ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 9 Nr kol. 146

STEFAN SEDLAK

O PRZYBLIŻONYM TRÓJPODZIALE KĄTA L. SAUERBECKA

Jakkolwiek sprawa dokładnego podziału dowolnego kąta na trzy równe części jest od dawna negatywnie załatwiona, pojawiają się wciąż od czasu do czasu propozycje różnych przybliżonych konstrukcji trysekcji kąta, przy czym niektóre z nich są świadomie publikowane jako przybliżone.

W okresie międzywojennym ukazały się opublikowane przez O. Perrona dwie konstrukcje trysekcji kąta, autorem których jest pewien krawiec z Ludwigshafen, nazwiskiem Kopf.

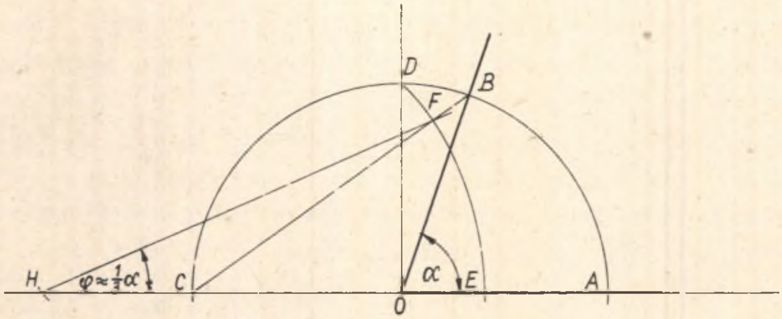
Pierwsza, bardzo prosta, a zarazem praktycznie całkiem dokładna, została podana w r. 1929 [O. Perron, S. Bermath.naturw. Kl., Bayer. Akad. Wiss. Monachium, III, 341-343; 1929], a w Polsce została opublikowana 3 lata później przez prof. dra S. Gołąba w artykule o konstrukcjach geometrycznych w szkole średniej [Poradnik Min. W.R. i O.P. nr 3/9/. 1933]. Ze względu na nieosiągalność tego artykułu obecnie, podamy tę konstrukcję poniżej.

Niech α będzie danym kątem ostrym. Z wierzchołka O kąta α zakreślamy półkole, wyznaczając na ramionach kąta punkty A i B a na przedłużeniu ramienia OA punkt C: OA=OB=OC. Prostopadła do ramienia OA, wystawiona w wierzchołku O kąta α, wyznacza na powyższym półkolu punkt D: OD=OA. Z punktu C jako środka, zakreślamy promieniem CD łuk przecinający średnicę CA w punkcie E: CE=CD. Cięciwa CB wyznacza na łuku DE punkt F. Z punktu D promieniem AC zakreślamy łuk wyznaczający na półprostej AC^+ punkt H: DH=AC. Półprosta HF^+ tworzy z półprostą HA^+ kąt

$$\varphi = \sphericalangle AHF \approx \frac{1}{3} \sphericalangle AOB = \frac{1}{3}\alpha.$$

Maksymalny błąd został oszacowany przez O. Perrona w wyż.wym. artykule i wynosi z dokładnością do 1":

$$\frac{\alpha}{3} - \varphi = 8'12".$$



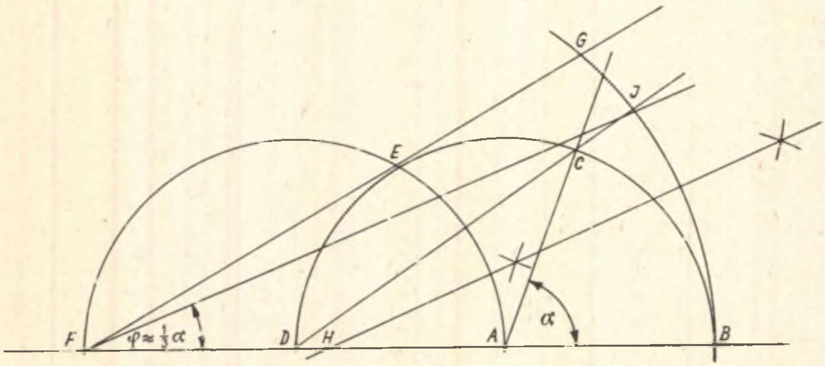
Rys. 1

Druga konstrukcja, nie tak prosta, natomiast o wiele bardziej dokładna, została ogłoszona w r. 1933 [O. Perron, S.Ber. math.-naturw. Kl., Bayer. Akad. Wiss. Monachium, H.3. 439-445, 1933]. Podane przez O. Perrona oszacowanie (obliczenia przy tym dość skomplikowane) wskazuje na rewelacyjnie mały błąd maksymalny, dla kątów ostrych nie przewyższający 15", a dla kątów mniejszych od 20° jest nawet mniejszy od 1". A oto konstrukcja:

Niech α będzie danym kątem ostrym o wierzchołku A. Z wierzchołka A jako środka kreślimy półkole wyznaczające na ramionach kąta punkty B i C, a na przedłużeniu ramienia AB - punkt D: AB=AC=AD. Z punktu D jako środka, zakreślamy tym samym promieniem DA półkole przecinające poprzednie półkole w punkcie E oraz półprostą AD^+ - w punkcie F: DF=DA. Na półprostej FE^+, zewnątrz odcinka FE, wyznaczamy punkt G tak,aby EG = AB. Symetralna odcinka GB przetnie prostą AD w punkcie H. Z punktu H jako środka, promieniem HG zakreślamy łuk GB:HB=HG.

