ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 9 Nr kol. 146

BOLESŁAW SZAFNICKI

ULTRA-DYSTRYBUCJE A FUNKCJE ANALITYCZNE

W pracy tej, we wszystkich rozważaniach dotyczących dystrybucji opierano się na teorii dystrybucji Mikusińskiego [1]. Operując pojęciem dystrybucji zespolonej od zmiennej rzeczywistej, jako uogólnieniem dystrybucji rzeczywistych otrzymanym w taki sam sposób jak odpowiednie uogólnienie dla funkcji, powoływano się na twierdzenia, które natychmiast wynikają z własności tego uogólnienia i z odpowiednich twierdzeń teorii dystrybucji rzeczywistych.

Celem skrócenia wypowiedzi przyjęto dystrybucję okresową zespoloną zmiennej rzeczywistej oznaczać skrótem d.o.z.z.r.

Rozdział 1

Określenie 1

Mówimy, że funkcja $f(z)$ analityczna w kole $|z|<1$, rozwijalna w tym kole wokół punktu $z_0 = 0$ w szereg Taylora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

należy do zbioru S jeżeli współczynniki C_n spełniają

Warunek 1: istnieje takie K-całkowite, że

$$\frac{C_n}{n^K} \to 0 \qquad \text{przy } n \to \infty.$$

Uwaga 1

Jeżeli istnieje takie K-całkowite, że $\frac{C_n}{n^K} \to 0$, to oczywiście istnieje i takie K_1-naturalne, że $\frac{C_n}{n^{K_1}} \to 0$.

Przekształcenie 1

Każdej funkcji $f(z)$ analitycznej w kole $|z|<1$, którą można przedstawić w postaci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$

przypisujemy szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}$$

Oznaczenie 1

W dalszym ciągu przekształcenie to będziemy krótko oznaczać

$$z(t) = U(f(z))$$

Uwaga 2

Jeżeli $f(z) \in S$ to $U(f(z))$ jak zostało wykazane [1] w teorii dystrybucji przedstawia d.o.z.z.r. (o okresie 2π) tym samym funkcji $f(z) \in S$ została przypisana d.o.z.z.r.:

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}$$

Uwaga 3

Jeśli $f(z) \in S$ i $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ to

$$U(f(z)) = U\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}$$

Określenie 2

Mówimy, że d.o.z.z.r., o okresie 2π należy do zbioru R jeżeli jest rozwijalna w szereg Fouriera

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{int}$$

Jak zostało wykazane w teorii dystrybucji [1] współczynniki C_n spełniają wówczas warunek 1.

Uwaga 4

Do zbioru R mogą też należeć okresowe funkcje ciągłe z.z.r.

Przekształcenie 2a

Każdemu szeregowi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}$ przypiszmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Oznaczenie 2

To przekształcenie oznaczmy przez

$$U^{-1}(z(t)) = f(z)$$

Przekształcenie 2b

Każdej dystrybucji $z(t) \in R$, gdzie $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}$ przypiszmy

$$U^{-1}(z(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Twierdzenie 1

Jeżeli $z(t) \in R$ to $f(z) = U^{-1}(z(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ przedstawia funkcję analityczną w kole $|z|<1$

Dowód:

$$\left|C_n z^n\right| = \left|\frac{C_n}{n^K} z^n n^K\right| \leq M \left| z^n n^K\right|$$

gdzie $M = \max \left(\frac{C_n}{n^K}\right)$, istnieje na podstawie warunku 1.

Ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} |z^n n^K|$ jest zbieżny w kole $|z| < 1$ (wynika to np. z kryterium d'Alemberta), a więc i szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ jest zbieżny w kole $|z|<1$, zatem $f(z)$ jest funkcją analityczną.

Uwaga 5

Tym samym poprzez przekształcenie $U^{-1}(z(t))$ każdej dystrybucji $z(t) \in R$ została przypisana $f(z) \in S$.

Uwaga 6

Jeśli $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}$ to

$$U^{-1}(z(t)) = U^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{int}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Wnioski:

Ponieważ rozwinięcie dystrybucji $z(t) \in R$ w szereg Fouriera jest jednoznaczne i rozwinięcie funkcji $f(z) \in S$ jest jednoznaczne więc przyjęte wyżej przekształcenia $U(f(z))$ i $U^{-1}(z(t))$ są wzajemnie jednoznaczne odpowiednio w zbiorze S i R. Stąd i ze sposobu ustalenia powyższych przekształceń wynikają następujące wnioski:

1) Jeśli $f_1(z), f_2(z) \in S$ i $f_1(z) \neq f_2(z)$ to

$$U(f_1(z)) \neq U(f_2(z))$$

2) Jeśli $z_1(z), z_2(t) \in R$ i $z_1(t) \neq z_2(t)$ to

$$U^{-1}(z_1(t)) \neq U^{-1}(z_2(t))$$

3) Jeśli $f(z) \in S$ to $U(f(z)) \in R$

4) Jeśli $z(t) \in R$ to $U^{-1}(z(t)) \in S$

5) Jeśli $z(t) = U(f(z))$ i $f(z) \in S$

to $$U^{-1}(z(t)) = f(z)$$

czyli

$$U^{-1}\left\{U(f(z))\right\} = f(z)$$

6) Jeśli $f(z) = u^{-1}(z(t))$ i $z(t) \in R$

to $$U(f(z)) = z(t)$$

czyli $$U\left\{U^{-1}(z(t))\right\} = z(t)$$

A więc przekształcenia U i U^{-1} są wzajemnie odwrotne.

7) Dla każdego $z(t) \in R$ istnieje takie $f(z) \in S$, że

$$U(f(z)) = z(t)$$

8) Dla każdego $f(z) \in S$ istnieje takie $z(t) \in R$, że:

$$U^{-1}(z(t)) = f(z)$$

Rozdział 2

<u>Twierdzenie</u> 1

Jeżeli funkcje $f(z) \in S$, $g(z) \in S$ i dla $|z|<1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

to funkcja $f(z) + g(z)$ rozwija się w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ dla $|z| < 1$, gdzie $c_n = a_n + b_n$ i $f(z) + g(z) \in S$.

Dowód:

Pierwsza część tezy wynika z twierdzenia, że szeregi potęgowe zbieżne w kole $|z| < 1$ można dodawać wyraz po wyrazie i z jednoznaczności rozwinięcia funkcji analitycznej w szereg potęgowy

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Ponieważ ponadto istnieją takie K_1 i K_2 całkowite, że

$$\frac{a_n}{n^{K_1}} \to 0 \qquad \frac{b_n}{n^{K_2}} \to 0$$

więc dla $K = \max(K_1, K_2)$

$$\frac{c_n}{n^K} = \frac{a_n + b_n}{n^K} \to 0$$

co wespół z tym, co zostało już wykazane udawadnia prawdziwość całej tezy twierdzenia.

Można teraz udowodnić następujące:

Twierdzenie 2

$$u(f(z) + g(z)) = u(f(z)) + u(g(z))$$

Dowód:

Przy założeniach jak w poprzednim twierdzeniu i po skorzystaniu z niego oraz z uwagi 3.1. otrzymujemy

$$u(f(z) + g(z)) = u\left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) e^{int}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int} = u(f(z)) + u(g(z)) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Z własności dodawania dwóch d.o.z.z.r. otrzymujemy natychmiast

Wniosek 1

Jeśli $z_1(t),\ z_2(t) \in R$ to $z_1(t) + z_2(t) \in R$

Twierdzenie 3

$$U^{-1}(z_1(t) + z_2(t)) = U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t))$$

Dowód:

Dla dowolnych $z_1(t),\ z_2(t) \in R$ istnieją na podstawie wniosku 7.1 takie $f(z)$ i $g(z) \in S$, że

$$z_1(t) = u(f(z)) \quad \text{i} \quad z_2(t) = u(g(z)) \tag{1}$$

więc na podstawie twierdzenia 2

$$z_1(t) + z_2(t) = U(f(z)) + U(g(z)) = U(f(z) + g(z))$$

Skąd z wniosku 5.1.

$$U^{-1}(z_1(t) + z_2(t)) = U^{-1}\left\{U(f(z) + g(z))\right\} = f(z) + g(z)$$

a to na podstawie (1) i wniosku 5.1 można napisać w formie

$$U^{-1}(z_1(t) + z_2(t)) = f(z) + g(z) = U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t))$$

co dowodzi twierdzenia.

Uwaga:

W rozdziale tym znak + miał dwojakie znaczenie. W niektórych miejscach oznaczał on dodawanie funkcji analitycznych (lub liczb zespolonych), a w innych dodawanie dystrybucji z.z.r.

Rozdział 3

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $f(z) \in S$ dla $|z| < 1$ i $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a λ jest dowolną liczbą zespoloną to funkcja $\lambda f(z)$ rozwija się w szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{dla} \quad |z| < 1, \text{ gdzie } c_n = \lambda a_n \quad \text{i} \quad (\lambda f(z)) \in S$$

Dowód:

Pierwsza część tezy wynika z elementarnych własności szeregów potęgowych dla których można napisać

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n$$

Ponieważ ponadto istnieje takie całkowite k, że

$$\frac{a_n}{n^k} \to 0$$

więc

$$\frac{c_n}{n^k} = \frac{\lambda a_n}{n^k} \to 0$$

co dowodzi prawdziwości całej tezy twierdzenia.

