ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 10 Nr kol. 162

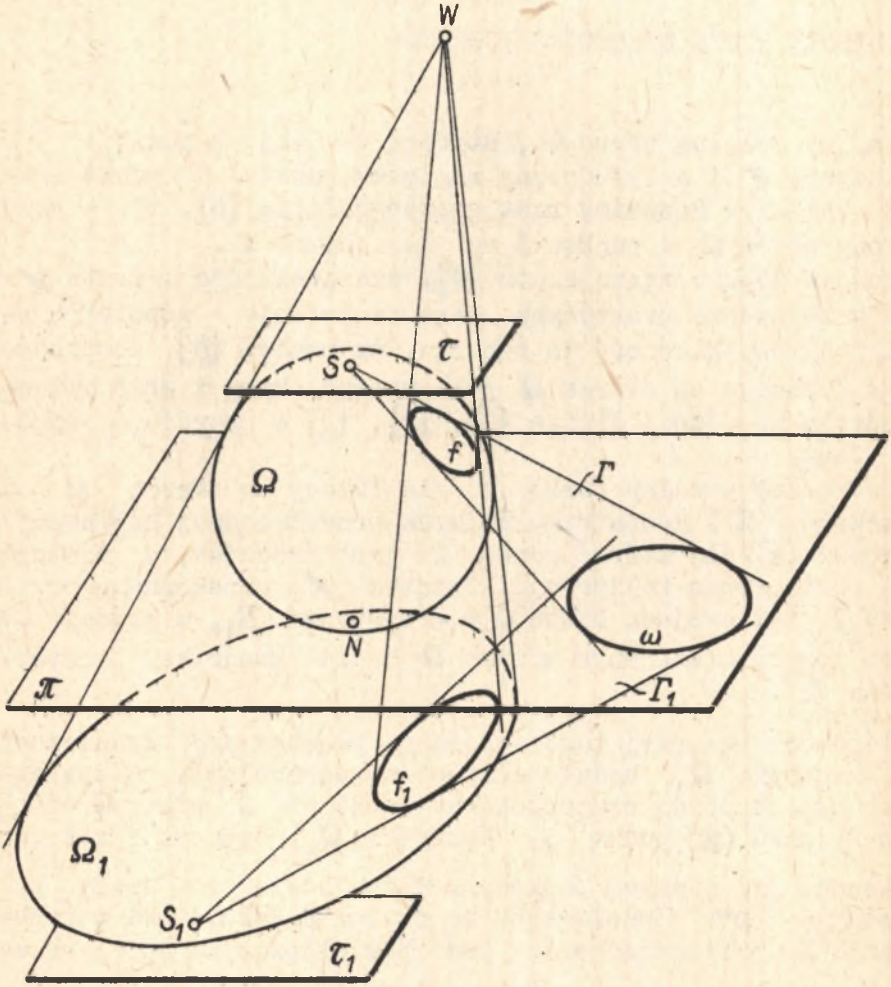
MARIAN PAIEJ

UOGÓLNIENIE RZUTU STEREOGRAFICZNEGO

Przyjmijmy dowolną sferę Ω, styczną do niej w punkcie N płaszczyznę π i antypodyczny względem punktu N punkt sfery S (rys.1). Rozważmy rzut stereograficzny [σ], tj. rzut środkowy sfery Ω z punktu S na płaszczyznę π.
Własnością dobrze znaną rzutu [σ], uzasadniającą zresztą jego duże znaczenie praktyczne jest zachowanie współokręgowości punktów. Własność ta oznacza, że rzutem [σ] dowolnego okręgu leżącego na sferze Ω jest zawsze okrąg i może być wyprowadzona na różnej drodze [1], [2], [3] w oparciu o symetrię sfery.

Wprowadźmy dowolny punkt W nie leżący na sferze Ω i płaszczyźnie π. Rozpatrzmy związek przestrzennej kolineacji środkowej ($\varkappa$), dla której punkt W jest środkiem, a rzutnią π - płaszczyzną kolineacji. Związek ($\varkappa$) przekształca przestrzeń Σ zawierającą sferę Ω w przestrzeń Σ_1, w której utworem przyporządkowanym sferze Ω będzie kwadryka krzywoliniowa Ω_1.

