ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z.9 Nr kol. 146

JÓZEF SZPILECKI

OSCYLACJE O ZADANEJ Z GÓRY AMPLITUDZIE

Streszczenie: Rozpatrzono oscylacje w stanie ustalonym, których krzywa zbudowana jest z dwu krzywych aperiodycznych postaci 1) i 2). Według [1] krzywe tego rodzaju mogą mieć w punktach końcowych ciągłą lub nieciągłą styczną. W pierwszym przypadku posiadają one ekstrema.

Proces scharakteryzowano przy pomocy 6 wielkości: wartości a, a_1 początkowych rzędnych częściowych krzywych, czasów x_1, x_3 odpowiadających ekstremom i czasów x_2, x_4 odpowiadających końcom krzywych częściowych. Czas liczono od początku każdej krzywej. Wyprowadzono związki między amplitudą oscylacji i powyższymi wielkościami.

1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest znalezienie takich parametrów układu, w którym odbywają się oscylacje, by amplituda tych ostatnich przybierała z góry określoną wartość.

Rozpatruje się oscylacje w stanie ustalonym, których krzywa jest zbudowana z dwu krzywych aperiodycznych.

Krzywę pierwszą przyjmujemy w postaci

$$y = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k t} + y_0 \tag{1}$$

krzywą drugą

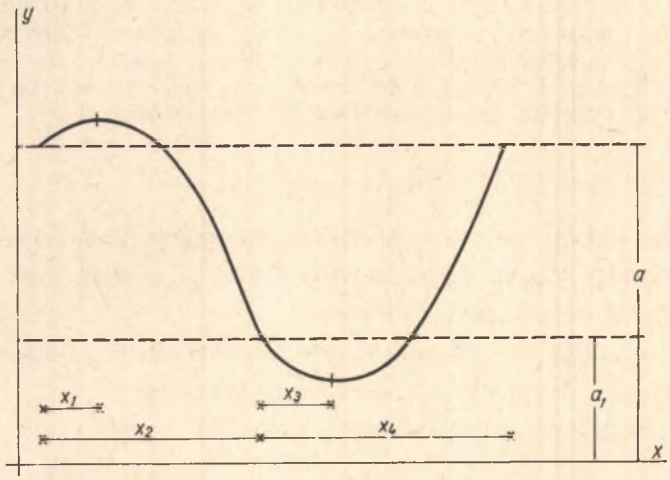
$$y = \sum_{k=1}^{n} A_k' e^{\alpha_k t} + Y_0 \tag{2}$$

gdzie A_k, A_k', y_0, Y_0 są to wielkości stałe. Występujące w wykładnikach wielkości α_k przyjmujemy rzeczywiste ujemne.

Tego rodzaju krzywe występują np. w procesach ogrzewania i ostygania układu ciał, z których jedno posiada źródło ciepła,

załączane i wyłączane w określonych chwilach przez urządzenie regulacyjne (np. termometr kontaktowy) [1]. Charakterystyczną cechą tego rodzaju krzywych jest (poza pierwszą krzywą) posiadanie ekstremów.

Tego rodzaju krzywą złożoną przedstawia rysunek 1 schematycznie. Dalsze rozumowania prowadzono najpierw w przypadku, gdy założono ciągłość krzywej na granicy dwu odcinków. Następnie przy dodatkowym założeniu, że także jest ciągła pierwsza pochodna.



Rys. 1. Schematyczne przedstawienie krzywej oscylacji

Aby uwzględnić bezwładność aparatury regulacyjnej przyjęto początkowe rzędne krzywych częściowych a i a_1. Czas liczono każdorazowo od początku danej krzywej. Własności krzywych opisywano przy pomocy parametrów $a-a_1$ oraz 4 czasów $x_1 \ldots\ldots x_4$ odpowiadających: x_1, x_3 ekstremom x2, x_4 końcom danych krzywych.

Istnieją określone związki między tymi wielkościami i ekstremami krzywych, więc też i amplitudą oscylacji. Związki te są specjalnie proste w przypadku aproksymowania krzy-

wych za pomocą parabol drugiego stopnia, co jest zawsze z pewną dokładnością możliwe, jak pokazuje rozwinięcie funkcji (1), (2) w szereg małej wartości t.

Na rysunku 1 przyjęto typ krzywej złożonej posiadającej ekstrema. Jest też drugi typ krzywych, gdy wartości ekstremalne są przybierane w chwili początkowej. Możemy go otrzymać w przypadku gdy x_1 i x_3 dążą do zera.