Można teraz udowodnić następujące:

Twierdzenie 2

$$U(\lambda f(z)) = \lambda U(f(z))$$

Dowód:

Przy oznaczeniach jak w poprzednim twierdzeniu i po skorzystaniu z niego oraz uwagi 3.1 otrzymujemy:

$$U(\lambda f(z)) = U\left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n e^{int} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int} = \lambda U(f(z)) \text{ c.b.d.o.}$$

Twierdzenie 3

$$U^{-1}(\lambda z(t)) = \lambda U^{-1}(z(t))$$

Dowód:
Z wniosku 7.1 wynika, że istnieje takie f(z), dla którego

$$z(t) = U(f(z))$$

a więc

$$f(z) = U^{-1}(z(t))$$

stąd i z wniosku 5.1 oraz twierdzenia 2.3 otrzymujemy:

$$U^{-1}(\lambda z(t)) = U^{-1}\{\lambda U(f(z)\} = U^{-1}\{U(\lambda f(z))\} = \lambda f(z) = \lambda U^{-1}(z(t))$$

Wniosek: Z twierdzeń 2.2 i 2.3 wynika

1) $U(\lambda f(z) + \mu g(z)) = \lambda U(f(z)) + \mu U(g(z))$

   a więc przekształcenie U jest przekształceniem liniowym - podobnie z twierdzeń 3.2 i 3.3, wynika

2) $U^{-1}(\lambda z_1(t) + \mu z_2(t)) = \lambda U^{-1}(z_1(t)) + \mu U(z_2(t))$

Z twierdzeń tego i poprzedniego rozdziału oraz ze związków

$$f(z) - g(z) = f(z) + (-1)\, g(z)$$

$$z_1(t) - z_2(t) = z_1(t) + (-1)\, z_2(t)$$

wynikają natychmiast następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4

Jeżeli $f(z), g(z) \in S$ i dla $|z|<1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

to funkcja $f(z) - g(z)$ rozwija się w szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ gdzie

$$c_n = a_n - b_n$$

i $$(f(z) - g(z)) \in S$$

a na podstawie tego

Twierdzenie 5

$$U(f(z) - g(z)) = U(f(z)) - U(g(z))$$

i w końcu

Twierdzenie 6

$$U^{-1}(z_1(t) - z_2(t)) = U^{-1}(z_1(t)) - U^{-1}(z_2(t))$$

Rozdział 4

Przyjmiemy obecnie następującą definicję ([2] str. 187) grupy przemiennej.

Definicja 1

Zbiór abstrakcyjny G nazywamy grupą przemienną (lub abelową), jeżeli w zbiorze tym określone jest działanie (zwane dodawaniem), które każdej parze a i b elementów zbioru G przyporządkowuje pewien element a + b zbioru G (zwany sumą elementów a i b) w taki sposób, że spełnione są następujące warunki (aksjomaty teorii grup):

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
2) $a + b = b + a$,
3) istnieje dokładnie jeden element zbioru G (oznaczony przez 0), posiadający tę własność, że dla każdego $a \in G$ jest

$$a + 0 = a,$$

4) dla każdego elementu $a \in G$ istnieje dokładnie jeden element odwrotny (który oznaczamy przez (-a)) posiadający własność:

$$a + (-a) = 0.$$

Z przyjętej powyżej definicji wypływają na podstawie łatwych do zauważenia oraz udowodnionych w rozdziałach 1 i 2 własności zbiorów S i R następujące

Wnioski:

1. Zbiór S jest ze względu na dodawanie grupą przemienną.
2. Zbiór R jest ze względu na dodawanie grupą przemienną.

Definicja 2([2] str. 168)

Niech G i H będą dwiema grupami przemiennymi, funkcja f przekształcająca grupę G na podzbiór grupy H nazywa się izomorfizmem jeżeli:

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
2) $f(G) = H$,
3) funkcja f jest funkcją różnowartościową.

Grupy G i H nazywa się wówczas izomorficznymi.

Z wniosku 7.1 wynika natychmiast następujący potrzebny nam obecnie

Wniosek 3

$$U(S) = R$$

Wziąwszy pod uwagę twierdzenie 2.3, wniosek 3.4 oraz wniosek 1.1 otrzymujemy dla $f(z), g(z) \in S$

1) $U(f(z) + g(z)) = U(f(z)) + U(g(z))$,
2) $U(S) = R$,
3) funkcja U jest różnowartościowa,

a stąd i z definicji 2 wynika.

Wniosek 4
Przekształcenie U jest izomorfizmem, a grupy S i R są izomorficzne.

