ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 9 Nr kol. 146

WŁADYSŁAW MORYTKO

O PEWNYM RÓWNANIU FUNKCYJNYM

W pracy [4] B. Choczewski i M. Kuczma podają metodę rozwiązania równania funkcyjnego postaci:

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = F\left[\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n)}(\xi), g(\xi), g'(\xi), \ldots, g^{(m)}(\xi)\right]$$

gdzie $f(x)$ i $g(x)$ są funkcjami szukanymi, zaś $\xi = \xi(x, y)$ i $F(\xi, u_0, u_1, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_m)$ funkcjami danymi.

W niniejszej pracy podamy rozwiązanie równania postaci:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = F\left[\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n)}(\xi)\right] \tag{1}$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją szukaną, zaś $\xi = \xi(x,y)$ i $F(\xi, u_0, u_1 \ldots u_n)$ są funkcjami danymi.

Będziemy przy tym, zakładali, że $f(x)$ jest klasy C^n w jakimś przedziale J (skończonym lub nie). Niech funkcja $f(x)$ spełnia równanie (1) dla $x, y \in J$ i niech $\xi = \xi(x,y) \in J$ będzie klasy C^1 w kwadracie $Q = J\mathrm{x}J$ oraz niech $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$ w Q. Istnieje zatem funkcja $y = u(x,z)$ odwrotna do funkcji $z = \xi(x, y)$ względem drugiej zmiennej. Podstawiając w (1) $y = u(x,z)$ otrzymujemy:

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = F\left[z, f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z)\right] \tag{2}$$

dla $x \neq u(x,z)$. Stąd

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = 0 \tag{3}$$

Po wykonaniu w (3) różniczkowania i po pomnożeniu przez mianownik otrzymujemy:

$$\left[f'(x) - f'(u).u_x\right] (x - u) - \left[f(x) - f(u)\right] (1 - u_x) = 0 \tag{4}$$

gdzie przez u_x oznaczyliśmy pochodną $\frac{\partial}{\partial x} u(x,z)$.
Ustalmy teraz dowolne $\alpha \neq 0$ należące do J i połóżmy w (4) $z = \xi(x,\alpha)$ oznaczając $f(\alpha) = p$ i $f'(\alpha) = q$.
Otrzymujemy więc wobec $u\left[x, \xi(x,\alpha)\right] = \alpha$

$$\left[f'(x) - q\bar{u}_x\right] (x - \alpha) - \left[f(x) - p\right] (1 - \bar{u}_x) = 0$$

gdzie

$$\bar{u}_x = u_x\left[x, \xi(x,\alpha)\right] = \frac{\xi_x(x,\alpha)}{\xi_y(x,\alpha)} \tag{5}$$

lub po przekształceniu

$$(x-\alpha)\left[f'(x) - q\right] = (1 - \bar{u}_x).\left[f(x) - qx + q\alpha - p\right] \tag{6}$$

Gdy podstawimy $g(x) = f(x) - qx + q\alpha - p$ wtedy (6) przyjmie postać

$$(x - \alpha).\, g'(x) = (1 - \bar{u}_x).g(x) \tag{7}$$

co daje $g(x) = C.\exp.\int \frac{I - \bar{u}_x}{x - \alpha}\, dx.$

Uwzględniając podstawienie prowadzące z (6) do (7) otrzymujemy

$$f(x) = C.\exp\int \frac{1 - \bar{u}_x}{x - \alpha} dx + qx + (p - q\alpha) \tag{8}$$

Powyższe wyniki możemy sformułować w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja $\xi(x,y)$ jest klasy C^1 w kwadracie $Q = J \times J$ oraz jeżeli $f(x)$ jest klasy C^n w J i spełnia dla $x,y \in J$ $x \neq y$ równanie (1), to jest ona kształtu (8), gdzie $\alpha \neq 0$ jest dowolnym lecz ustalonym punktem z J, zaś $\bar{u}_x$ jest określone przez (5), a p,q i C są dowolnymi stałymi.

