ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z.10 Nr kol. 162

JULIAN SIUREK

ZASTOSOWANIE HIPERRZUTNI DO UOGÓLNIENIA METODY MONGE'A NA EUKLIDESOWĄ PRZESTRZEŃ CZTEROWYMIAROWĄ [1)]

Streszczenie. Dla odwzorowania figur przestrzeni czterowymiarowej metodą Monge'a autor wyróżnia w tej przestrzeni hiperpłaszczyzny wzajemnie prostopadłe i przyjmuje je za hiperrzutnie. Rzuty prostokątne figur tej przestrzeni czterowymiarowej na przyjęte hiperrzutnie nazywa hiperrzutami, punkty wspólne zaś tych figur z hiperrzutniami nazywa hipersladami. Hiperzuty i hipersłady figur odwzorowuje dalej metodą Monge'a na płaszczyźnie.

Szczegółowo omówione są rzuty punktu, prostej, płaszczyzny i hiperpłaszczyzny oraz wyprowadzone są uogólnione wykreślne warunki ich przynależności (incydencji).

---

1) Zagadnienie odwzorowania przestrzeni 4-wymiarowej znane jest już od wielu lat i związane jest z ogólnymi rozważaniami nad geometrią tej przestrzeni. Opracowano już kilka różnych metod odwzorowania. Jeśli chodzi o metodę rzutu prostokątnego, która jest podstawą metody Monge'a. to najszerzej rozwinął ją P.H. Schoute (Mehrdiemensionale Geometrie T.I-1902 i T.II-1903) podając zasady odwzorowania na płaszczyźnie w układzie czterech osi wzajemnie prostopadłych x_1, x_2, x_3, x_4 i parę przykładów najprostszych konstrukcji. Nie rozwija on jej jednak dalej i nie wyprowadza żadnych uogólnień, a zastosowane oznaczenia służą raczej do ułatwienia opisu rysunków niż dla celów konstrukcyjnych.

Niniejsza praca jest próbą znalezienie związków i analogii między geometrią wykreślną przestrzeni 3-wymiarowej i 4-

Metoda Monge'a polega na odwzorowaniu elementów przestrzeni trójwymiarowej na płaszczyźnie za pomocą rzutowania prostokątnego na dwie (lub więcej) wzajemnie prostopadłe płaszczyzny zwane rzutniami i następnie sprowadzania tych płaszczyzn do wspólnej płaszczyzny rysunku przez obrót dokoła ich wspólnej krawędzi zwanej osią rzutów.

W euklidesowej przestrzeni 4-wymiarowej przestrzeń 3-wymiarowa (euklidesowa) jest hiperpłaszczyzną, przy czym istnieją co najmniej dwie wzajemnie prostopadłe (w sensie zwykłym-czyli częściowo prostopadłe) hiperpłaszczyzny przecinające się we wspólnej płaszczyźnie.

Ponieważ przez każdy punkt P przestrzeni 4-wymiarowej przechodzi tylko jedna prosta prostopadła do danej hiperpłaszczyzny, a mająca z nią tylko jeden punkt wspólny P^1 będący rzutem prostokątnym punktu P na tę hiperpłaszczyznę, więc odpowiednikiem metody Monge'a będzie w 4-wymiarowej przestrzeni euklidesowej metoda odwzorowania polegająca na rzutowaniu prostokątnym elementów tej przestrzeni na dwie (lub więcej) wzajemnie prostopadłe hiperpłaszczyzny zwane dalej hiperrzutniami i sprowadzeniu ich do wspólnej hiperpłaszczyzny, w której można już stosować zwykłą metodę Monge'a dla otrzymania rzutów na płaszczyźnie rysunku.

Wprawdzie można również rzutować prostokątnie w przestrzeni 4-wymiarowej bezpośrednio na dwie wzajemnie prostopadłe w sensie wyższym (ściśle prostopadłe) płaszczyzny mające tylko jeden punkt wspólny, ale sposób ten nie oddaje istoty metody Monge'a i nie pozwala na uogólnienie konstrukcji wykreślnych tej metody na przestrzeń 4-wymiarową.

Poza tym zastosowanie hiperrzutni pozwala łatwiej przystosować abstrakcyjne pojęcia i konstrukcje geometrii wykreśl-

---

Cd notki 1 ze strony 11,

wymiarowej oraz opracowania uogólnionych zasad konstrukcyjnych w metodzie Monge'a, pozwalających na traktowanie stosowanych obecnie konstrukcji i oznaczeń jako szczególny przypadek ogólniejszej metody ważnej dla przestrzeni 4-wymiarowej.