W zależności od przyjętego położenia płaszczyzny granicznej $\nu \parallel \pi$ kwadryka Ω_1 będzie elipsoidą, paraboloidą eliptyczną lub hiperboloidą dwupowłokową. Punktowi S sfery Ω odpowie w związku ($\varkappa$) punkt S_1 kwadryki Ω_1, będący, jak łatwo to okazać, jej punktem pępkowym. Weźmy bowiem pod uwagę pęk płaszczyzn (p^∞) równoległych do rzutni π. Pękowi (p^∞) w przestrzeni Σ przyporządkowany jest pęk płaszczyzn (p_1^∞) w przestrzeni Σ_1, przy czym zachodzi: $p^\infty \equiv p_1^\infty$. Przekrojom kołowym sfery Ω płaszczyznami pęku (p^∞) odpowiadają również kołowe przekroje kwadryki Ω_1 płaszczyznami pęku (p_1^∞) gdyż dzięki równoległości płaszczyzn obydwu pęków przekroje te są środkowo-podobne o środku podobieństwa w punkcie W.



Rys. 1

Płaszczyzna τ styczna do sfery Ω w punkcie S należy do pęku (p^{∞}). Wynika stąd, że przyporządkowana jej płaszczyzna τ_1 styczna do kwadryki Ω_1 w punkcie S_1 należy do pęku (p_1^{∞}), a to z kolei oznacza, że punkt S_1 jest istotnie punktem pępkowym powierzchni Ω_1.

Jest oczywiste, że w przypadku przynależności punktu W do prostej SN, kwadryka kolineacyjna ze sferą Ω jest powierzchnią obrotową, a punkt S_1 stanowi jeden z jej wierzchołków.

Weźmy pod uwagę okrąg f będący przekrojem sfery Ω dowolną płaszczyzną φ. Płaszczyźnie $\varphi \in \Sigma$ odpowie w przestrzeni Σ_1 płaszczyzna φ_1, a okręgowi $f = \varphi\Omega$ - stożkowa $f_1 = \varphi_1\Omega_1$. Rzućmy okrąg f z punktu S na płaszczyznę π. Zgodnie z własnością rzutu stereograficznego otrzymujemy okrąg ω jako przecięcie rzutnią π rzutującej powierzchni stożkowej Γ o wierzchołku w punkcie S. Zauważmy, że powierzchni $\Gamma \in \Sigma$ w związku kolineacji $(\varkappa)$ odpowiada powierzchnia stożkowa $\Gamma_1 \in \Sigma_1$ o kierującej f_1 i wierzchołku w punkcie S_1. Pary przyporządkowanych sobie tworzących powierzchni Γ i Γ_1 przecinają się w punktach leżących na płaszczyźnie kolineacji π, a to oznacza, że powierzchnia stożkowa Γ_1 przechodzi również przez okrąg ω.

Z rozumowania powyższego można wyciągnąć wniosek, że rzuty wszystkich stożkowych f_{1i} powierzchni Ω_1 z punktu S_1 na płaszczyznę π przyporządkowane okręgom f_i sfery Ω są okręgami. Jest jednak oczywiste, że każdej krzywej płaskiej leżącej na kwadryce Ω_1 odpowiada w związku kolineacji $(\varkappa)$ określony okrąg sfery Ω. Wynika stąd możność sformułowania następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1

Dowolna stożkowa krzywoliniowej kwadryki Ω_1 nie przechodząca przez jej punkt S_1, rzucona z punktu S_1 na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej w tym punkcie względem kwadryki Ω_1 jest zawsze okręgiem.