Rozdział 5
Wprost z teorii funkcji analitycznych i szeregów potęgowych ([5] str. 19 i 47) wynika następujące

Twierdzenie 1

Jeżeli $f(z), g(z) \in S$ i $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

to:

1) $f(z).g(z)$ jest funkcją analityczną w kole $|z|<1$
2) $f(z).g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ dla $|z| < 1$

gdzie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0,1,2,.....)$

Przy pomocy twierdzenia 1 można udowodnić następujące

Twierdzenie 2
Jeżeli $f(z), g(z) \in S$ to $f(z).g(z) \in S$

Dowód:
Na mocy założenia i uwagi 1.1 istnieją takie naturalne K_1 i K_2, że

$$\left|\frac{a_n}{n^{K_1}}\right| \to 0 \quad \text{i} \quad \left|\frac{b_n}{n^{K_2}}\right| \to 0$$

A wobec tego istnieje M_1 i M_2 takie, że $\left|\frac{a_n}{n^{K_1}}\right| < M_1$, $\left|\frac{b_n}{n^{K_2}}\right| < M_2$

dla wszystkich n zatem

szeregi
$$\left|\frac{a_0}{1^{K_1+2}}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{n^{K_1+2}}\right|$$

i

$$\left|\frac{b_0}{1^{K_2+2}}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{b_n}{n^{K_2+2}}\right|$$

są zbieżne, a więc dla:

$$d_n = \left|\frac{a_0}{1^{K_1+2}}\right|\left|\frac{b_n}{n^{K_2+2}}\right| + \left|\frac{a_1}{1^{K_1+2}}\right|\left|\frac{b_{n-1}}{(n-1)^{K_2+2}}\right| +$$

$$+\left|\frac{a_2}{2^{K_1+2}}\right|\left|\frac{b_{n-2}}{(n-2)^{K_2+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{a_{n-1}}{(n-1)^{K_1+2}}\right|\left|\frac{b_1}{1^{K_2+2}}\right| + \left|\frac{a_n}{n^{K_1+2}}\right|\left|\frac{b_0}{1^{K_2+2}}\right|$$

szereg $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ jest zbieżny

więc $d_n \longrightarrow 0.$

Jak łatwo zauważyć dla $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$$0 \leq \left|\frac{c_n}{n^{K_1+2}\, n^{K_2+2}}\right| = \left|\frac{c_n}{n^{K_1+K_2+4}}\right| \leq d_n$$

skąd
$$\frac{c_n}{n^{K_1+K_2+4}} \longrightarrow 0$$

co wespół z pierwszą częścią tezy twierdzenia 1.5 dowodzi, że

$$f(z).g(z) \in S \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Z tego co zostało dotychczas udowodnione wynika, że można przyjąć następujące

Określenie 1

Gdy $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$ to definiujemy ich iloczyn

$$z_1(t).z_2(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t))\right\}.$$

Na podstawie poprzedniego twierdzenia oraz wniosków 3.1 i 4.1 uzyskujemy

Wniosek 1

Jeśli $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$

to $z_1(t).\ z_2(t) \in R$

Twierdzenie 3

Jeżeli $f(z),\ g(z) \in S$ to

$$U(f(z).g(z)) = U(f(z)).U(g(z))$$

Dowód:

Jeżeli $U(f(z)) = z_1(t)$

$U(g(z)) = z_2(t)$

to $U(f(z).g(z)) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t))\right\} =$

$$= z_1(t).z_2(t) = U(f(z)).U(g(z))$$

Uwaga 1

Należy zauważyć, że znaki mnożenia po lewej i prawej stronie określenia 1.5 oznaczają co innego. Mnożenie występujące po lewej stronie tego określenia jest mnożeniem dwóch dystrybucji

o.z.z.r. (definiowanym), a mnożenie po prawej jest mnożeniem dwóch funkcji analitycznych.
Z definicji mnożenia dwóch dystrybucji $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$ wynika na podstawie twierdzenia 1.5 i uwag 3.1 i 6.1.

<u>Wniosek</u> 2

Jeśli $z_1(t),\ z_2(t) \in R$ i

$$z_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$$

$$z_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int}$$

to
$$z_1(t).z_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

gdzie
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Stąd w oparciu o znane z analizy twierdzenie [3], że szereg Fouriera funkcji ciągłej jest do niej zbieżny, przy czym jest zbieżny bezwględnie otrzymujemy:

<u>Wniosek</u> 3

Jeśli $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$ są dwiema funkcjami ciągłymi i

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int} = z_1(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int} = z_2(t)$$

to
$$z_1(t).z_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

gdzie
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

(Znak równości występuje tu w charakterze znaku równości między funkcjami, a znak mnożenia jest znakiem mnożenia dwóch funkcji). Używając za Mikusińskim [1] symbolu $(f(t))$ na określenie dystrybucji odpowiadającej funkcji ciągłej $f(t)$ otrzymamy