2. Aproksymacja krzywych wielomianami drugiego stopnia

2.1. Rozważania ogólne

Krzywe (1) i (2) aproksymujemy odpowiednio przy pomocy krzywych

$$y_2 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 \tag{3}$$

$$y_1 = a + b x + c x^2 \tag{4}$$

Do wyznaczenia pozostają stałe b, b_1, c, c_1. Z warunku ciągłości krzywej otrzymujemy warunki

$$a + b x_2 + c x_2^2 = a_1 \tag{5}$$

$$a_1 + b_1 x_4 + c_1 x_4^2 = a \tag{6}$$

Wartości ekstremalne

$$y_{1\ ekstr} = (4 a c - b^2) / 4 c \tag{7}$$

$$y_{2\ ekstr} = (4 a_1 c_1 - b_1^2) / 4 c_1 \tag{8}$$

otrzymujemy z warunków znikania pierwszych pochodnych y_1 i y_2:

$$b + 2 c x_1 = 0 \tag{9}$$

$$b_1 + 2 c_1 x_3 = 0 \tag{10}$$

Z powyższych równań otrzymujemy

$$c = (a - a_1) / x_2(2 x_1 - x_2)$$

$$c_1 = (a_1 - a) / x_4 (2 x_3 - x_4) \tag{11}$$

$$b = -2 c x_1$$

$$b_1 = -2 c_1 x_3$$

Ponieważ wielkości x_i, i=1,... 4 muszą być ze względu na swój sens dodatnie, widać z powyższych równań, że wielkości b, b_1, c, c_1 muszą spełniać pewne warunki i tak np. musi być

$$\mathrm{sign}(b\, b_1) = \mathrm{sign}\,(c\, c_1) \tag{12}$$

$$\mathrm{sign}(b\, c) = -1, \quad \mathrm{sign}(b_1 c_1) = -1$$

Inne zależności wynikają z dyskusji rozwiązań równań (5) i (6) na x_2 i x_4.

2.2. Wyznaczenie amplitudy oscylacji

Wprowadzamy dwie definicje amplitudy: a) amplitudę liczoną względem poziomu odniesienia $(a + a_1)/ 2$. Jest to możliwe przy spełnieniu pewnego warunku między stałymi b i b_1., b) amplitudę definiujemy jako połowę różnicy między ekstremami.

2.2.1. Jako poziom odniesienia przyjmujemy $y = (a+a_1)/2$
W tym przypadku jest

$$(4 a c - b^2) / 4 c = (a + a_1) / 2 + A \tag{13}$$

$$(4 a_1 c_1 - b_1^2) / 4 c_1 = (a + a_1) / 2 - A$$

gdzie A oznacza amplitudę. Podstawiając w równaniach (13) wartości (11) otrzymujemy dwa symetryczne wzory

$$A = (a - a_1)\left[x_2(2x_1 - x_2) - 2x_1^2\right] / 2x_2(2x_1 - x_2)$$

$$A = (a - a_1)\left[x_4(2x_3 - x_4) - 2x_3^2\right] / 2x_4(2x_3 - x_4) \quad (14)$$

Niesprzeczne wyniki otrzymujemy dla

$$b x_1 + b_1 x_3 = 0 \quad (15)$$

co wynika z równań (11).

2.2.1.2. Dobieranie wartości x_i do danego A

Ponieważ oba wyrażenia (14) są podobnie zbudowane, rozpatrzymy jedno z nich.

Po przekształceniach elementarnych otrzymujemy

$$x_1 - x_2 = -x_1 \sqrt{(2A + a - a_1) / (2A - a + a_1)} \quad (16)$$

Podstawiając tu

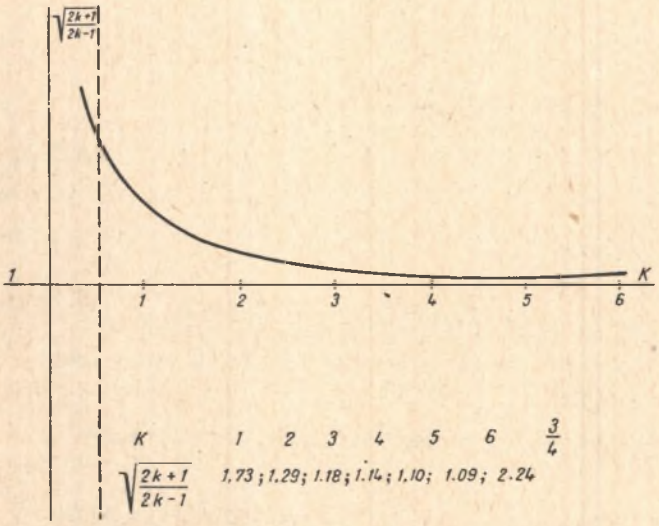
$$A = k(a - a_1) \quad (17)$$

gdzie k nowa zmienna
otrzymujemy:

$$x_1 - x_2 = -x_1 \sqrt{(2k + 1)/(2k - 1)} \quad (18)$$

Jest to równanie prostej w płaszczyźnie (x_1, x_2). Zależność współczynnika kierunkowego od k przedstawiono na rysunku 2. Widać z niego, jaka powinna być wartość parametru k, by otrzymać sensowne wartości na x_1 i x_2. Z równania (17) i (18) widać, że wartości $k = 1/2$ odpowiada brak ekstremów. Małe x_1 otrzymujemy dla k dostatecznie bliskiego wartości 1/2, ale większego.

Między czasami x_3 i x_4 istnieje podobna zależność. Ze wzoru (18) wynika, że można jedynie określić stosunek x_1/x_2 i niezależnie od niego x_3/x_4.



Rys. 2. Zależność współczynnika równania (18) od parametru k

2.2.1.3. Dodatkowe założenie o ciągłości stycznej

Jeżeli przyjmiemy ciągłość stycznej na granicy dwu krzywych, otrzymujemy warunek dodatkowy między dwu dowolnymi (dla danego k) wartościami $x_i, i = 1....4$. Warunek dodatkowy jest następujący

$$b - b_1 = -2\, c\, x_2 + 2\, c_1\, x_4 \tag{19}$$

Przy pomocy związków (11) otrzymujemy stąd

$$2\, x_1 - x_2 = 2\, x_3 - x_4 \tag{20}$$

skąd przy pomocy równania (18) i analogicznego dla x_3 i x_4 otrzymujemy związek między dwiema z wielkości $x_i, i = 1,....4$.

Występujący w nim parametr k pozwala zrealizować różne przypadki, np. $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$. Jeżeli dodatkowo postulujemy, by $x_1 = x_2/2$ i $x_3 = x_4/2$, otrzymujemy symetryczny przebieg krzywej. Wtedy krzywa może mieć kształt podobny do cosinusoidy lub sinusoidy.

2.2.2. Położenie równowagi określone jest jako połowa różnicy między obu ekstremami

W tym przypadku otrzymujemy na amplitudę oscylacji

$$A = (4\,a\,c - b^2)\,/\,8\,c - (4\,a_1\,c_1 - b_1^2)\,/8\,c_1 =$$

$$= (1/2(\left[1 - \frac{x_1^2}{x_2\,(2x_1 - x_2)} - \frac{x_3^2}{x_4(2x_3 - x_4)}\right](a-a_1) \qquad (21)$$

Wyrażenie na poziom odniesienia w tym przypadku można przedstawić następująco

$$(a+a_1)\,/\,2 - (a-a_1)\,x_3(x_1-x_3)\,/\,2\,x_4(2\,x_3-x_4) \qquad (22)$$

Wynika stąd, że obie definicje a) i b) są tym bliższe siebie, im mniejsze jest x_1 i x_3.

2.2.2.1. Dobieranie parametrów układu do danego A

Przekształcając wyrażenie (21) otrzymujemy

$$(2\,A/(a-a_1))\,(u^2 - x_1^2)\,(v^2 - x_3^2) = u^2\,v^2 - x_1^2\,x_3^2 \qquad (23)$$

gdzie oznaczono

$$u = x_2 - x_1$$
$$v = x_4 - x_3 \qquad (24)$$

Jeżeli $2A/(a-a_1)$ uważamy za parametr, zaś u, v, x_1, x_3 za zmienne, równanie (23) przedstawia pewną hiperpowierzchnię w przestrzeni 4-wymiarowej.