Warto zauważyć, że twierdzenie 1 mieści w sobie twierdzenie o prostokątnym rzutowaniu na okręgi wszystkich elips (i okręgów) leżących na paraboloidzie obrotowej wówczas kiedy płaszczyzna rzutów jest prostopadła do osi tej paraboloidy. Przypadek taki jest bowiem szczególnym przypadkiem przekształcenia sfery Ω w kwadrykę Ω_1, w którym punkt S_1 staje się punktem niewłaściwym (płaszczyzna graniczna ν związku $(\varkappa)$ zajmuje wówczas położenie styczne względem sfery Ω w punkcie S). W tej sytuacji dowody powyższej własności paraboloidy obrotowej [4], [5] można uważać za zbyt okrężne.
Weźmy z kolei pod uwagę powinowate przekształcenie (ϱ) przestrzeni Σ_1 w przestrzeń Σ_2. Załóżmy przy tym, że płaszczyzna powinowactwa jest różna od płaszczyzny kolineacji π, a kierunek powinowactwa nie jest do niej równoległy.
Jest oczywiste, że powinowactwo (ϱ) przekształca krzywoliniową kwadrykę Ω_1, w kwadrykę krzywoliniową Ω_2, a płaszczyznę $\pi = \pi_1$ w płaszczyznę π_2. Utworom φ_1, f_1, Γ_1 i ω w związku (ϱ) odpowiednio przyporządkowane będą utwory φ_2, f_2, Γ_2 i ω_2 z zachowaniem relacji incydencji i stosunku pojedyńczego podziału. Okręgi ω_1 płaszczyzny $\pi = \pi_1$ zostaną przekształcone w elipsy ω_{2i} płaszczyzny π_2, przy czym mimośrody tych elips będą równe, a kierunki ich osi identyczne. Oznacza to, że wszystkie elipsy $\omega_{2i} \in \pi_2$ będą podobnie położone. Zauważmy, że punkt S_2 kwadryki Ω_2 nie jest żadnym jej punktem szczególnym, natomiast przekrój tej kwadryki płaszczyzną równoległą do płaszczyzny stycznej τ_2 w punkcie S_2 jest stożkową podobną i podobnie położoną względem elips ω_{2i} płaszczyzny π_2.

Podsumujmy powyższe rozważania. W wyniku złożenia przekształceń $(\varkappa)$ i (ϱ) uzyskaliśmy przyporządkowanie, w którym odpowiadają:

1) sferze Ω - dowolna kwadryka krzywoliniowa Ω_2,

2) biegunowi S - nieszczególny punkt kwadryki S_2,

3) płaszczyźnie τ stycznej do sfery w punkcie S - płaszczyzna τ_2 styczna do kwadryki Ω_2 w punkcie S_2,

4) rzutni $\pi \parallel \tau$ - płaszczyzna $\pi_2 \parallel \tau_2$.

Wprowadźmy następujące określenie:
rzutem krzywoliniowej powierzchni stopnia drugiego Ω_2 z dowolnego jej punktu S_2 na dowolną płaszczyznę π_2 równoległą do płaszczyzny τ_2 stycznej w punkcie S_2 nazywamy uogólnionym rzutem stereograficznym.
Korzystając z powyższego określenia, wnioski z przeprowadzonych rozważań ująć można w postaci kolejnego, ogólniejszego twierdzenia.