W tym celu autor wprowadza nowe, oryginalne oznaczenia i w oparciu o nie wyprowadza przykładowo konstrukcyjne uogólnienia metody Monge'a w przypadku incydencji. Autor uważa, że w ten sposób można uprzystępnić w większym stopniu geometrię wykreślną przestrzeni 4-wymiarowej dla celów dydaktycznych i zastosowań technicznych.

nej 4-wymiarowej do interpretacji technicznej lub fizycznej przez przyjęcie np. jednej z hiperrzutni jako "liniowej przestrzeni brył rzeczywistych", co odpowiadałoby pojęciu "rzutni poziomej" w zwykłej metodzie Monge'a a drugiej hiperrzutni jako "liniowej przestrzeni parametrycznej", gdzie parametrem może być dowolna wielkość fizyczna (np. czas),co odpowiadałoby znowu pojęciu "rzutni pionowej".

Poniżej na przykładzie przynależności elementów przedstawimy możliwość uogólnienia konstrukcji podstawowych metody Monge'a na euklidesową przestrzeń 4-wymiarową.
W tym celu najpierw wprowadzimy pojęcia i oznaczenia, którymi później będziemy się posługiwali oraz omówimy zasady odwzorowania elementów przestrzeni 4-wymiarowej tą metodą.

1. Pojęcie hiperrzutu (rzutu przestrzennego)

H i p e r r z u t e m punktu w przestrzeni 4-wymiarowej będziemy nazywali rzut prostokątny tego punktu na hiperpłaszczyznę (hiperrzutnię).
Łatwo wykazać, że hiperrzutem prostej jest prosta,a hiperrzutem płaszczyzny jest również płaszczyzna przynależna do danej hiperrzutni [1] [4].

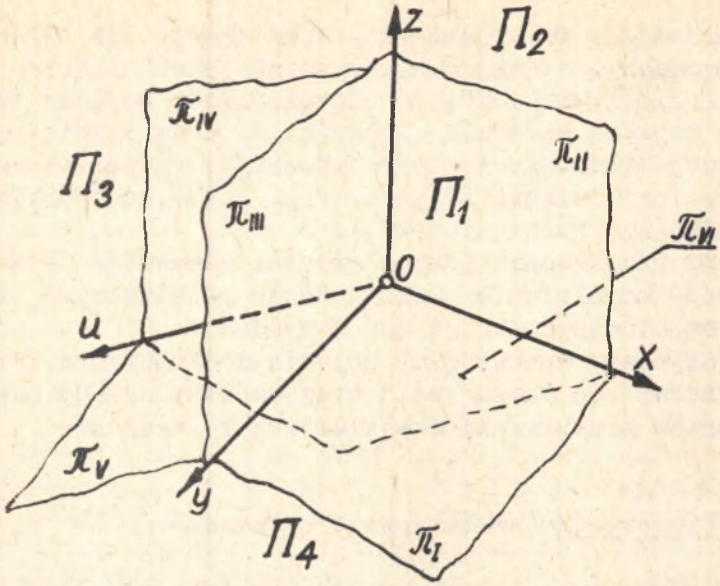
2. Pojęcie hiperśladu (śladu przestrzennego)

H i p e r ś l a d e m prostej będziemy nazywali punkt wspólny prostej z hiperrzutnią.
Można również łatwo wykazać, że hiperśladem płaszczyzny jest prosta, a hiperśladem hiperpłaszczyzny jest płaszczyzna przynależna do danej hiperrzutni [1] [4].

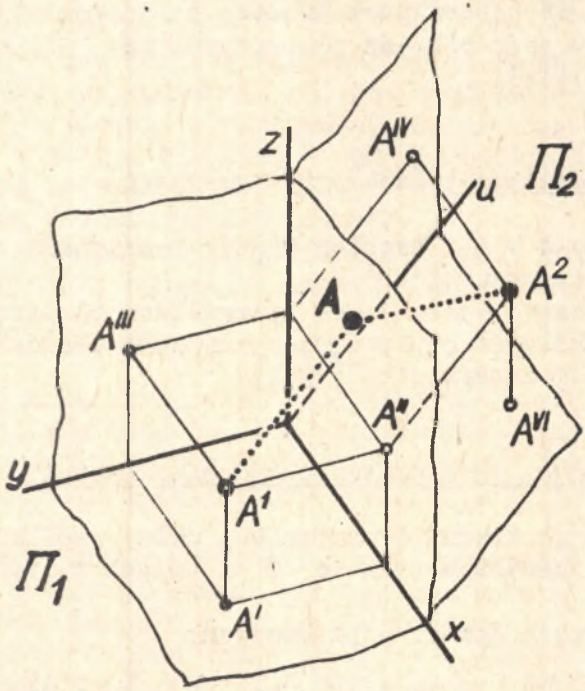
3. Czterowymiarowy prostokątny układ hiperrzutni