Półprosta DC^+ wyznacza na łuku GB punkt I. Półprosta FI^+ tworzy z półprostą FB^+ kąt

$$\varphi = \sphericalangle BFI \approx \frac{1}{3} \sphericalangle BAC = \frac{1}{3}\alpha.$$



Rys. 2

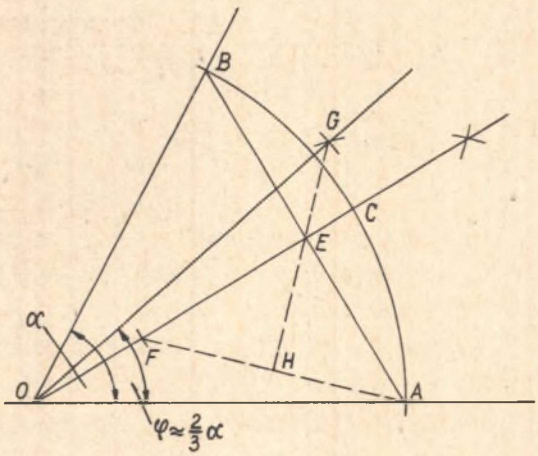
Niedawno J. Lense przedstawił na posiedzeniu Bawarskiej Akademii Nauk [J. Lense, S.-Ber. math. naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. Monachium 1950, nr 8, 107-110] inną konstrukcję pochodzącą od L. Sauerbecka, której błąd jest tego samego rzędu co błąd pierwszej wymienionej konstrukcji Kopfa. Dla oceny dokładności tej konstrukcji J. Lense stosuje do funkcji przedstawiającej błąd, kryterium rachunku różniczkowego dla ekstremum lokalnego i otrzymuje pewne równanie algebraiczne stopnia trzeciego. Wykorzystując wiadomość, że ta konstrukcja jest dla pewnych kątów dokładna (mianowicie dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oraz $\alpha = \frac{\pi}{4}$), otrzymuje kąty, przy których błąd konstrukcji jest największy.

Celem niniejszej krótkiej noty jest dojście do tego wyniku na innej drodze, a ponadto rozpropagowanie konstrukcji Sauerbecka.

Konstrukcję tę trójpodziału kąta nie większego od prostego wykonujemy następująco:

Niech α będzie danym kątem o wierzchołku O. Z wierzchołka O zakreślamy łuk wyznaczający na ramionach kąta punkty A i B: OA=OB. Dwusieczna kąta α wyznacza na łuku AB punkt C, a na cięciwie AB - punkt E. Na dwusiecznej OC wyznaczamy między punktami O i E punkt F tak, aby EF=EA. Na odcinku AF budujemy trójkąt równoboczny AFG, tak aby punkt G leżał w obszarze kąta α. Wtedy

$$\varphi = \sphericalangle AOG \approx \frac{2}{3} \sphericalangle AOB = \frac{2}{3}\alpha .$$



Rys. 3

Przyjmując układ prostokątny Kartezjusza w punkcie O za oś x oś $\overrightarrow{OA}$, a oś y tak, by punkt B miał dodatnią rzędną oraz normując jednostki tak, by $|\overline{OA}| = 1$, mamy: $A = (1;0)$, $B = (\cos\alpha; \sin\alpha)$; $E = (\cos^2 \frac{\alpha}{2}; \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2})$; $EA = EB = EF = \sin\frac{\alpha}{2}$; $OE = \cos\frac{\alpha}{2}$;
$F = (\cos^2\frac{\alpha}{2}; -\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})$; $AF = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$;

$$H=\left[\frac{1}{2}\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right);\ \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\right];$$

$$HG=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\frac{\alpha}{2};\quad OG=\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)};$$

$$G=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)+3\sin\frac{\alpha}{12}\right);\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

Stąd na kąt φ, przybliżający kąt $\frac{2}{3}\alpha$, otrzymujemy wartość

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}}$$

Różniczkowanie funkcji

$$\delta(\alpha)=\varphi-\frac{2}{3}\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12}}-\frac{2}{3}\alpha,$$

względnie funkcji

$$\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{2}{3}\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{12}\right)-2\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{2}{3}\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{12}\right)+2\sin\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{2}{3}\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$$

względem α oraz przyrównanie pochodnych do zera, prowadzi do prostego równania trygonometrycznego:

$$2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}-3.$$

Rozwiązanie tego równania (przy użyciu tablic) daje w obrębie kąta ostrego dwie wartości:

$$\alpha_1=18^\circ 42'42'',\qquad \alpha_2=71^\circ 17'18''.$$

Wstawiając te wartości do $\delta(\alpha)=\varphi-\frac{2}{3}\alpha$, otrzymujemy błąd rzędu

$$8'12'',$$

a więc praktycznie zaniedbywalny. Jak powiedzieliśmy, rząd tego błędu jest taki sam, jak dla konstrukcji Kopfa, z tą różnicą, że dla konstrukcji Kopfa maksymalny błąd jest osiągalny dla innych kątów.

Wpłynęło do Redakcji 6 IV.1965 r.

ОБ ПРИБЛИЖЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ ТРИСЕКЦИИ УГЛА Л. ЗАВЕРБЕЦКА

Р е з ю м е

Эта заметка представляет новую, более простую оценку максимальной погрешности приближенной конструкции трисекции угла Л. Завербеха, изложенной И. Ленсом в 1950 году.

ABOUTH THE APPROXIMATIVE CONSTRUCTION
OF THE DISSECTION OF THE ANGLE
IN THREE EQUAEL PARTS GIVEN BY L. SAUERBECK

S u m m a r y

This paper gives a new and more simple evaluation of maximal error in the approximative construction of the dissection of the angle in three equal parts given by L. Sauerbeck and published by J. Lense in 1950.