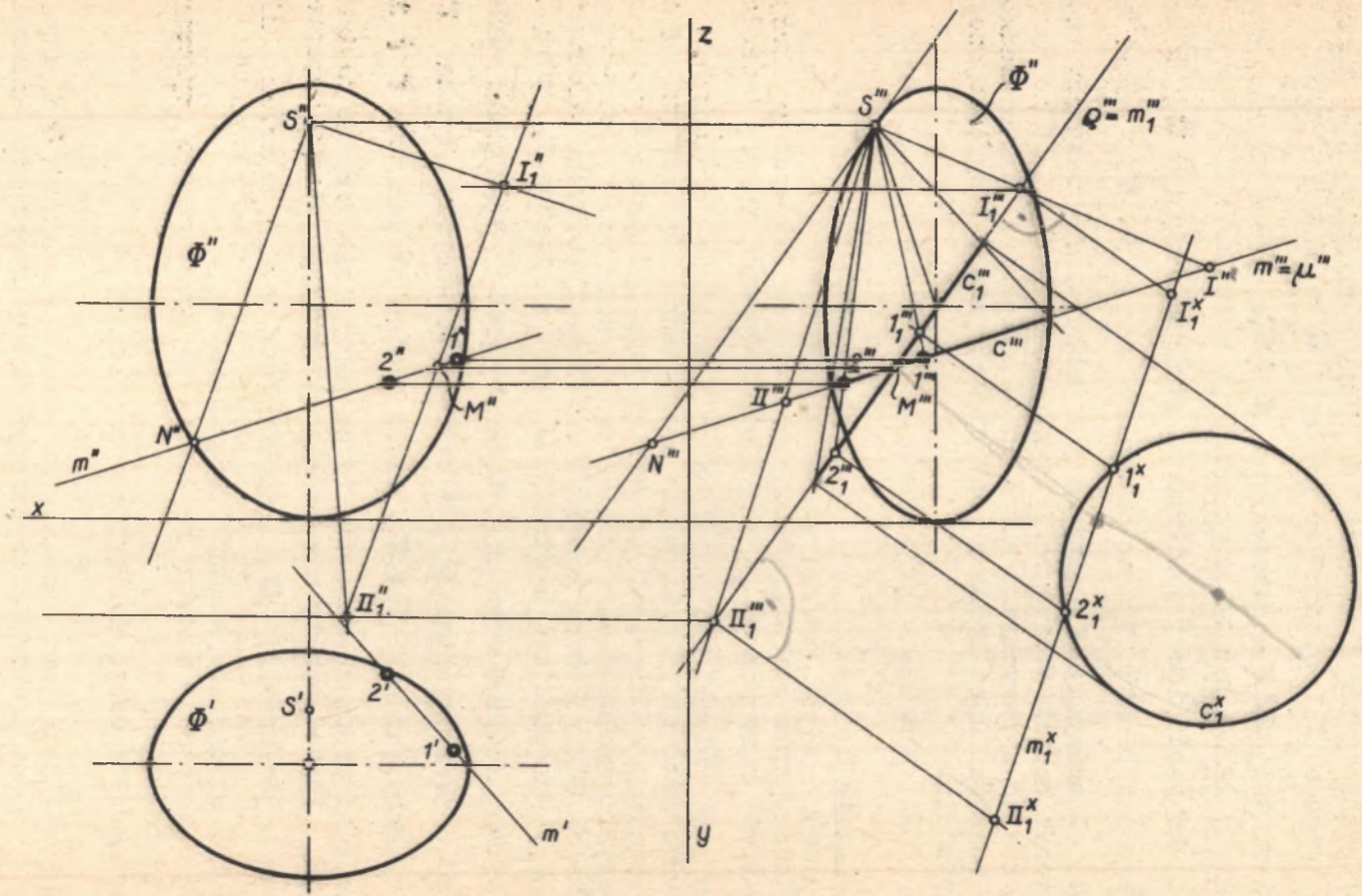
Twierdzenie 2

Uogólniony rzut stereograficzny stożkowych leżących na krzywoliniowej kwadryce Ω_2 i nieprzechodzących przez środek rzutu jest zbiorem elips podobnych i podobnie położonych.

Warto zauważyć, że wzmianka o elipsach w sformułowaniu twierdzenia 2 nie jest zawężeniem jego ogólności lecz konsekwentnie wynika z określenia uogólnionego rzutu stereograficznego. Gdyby bowiem rozważyć dowolną płaszczyznę jako rzutnię π_2, przecinającą kwadrykę Ω_2 np. w hiperboli, wówczas nie byłoby możliwe wskazanie takiego punktu $S_2 \in \Omega_2$, jako środka rzutu stereograficznego, w którym płaszczyzna styczna τ_2 spełniałaby warunek: $\tau_2 \parallel \pi_2$. Każda bowiem płaszczyzna $\tau_2 \parallel \pi_2$ przechodzi przez te same dwa różne punkty niewłaściwe powierzchni Ω_2 (przez punkty niewłaściwe tworzących stożka asymptotycznego powierzchni Ω_2, równoległych do τ_2), a zatem nie może być styczna do kwadryki krzywoliniowej.