Twierdzenie 4

Jeśli $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$ są dwiema funkcjami ciągłymi

to $$(z_1(t)).(z_2(t)) = (z_1(t).z_2(t))$$

Dowód

Na podstawie wniosku 2.5, wniosku 3.5, i określenia 1.5

$$(z_1(t)).(z_2(t)) = U\left\{U^{-1}\left[z_1(t)\right].\ U^{-1}\left[z_2(t)\right]\right\}) =$$

$$= (U\left\{(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)\right\}) = (U\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right\}) =$$

$$= (\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}) = ((\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int})(\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int})) = (z_2(t).z_2(t))$$

gdzie $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Z określenia 1.5 oraz wniosku 7.1 wynika natychmiast

Wniosek 4

$$U^{-1}(z_1(t).z_2(t)) = U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t))$$

bo $$U^{-1}(z_1(t).z_2(t)) = U^{-1}\left\{U\left[U^{-1}(z_1(t))\ .\ U^{-1}(z_2(t)\right]\right\} =$$

$$= U^{-1}(z_1(t)).\ U^{-1}(z_2(t))$$ c.b.d.o.

Jeżeli $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$ i $z_2(t) = \lambda$, gdzie λ jest stałą, to ponieważ $U^{-1}(\lambda) = \lambda$ i przy przyjęciu znaku (.) na mnożenie d.o.z.z.r. przez stałą,a znaku . na mnożenie d.o.z.z.r. przez d.o.z.z.r. otrzymamy

Twierdzenie 5

$$\lambda(.)z_1(t) = \lambda . z_1(t)$$

gdyż na mocy twierdzenia 3.5

$$\lambda(.)z_1(t) = U\left\{U^{-1}(\lambda(.)z_1(t))\right\} = U\left\{\lambda U^{-1}(z_1(t))\right\} = \lambda . z_1(t) \text{c.b.d.o}$$

Przy przyjętej powyżej (określenie 1.5) definicji mnożenia $z_1(t).z_2(t)$, gdzie $z_1(t)$, $z_2(t) \in R$ i po uwzględnieniu oczywistych własności działań na $f(z) \in S$ da się uzyskać następujące wnioski

Wniosek 5

$$z_1(t).z_2(t) = z_2(t).z_1(t)$$

bo
$$z_1(t).z_2(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t))\right\} =$$
$$= U\left\{U^{-1}(z_2(t)).U^{-1}(z_1(t))\right\} = z_2(t).z_1(t) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Wniosek 6

$$(z_1(t).z_2(t)).z_3(t) = z_1(t).(z_2(t).z_3(t))$$

bo
$$(z_1(t).z_2(t)).z_3(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t).z_2(t)) . U^{-1}(z_3(t))\right\} =$$
$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t)).U^{-1}(z_3(t))\right\} =$$
$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).\left[U^{-1}(z_2(t)).U^{-1}(z_3(t))\right]\right\} =$$
$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t).z_3(t))\right\} = z_1(t).(z_2(t).z_3(t)) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Powyżej posłużono się w dowodzie dwukrotnie wnioskiem 4.5. Posługując się dodatkowo twierdzeniem 2.2 i twierdzeniem 3.2 otrzymujemy:

Wniosek 7

$$z_1(t).(z_2(t) + z_3(t)) = z_1(t).z_2(t) + z_1(t).z_3(t)$$

bo

$$U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t) + z_3(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t))\ .\ (U^{-1}(z_2(t)) + U^{-1}(z_3(t)))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t)) + U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_3(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t))\right\} + U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_3(t))\right\} =$$

$$= z_1(t).z_2(t) + z_1(t).z_3(t) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Rozdział 6

Przyjmując obecnie następującą definicję ([4] str. 67).

Definicja 1

Niech P będzie zbiorem dowolnych elementów. Załóżmy, że dane są dwie funkcje o dwu argumentach, takie, że jeśli x i y są elementami P, to wartości tych funkcji też należą do P. Funkcje te oznaczamy przez $x + y$ i xy i nazywamy sumą i iloczynem elementów x i y. Wówczas zbiór P nazywamy pierścieniem (dokładniej pierścieniem przemiennym) względem działań $x + y$ i xy jeżeli dla dowolnych elementów x,y i z zbioru P spełnione są następujące warunki:

1) $x + y = y + x$,
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
3) jeśli $x \in P$ i $y \in P$ to istnieje taki element $t \in P$, że $x + t = y$,
4) $xy = yx$,

5) $(xy)z = x(yz)$,

6) $x(y + z) = xy + xz$.

