B.

Określenie V

Obszarem gwiaździstym nazwiemy obszar, w którym istnieje punkt z_0, taki, że wszystkie punkty obszaru można połączyć z punktem z_0 odcinkiem leżącym wewnątrz obszaru.

Określenie VI

Klasą D nazwiemy klasę funkcji analitycznych w obszarze gwiaździstym Δ.
Zdefiniujmy splot dwóch funkcji $f(z), g(z) \in D$ w myśl określenia IV (gdzie z_0 jest punktem wymienionym w określeniu V).
Dla tak zdefiniowanego splotu funkcji klasy D można natychmiast przez przeliczenie otrzymać twierdzenia I-III.
Prawdziwość twierdzenia IV dla tych funkcji wynika z prawdziwości tego twierdzenia dla funkcji klasy B.
Otrzymujemy więc

Wniosek III

Można utworzyć rachunek operatorowy funkcji klasy D.

Wpłynęło do redakcji w maju 1964 r.

LITERATURA

[1] Mikusiński J.: "Rachunek operatorów" W-wa 1953 PWN.

[2] Knopp K. "Szeregi nieskończone" W-wa 1956 PWN.

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
НА НЕКОТОРЫЙ КЛАСС АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Р е з ю м е

В работе рассматривается некоторый класс аналитических функций.

Показано, что этот класс является относительно операций сложения и свертки кольцом без делителей нуля, что делает возможным построение на этом классе операторного исчисления.

ON THE POSSIBILITY OF AN EXTENSION OF THE OPERATOR CALCULUS
ON A CERTAIN CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper it has been proved that a certain class of analytic functions is a ring without zero's divisiors for addition and convolution, and that is why there can be built the operator calculus on that class of functions.