Na zakończenie wskażmy na możliwość praktycznego wykorzystania twierdzeń 1 i 2.
Weźmy np. pod uwagę następujący przykład:

Zadanie 1. Dana jest dowolna, nieobrotowa kwadryka Φ i dowolna prosta m. Wyznaczyć punkty przebicia kwadryki Φ prostą m (rys.2).


z
x
y
S''
S'''
Φ''
Φ'''
Φ'
S'
I''₁
I'''₁
Q''' = m'''₁
I'''
m''' = μ'''
I^x₁
C'''₁
C'''
1'''₁
1'''
M'''
II'''
N'''
2'''₁
1''
2''
M''
N''
m''
1^x₁
2^x₁
C^x₁
m^x₁
II^x₁
II''₁
II'''₁
2'
1'
m'

Rys. 2

Rozwiązanie

Przez prostą m prowadzimy dowolną płaszczyznę μ tnącą kwadrykę Φ w stożkowej c nieprzechodzącej przez punkt pępkowy S. Obieramy dowolną płaszczyznę ϱ równoległą do płaszczyzny stycznej do kwadryki w punkcie S i rzucamy na nią z punktu S prostą m oraz stożkową c. Otrzymujemy prostą m i okrąg c_1, których punkty wspólne 1_1 i 2_1, odniesione na prostą m za pomocą promieni rzutujących dają rozwiązanie. Jest widoczne, że konstrukcja powyższa prowadzi do pewnych uproszczeń w zagadnieniach dotyczących przenikania się kwadryk krzywoliniowych z kwadrykami prostoliniowymi.

Wpłynęło do Redakcji 12.10.65 r.

LITERATURA

[1] Hilbert D., Cohn-Vossen S.: "Geometria poglądowa".Warszawa 1956. PWN str. 228.

[2] Grochowski B., Biernawski A.: "Geometria wykreślna" Warszawa 1962. Stud. Zaoczn. Wiecz. Szk. Inż. str. 257.

[3] Uszakow I.N.: "Gornaja geometria". Moskwa 1962.Gostechizdat, str. 61.

[4] Kounowsky I., Vycichlo F.: "Deskriptiwni geometrie". Praha 1953. Nakladatelstvi Cesko-Slovenske Akademie VED- str. 442.

[5] Palej M.: "O pewnej własności pęku okręgów", Gliwice 1964. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Matematyka-Fizyka Nr 5,str. 59.

О НЕКОТОРОМ ОБОБЩЕНИИ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Р е з ю м е

Основываясь на гомологии в пространстве автор выводит две теоремы касающиеся проекции произвольного сечения нелинейчатой поверхности второго порядка из произвольной точки этой поверхности на плоскость параллельную касательной плоскости в центре проекции.

Использование свойств такой обобщенной стереографической проекции показано на примере конструкции точек пересечения произвольной нелинейчатой поверхности произвольной прямой.

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION

Z u s a m m e n f a s s u n g

Auf Grund der Eigenschaften von räumlicher Kollineation sind in der Arbeit zwei Sätze bewiesen, die verallgemeinerte stereographische Projektion betreffen. Es handelt sich hier um Projektionen beliebiger Durschnittskurven der Fläche 2-ter Ordnung aus einem beliebigen Punkte dieser Fläche auf die Projektionsebene, die mit der Tangentialebene im Zentrum der Projektion zueinander parallel ist.

Die Anwendung der verallgemeinerten stereographischen Projektion ist in der Konstruktion von Durchschnittspunkten einer Fläche 2. Ordnung mit beliebiger Gerade bewiesen.