Jeśli za zbiór P wymieniony w powyższej definicji przyjmiemy zbiór S, za dodawanie - dodawanie funkcji analitycznych, a za mnożenie - ich mnożenie, to uwzględniając jeszcze twierdzenia 1.2 i 2.5, oraz własności dodawania i mnożenia funkcji analitycznych otrzymamy natychmiast następujący

Wniosek 1

Zbiór S jest pierścieniem względem działań dodawania i mnożenia.

Jeśli teraz za zbiór P wymieniony w definicji 1.6 przyjmiemy zbiór R, za dodawanie - dodawanie dwóch d.o.z.z.r., a za mnożenie - ich mnożenie zdefiniowane w rozdziale 5, to uwzględniając wniosek 1.2 i wniosek 1.5 oraz własności dodawania d.o.z.z.r. i własności mnożenia wykazane we wnioskach 5-7.5 otrzymujemy następujący

Wniosek 2

Zbiór R jest pierścieniem ze względu na dodawanie i zdefiniowane w rozdziale 5 mnożenie.

Niech P_1 i P_2 będą dwoma pierścieniami. Będziemy oznaczali tymi samymi symbolami działania dodawania i mnożenia w pierścieniach P_1 i P_2, aby zaś nie prowadziło to do nieporozumień, oznaczać będziemy elementy pierścienia P_1 literami ze wskaźnikiem 1, a elementy pierścienia P_2 - literami ze wskaźnikiem 2. Wówczas przyjmiemy następującą definicję ([4] - str. 74).

Definicja 2

Jeśli Γ jest funkcją odwzorowującą pierścień P_1 na P_2, odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne i spełnia następujące warunki

1) $\Gamma(x_1 + y_1) = \Gamma(x_1) + \Gamma(y_1)$,

2) $\Gamma(x_1 y_1) = \Gamma(x_1)\,\Gamma(y_1)$,

to mówimy, że Γ jest izomorfizmem, a P_1 jest izomorficzny z P_2.

Po przyjęciu tej definicji z wykazanych poprzednio własności przekształcenia U, przekształcającego zbiór S na R (wniosek 3.4) a w szczególności z twierdzeń 2.2 i twierdzeń 3.5 wynikają następujące ważne wnioski:

Wniosek 3
U jest izomorfizmem przekształcającym pierścień S na pierścień R.

Wniosek 4
Pierścienie S i R są izomorficzne.

Rozdział 7

Weźmy teraz pod uwagę zbiór A wszystkich funkcji analitycznych w kole $|z| < 1$, a więc przyjmijmy następujące:

Określenie 1
Mówimy, że funkcja zespolona zmiennej zespolonej należy do zbioru A jeśli jest analityczna w kole $|z| < 1$.

Z treści poprzednich rozdziałów i z określenia 1.7 wynika wprost

Wniosek 1

1^0 $S \subset A$
2^0 nieprawdą jest, że
$A \subset S$.

Prawdziwość drugiej części tezy wniosku 1.7 można oprzeć na tym. że gdy przyjmiemy:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} z^n,$$

to $f(z) \in A$,

a jak łatwo zauważyć $f(z) \notin S$.

Przekształcenie 1

Jeżeli teraz funkcję $f(z) \in A$ poddać przekształceniu U otrzymamy w ten sposób zbiór elementów $U(f(z))$, które oznaczymy przez $z(t)$ czyli

$$z(t) = U(f(z)) \quad \text{dla} \quad f(z) \in A.$$

Określmy w następujący sposób zbiór Z:

Określenie 2

$$Z = U(A).$$

Uwaga 1

Zidentyfikujmy d.o.z.z.r. $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$ z elementem zbioru Z

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

Wówczas na mocy wniosku 1.7 otrzymamy:

Wniosek 2

$$R \subset Z$$

$$\text{i} \qquad Z \not\subset R.$$

Uwaga 2

Każdy element $z(t)$ zbioru Z ma postać

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$$

Określenie 3

Dwa elementy zbioru Z

$$z_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}, \qquad z_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{int},$$

nazywamy równymi, gdy dla wszystkich n

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots).$$

Określenie 4

Dwa elementy, które nie są równe nazywamy różnymi.

Przekształcenie 2

Każdy element $z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{int}$ zbioru Z można poddać przekształceniu U^{-1} (patrz Przekształcenie 2a.1) otrzymując

$$f(z) = U^{-1}(z(t)).$$

Z tego co zostało wyżej powiedziane wypływają następujące wnioski:

Wniosek 1

Dla każdego $z(t) \in Z$ istnieje takie $f(z) \in A$, że

$$z(t) = U(f(z)).$$

Wniosek 2

Jeżeli $f(z),\ g(z) \in A$ i $f(z) \neq g(z)$ to

$$U(f(z)) \neq U(g(z)).$$

Wniosek 3

Jeżeli $z(t) = U(f(z))$ to $U^{-1}(z(t)) = f(z)$

czyli $$U^{-1}\left\{U(f(z))\right\} = f(z).$$

Wniosek 4

Jeżeli $f(z) = U^{-1}(z(t))$ to $U(f(z)) = z(t)$

czyli $$U\left\{U^{-1}(z(t))\right\} = z(t).$$

Przekształcenia U i U^{-1} są więc wzajemnie odwrotne.