Wynika stąd następujący:

Wniosek

Pod założeniem twierdzenia 1 równanie (1) może posiadać co najwyżej trójparametrową rodzinę różniczkowalnych rozwiązań.

Niech teraz $\xi = \frac{x+y}{2}$, skąd $y = 2\xi - x$, czyli $\bar{u}_x = -1$. Podstawiając $\bar{u}_x = 1$ do (8) otrzymamy:

$$f(x) = C(x-\alpha)^2 + qx + (p - q\alpha) = Cx^2 + bx + a \tag{9}$$

Zbadamy teraz jakiej postaci musi być funkcja $F(\xi, t_o, t_1 \ldots t_n)$ aby równanie (1) miało rozwiązania postaci (9) przy $\xi = \frac{x+y}{2}$. Ponieważ z (9) wynika, że $f'''(x) = 0$, więc wystarczy funkcję F przyjąć w postaci $F\left[\xi, f(\xi), f'(\xi), f''(\xi)\right]$.

Tak więc rozpatrzymy obecnie równanie:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = F\left[\frac{x+y}{2}, f\left(\frac{x+y}{2}\right), f'\left(\frac{x+y}{2}\right), f''\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] \tag{10}$$

Przyjmując, że jest ono spełnione przez funkcje kwadratowe postaci (9), otrzymujemy po podstawieniu do (10):

$$C(x+y) + b = F\left[\frac{x+y}{2}, C\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+y}{2}\right) + a, C(x+y) + b, 2C\right].$$

Oznaczając $\frac{x+y}{2} = t_o$, $C\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + a = t_1$,

$C(x+y) + b = t_2$, $2C = t_3$, mamy $F(t_o, t_1, t_2, t_3) = t_2$, a więc prawa strona (10) musi mieć postać $f'(\frac{x+y}{2})$. Mamy więc następujące:

Twierdzenie 2

Jeżeli równanie (1) dla $\xi = \frac{x+y}{2}$, ma być spełnione przez trójparametrową rodzinę postaci (9), to musi ono być postaci

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\frac{x + y}{2}) \tag{11}$$

Uwaga

Z twierdzenia 1 wynika, że jedynymi funkcjami, które realizują wartość średnią o połowie są funkcje stałe, funkcje liniowe i trójmiany kwadratowe, gdyż równanie (11) jest spełnione przez (9) dla dowolnych wartości parametrów a, b i C.

Jeżeli $\xi = x+y$ to rozwiązanie (8) przyjmie również postać (9), ale wtedy (10) otrzyma postać:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x+y) - \frac{x+y}{2}.f''(x+y) \tag{12}$$

Równanie (12) jest również spełnione przez trójmiany kwadratowe dla dowolnych wartości a, b i C.
Tymi uwagami kończymy niniejszą pracę.

Wpłynęło do Redakcji 21.12.64 r.

LITERATURA

[1] Choczewski B., Kuczma M.: Sur certaines équations fonctionnelles considérées par I. Stamate, Mathematica, Cluj, 4 (27) (1962), 225-233.

О НЕКОТОРОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Р е з ю м е

Автор дает в работе решение функционального уравнения (1) где $f(x)$ искомая функция, $\xi = \xi(x, y)$ любая функция класса C^1 имеющая функцию обратную относительно y. Автор доказывает что уравнение (1) может иметь не больше чем трёхпараметровое семейство решений.
Разсмотрено несколько частных случаев этого уравнения.

ÜBER EINE FUNKTIONALGLEICHUNG

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dieser Arbeit ist die Lösung der Gleichung von der Form (1) gegeben, wobei $f(x)$ die gesuchte Funktion, und $\xi = \xi(x,y)$ eine beliebige Funktion der Klasse C^1 ist, welche man in bezug auf y unkehren kann. Der Autor beweist, das du Gleichung (1) höchstens eine dreiparametrische Schar von Lösungen haben kann. Später betrachtete man einige spezielle Fälle dieser Gleichung.