2.2.2.2. Dyskusja równania (23)

Ze względu na jednorodność równania możemy je doprowadzić do prostszej postaci podstawieniem

$$u = \sqrt{k_1}\, x_1$$
$$v = \sqrt{k_2}\, x_3 \tag{25}$$

Jeżeli chodzi o zakres zmienności wielkości k_1, k_2, to muszą one być tak dobrane, by były dodatnie i by były spełnione nierówności jasne z rysunku 1

$$x_2 \geqslant x_1, \qquad x_4 \geqslant x_3 \tag{26}$$

Ze względów fizykalnych musimy odrzucić przypadek x_1 lub x_3 równego zeru, gdyż wtedy musiało by też być x_2 lub x_4 równe zeru. Możemy więc przyjąć te wartości różne od zera i napisać równanie w następującej postaci

$$(2A/(a-a_1)-1)\,k_1k_2 - (2A/(a-a_1))\,(k_1+k_2) + (2A/(a-a_1)+1 = 0 \tag{27}$$

Wprowadzając nowe zmienne przy pomocy podstawienia

$$k_1 = \xi + \eta, \qquad k_2 = \xi - \eta \tag{28}$$

otrzymujemy równanie hiperboli równobocznej

$$(2A/(a-a_1)-1)^2(\xi-(2A/(a-a_1)) \,/\, ((2A(a-a_1)-1))^2 - \\ - (2A/(a-a_1)-1)^2\eta^2 = 1 \tag{29}$$

Poprzednio rozpatrzony przypadek 2.2.1 otrzymujemy dla $\eta = 0$ albo $k_1 = k_2$ wtedy

$$\xi - (2\,A/(a-a_1))/((2\,A/(a-a_1) - 1) = 1/(2\,A/(a-a_1) - 1) \qquad (30)$$

Z równania (29) widać, że do danego $A/(a-a_1)$ znajdujemy parę wartości ξ, η, stąd zaś k_1 i k_2, to zaś przy pomocy równań (25) daje związki między x_1 i x_2 oraz x_3 i x_4. Dwie z tych wielkości są dowolne.

2.2.2.3. Uwzględnienie dodatkowego warunku, dotyczącego ciągłości stycznej

Warunek (20) daje w tym przypadku związki

$$x_1(1 - \sqrt{k_1}) = x_3\,(1 - \sqrt{k_2}) \qquad (31)$$

albo

$$x_4(1 - \sqrt{k_1})\,/\,(1 + \sqrt{k_1}) = x_2(1 - \sqrt{k_2})/(1+\sqrt{k_2}) \qquad (32)$$

W tym przypadku pozostaje więc dowolna jedna z wielkości x_i, $i=1\ldots4$.

2.3. Trudności, powstające przy użyciu wielomianów interpolacyjnych wyższego stopnia

Jeżeli zamiast wielomianów drugiego stopnia użyjemy do aproksymowania krzywych wielomianów wyższego stopnia np. trzeciego lub czwartego stopnia, trudności matematyczne rosną bardzo. Pierwsza trudność polega na tym, że wielomian taki posiada więcej niewiadomych współczynników aniżeli cztery, wymaga więc do ich wyznaczenia dodatkowych warunków. Dodatkowe warunki otrzymujemy postulując ciągłość lub dany skok pierwszej, drugiej itd. pochodnej krzywych w punktach wspólnych.

Wpłynęło do Redakcji 8.IV.65 r.

LITERATURA

[1] Szpilecki Józef: Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr. dokt. Wydz. Mech. - Energet. Pol. Śl., 1959 r.

КОЛЕБАНИЯ ИМЕЮЩИЕ СРАЗУ ОПРЕДЕЛЕННУЮ АМПЛИТУДУ

Р е з ю м е

Рассмотрены в работе установившиеся колебания, кривая которых состоит из двух кривых апериодических типа 1) и 2). Согласно [1], кривые такие могут иметь в общей точке производную непрерывную или прерывистую.
В первом случае они имеют экстремумы.
Процесс описан при помощи 6 величин: а a_1 начальных ординат частных кривых, времен x_1 x_3, отвечающих экстремумам, и времен x_2 x_4, отвечающих концам частных кривых. Время считано от начала всех кривых. Получены зависимости между амплитудой осцилляций и величинами: а a_1 x_1 x_2 x_3 x_4, если кривые 1) и 2) замещены полиномами второй степени.

OSCILLATIONS WITH A GIVEN AMPLITUDE

S u m m a r y

In the paper there were considered steady oscillations, the curve of which was composed of two aperiodic curves of the form 1) and 2). The curves of this type [1] can have in the common point continuous or non-continuous first derivatives. In the first case they have extrema. The process was characterised with the help of six quantities: the a, a_1 initial ordinates of the partial curves, the times x_1, x_3 appertaining to the extremes, while the times x_2, x_4 appertain to the ends of the partial curves. The time was measured from the beginning of each curve. They were the relations given between the amplitude of the oscillations and the quantities enumerated before when the curves 1) and 2) were replaced by polynomials of the second grade.