Wniosek 5

Jeżeli $z(t) \in Z$ to $U^{-1}(z(t)) \in A$.

Wniosek 6

Jeżeli $z_1(t),\ z_2(t) \in Z$ i $z_1(t) \neq z_2(t)$

to $U^{-1}(z_1(t)) \neq U^{-1}(z_2(t))$.

Z definicji równości między dwoma elementami zbioru Z i wniosku 2 wynika:

Wniosek 7

Przekształcenie U jest wzajemnie jednoznaczne w zbiorze A.

Podobnie skorzystawszy z wniosku 6.7 otrzymamy:

Wniosek 8

Przekształcenie U^{-1} jest wzajemnie jednoznaczne w zbiorze Z.

Wniosek 9

Przy przyjętych wyżej przekształceniach stałej λ odpowiada stała λ czyli:

$$U(\lambda) = \lambda$$

Rozdział 8

Określmy teraz działania na elementach zbioru Z.

Określenie 1

Jeżeli $z_1(t),\ z_2(t) \in Z$ to sumę tych elementów, którą oznaczymy przez

$z_1(t) + z_2(t)$ definiujemy w sposób następujący:

$$z_1(t) + z_2(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t))\right\}$$

Określenie 2

Jeżeli $z_1(t),\ z_2(t) \in Z$ to iloczyn tych elementów, który oznaczymy $z_1(t) \,.\, z_2(t)$ definiujemy jako:

$$z_1(t).z_2(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t).U^{-1}(z_2(t))\right\}.$$

Z określeń tych oraz z własności funkcji analitycznych można łatwo wysnuć:

Wniosek 1

Jeżeli $z_1(t), z_2(t) \in Z$ to

$$z_1(t) + z_2(t) \in Z.$$

Wniosek 2

Jeżeli $z_1(t), z_2(t) \in Z$ to

$$z_1(t) . z_2(t) \in Z$$

Po przyjęciu określeń 1.8 i 2.8 wprost z wniosku 3.7 wynikają:

Uwaga 1

$$U(f(z) + g(z)) = U(f(z)) + U(g(z))$$

Uwaga 2

$$U(f(z) . g(z)) = U(f(z)) . U(g(z))$$

Uwaga 3

Ponieważ funkcja stała λ należy do Z więc w określeniu 2.8 zostało również zdefiniowane mnożenie przez stałą.

Z przyjętych wyżej definicji można łatwo otrzymać dalsze wnioski.

Bezpośrednio z wniosku 3.7 wynikają:

Wniosek 3

$$U^{-1}(z_1(t) + z_2(t)) = U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t)).$$

Wniosek 4

$$U^{-1}(z_1(t) . z_2(t)) = U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t)).$$

Wniosek 5

$$z_1(t) + z_2(t) = z_2(t) + z_1(t),$$

rzeczywiście

$$z_1(t) + z_2(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_2(t)) + U^{-1}(z_1(t))\right\} = z_2(t) + z_1(t).$$

<u>Wniosek</u> 6

$$(z_1(t) + z_2(t)) + z_3(t) = z_1(t) + (z_2(t) + z_3(t)),$$

bowiem korzystając dwukrotnie z wniosku 3.8 otrzymujemy:

$$U\left\{U^{-1}(z_1(t) + z_2(t)) + U^{-1}(z_3(t))\right\} = U\left\{U^{-1}(z_1(t)) +\right.$$

$$\left.+ U^{-1}(z_2(t)) + U^{-1}(z_3(t))\right\} = U\left\{U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t) +\right.$$

$$\left.+ z_3(t))\right\} = z_1(t) + (z_2(t) + z_3(t)) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

<u>Określenie</u> 3

Zdefiniujmy różnicę dwóch elementów $z_2(t), z_1(t) \in Z$, którą będziemy oznaczać $z_2(t) - z_1(t)$ w sposób następujący:

$$z_2(t) - z_1(t) = z_2(t) + (-1)\, z_1(t),$$

<u>Wniosek</u> 7

Jeżeli $z_1(t), z_2(t) \in Z$, to istnieje taki element $x(t)$, że

$$z_1(t) + x(t) = z_2(t).$$

Prawdziwość tego wniosku można udowodnić przyjmując

$$x(t) = z_2(t) - z_1(t)$$

i sprawdzając, otrzymamy wówczas:

$$z_1(t) + (z_2(t)-z_1(t)) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)) + U^{-1}(z_2(t)+(-1)z_1(t))\right\}=$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t))+ U^{-1}(z_2(t)) + (-1)\,U^{-1}(z_1(t))\right\}= U\left\{U^{-1}(z_2(t))\right\}=$$

$$= z_2(t) \quad \text{c.b.d.o.}$$

Bardzo podobnie można uzyskać następujące trzy wnioski:

<u>**Wniosek**</u> 8

$$z_1(t)\,.\,z_2(t) = z_2(t)\,.\,z_1(t)$$

gdyż

$$z_1(t).z_2(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_2(t)).U^{-1}(z_1(t))\right\}= z_2(t).z_1(t) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

<u>**Wniosek**</u> 9

$$(z_1(t).z_2(t)).z_3(t) = z_1(t).(z_2(t).z_3(t))$$

bo

$$(z_1(t).z_2(t)).z_3(t) = U\left\{U^{-1}(z_1(t).z_2(t)).U^{-1}(z_3(t))\right\}=$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t)).U^{-1}(z_3(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t))\,.\,U^{-1}(z_2(t).z_3(t))\right\} =$$

$$= z_1(t)\,.\,(z_2(t).z_3(t)) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

<u>**Wniosek**</u> 10

$$z_1(t).(z_2(t) + z_3(t)) = z_1(t).z_2(t) + z_1(t).z_3(t)$$

gdyż

$$z_1(t)\cdot(z_2(t) + z_3(t)) = U\left\{U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_2(t)+ z_3(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)).\ U^{-1}(z_2(t)) + U^{-1}(z_1(t)).U^{-1}(z_3(t))\right\} =$$

$$= U\left\{U^{-1}(z_1(t)\ .z_2(t)) + U^{-1}(z_1(t)\ .\ z_3(t))\right\} =$$

$$= z_1(t).z_2(t) + z_1(t)\ .\ z_3(t) \qquad \text{c.b.d.o.}$$

Z wniosków 1-10.8 wynika:

Wniosek 11

Zbiór Z jest pierścieniem ze względu na określone wyżej działania dodawania i mnożenia.

A z uwag 1.8 i 2.8 wynika:

Wniosek 12

Przekształcenie U jest izomorfizmem przekształcającym pierścień A na Z, a więc pierścienie A i Z są izomorficzne.

Jeżeli na przeciąg wypowiedzi następujących dwóch twierdzeń przez (+) i (.) oznaczymy odpowiednio dodawania i mnożenie dwóch dystrybucji ze zbioru R, a przez + i . dodawanie i mnożenie dwóch elementów zbioru Z, to na mocy identyfikacji przyjętej w uwadze 1.7 łatwo otrzymamy:

Twierdzenie 1

Jeżeli $z_1(t),\ z_2(t) \in R$ to

$$z_1(t)\ (+)\ z_2(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

Twierdzenie 2

Jeżeli $z_1(t),\ z_2(t) \in R$ to

$$z_1(t)\ (.)\ z_2(t) = z_1(t)\ .\ z_2(t)$$

Z tego co zostało dotychczas wykazane, wynika, że zbiór Z z określonymi w nim działaniami stanowi uogólnienie pierścienia d.o.z.z.r. R, z drugiej zaś części wniosku 2.7 otrzymujemy, że uogólnienie to jest istotne.

Określenie

Każdy element pierścienia Z nazwiemy ultra-dystrybucją. Wówczas wniosek 12 przyjmie ostateczną postać:

Twierdzenie 3

Pierścień ultra-dystrybucji jest izomorficzny z pierścieniem wszystkich funkcji analitycznych w kole $|z| < 1$.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1964 r.

LITERATURA

[1] Mikusiński J., Sikorski R.: The elementary theory of distribution. Rozprawy matematyczne XII, W-wa 1957 (lub tłumaczenie rosyjskie Moskwa 1959).

[2] Kuratowski K.: "Wstęp do teorii mnogości i topologii" W-wa 1956 PWN.

[3] Tołstow G.: "Szeregi Fouriera" W-wa 1954 PWN.

[4] Mostowski A., Stark M.: "Algebra Wyższa" Cz. III.W-wa 1954. PWN.

[5] Leja F.: "Funkcje analityczne" - W-wa 1957 PWN.

УЛЬТРА-ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

В работе дано определение ультра-обобщённых функций и доказан изоморфизм между кольцами ультра-обобщённых функций и функций аналитических в единичном круге.

ULTRA-DISTRIBUTIONS AND ANALYTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

In this paper the notion of an ultra-distribution has been discribed and has been proved an isomorphism existing between the class of ultra-distributions and the ring of analytic functions inside the unit circle.