Przyjmijmy w przestrzeni 4-wymiarowej układ współrzędnych prostokątnych o początku w punkcie O i osiach x, y, z, u, (rys. 1).
Osie te wyznaczają parami 6 płaszczyzn:

$\pi_I = xy \quad \pi_{II} = xz \quad \pi_{III} = yz \quad \pi_{IV} = zu \quad \pi_V = uy \quad \pi_{VI} = ux$


z
Π2
π IV
π II
Π3
π III
Π1
π VI
O
u
x
π V
y
Π4
π I

Rys. 1


z
A IV
u
Π2
A
A 2
A III
A II
A VI
y
A 1
Π1
A'
x

Rys. 2

oraz trójkami 4 hiperpłaszczyzny (przestrzenie 3-wymiarowe):

$$\Pi_1 = xyz; \quad \Pi_2 = xzu; \quad \Pi_3 = yzu; \quad \Pi_4 = xyu;$$

W dalszym ciągu proste x, y, z, u będziemy nazywali osiami rzutów, płaszczyzny π_I .... π_{VI} - płaszczyznami rzutów lub rzutniami, a hiperpłaszczyzny Π_1 ....Π_4 - hiperrzutniami przy czym hiperrzutnie Π_1 i Π_2 oraz rzutnie π_I, π_{II}, π_{IV} będziemy nazywali g ł ó w n y m i.

4. Zasada oznaczania rzutów

Hiperrzuty punktu A będziemy oznaczali odpowiednio: A^1, A^2, A^3, A^4; hiperrzuty prostej: a^1, a^2, a^3, a^4; hiperrzuty płaszczyzny α: α^1, α^2, α^3, α^4. Każdy z hiperrzutów można następnie zrzutować prostokątnie w jego przestrzeni rzutów (hiperrzutni) na rzutnie wyznaczające tę przestrzeń (rys. 2). Otrzymamy w ten sposób 6 rzutów na rzutniach π_I do π_{VI}, które to rzuty oznaczymy tak, jak w zwykłej metodzie Monge'a:

rzuty punktu - A', A'', A''', A^{IV}, A^{V}, A^{VI}

rzuty prostej - a', a'',..... a^{VI}.

Rzuty i hiperrzuty na rzutniach i hiperrzutniach głównych będziemy nazywali głównymi.

Hiperślady oznaczać będziemy cyframi arabskimi odpowiadającymi numerom hiperrzutni i umieszczonymi przed symbolem elementu np: 1a, 2a, 1α, 4α, 2Π itd, natomiast zwykłe ślady na rzutniach - cyframi rzymskimi umieszczonymi przed znakami elementów np.: Ia, IIa, $I\alpha$, $IV\Pi$ itd.
Ślady hiperrzutów: Ia^1, IIa^1. $I\alpha^1$ itd.
ślady hiperśladów: $I(1\alpha)$, $IV(2\Pi)$, itd.

4. Sprowadzenie przestrzennego układu rzutni do wspólnej płaszczyzny rysunku

Przez "rozcięcie" czterowymiarowego układu hiperrzutni wzdłuż jednej osi (np. u) i przechodzących przez nią rzutni oraz przez obrót trzech hiperrzutni można sprowadzić te hiperrzutnie do pozostałej hiperrzutni. Otrzymuje się w ten sposób sprowadzony 3-wymiarowy układ hiperrzutni, w którym oś u występuje 3 razy, zaś rzutnie π_4, π_5, π_6 po dwa razy (rys.3). Układ ten łatwo już można rozwinąć na jedną płaszczyznę w sposób stosowany w zwykłej metodzie Monge'a z tym, że dla uniknięcia pokrywania się rzutów trzeba poza obrotami dokonać również przesunięć niektórych rzutni.

Tak otrzymujemy rozwinięty układ rzutni przestrzeni 4-wymiarowej (rys. 4). Rzutnie π_I, π_{II}, π_{IV} (zakreskowane) są głównymi rzutniami, przy czym π_I i π_{II} odwzorowują pierwszą hiperrzutnię główną Π_1, a π_{II} i π_{IV} - drugą hiperrzutnię główną Π_2.

Płaszczyzna π_{II} jest rzutnią wspólną dla obu hiperrzutni głównych Π_1 i Π_2. Pozostałe rzutnie i hiperrzutnie są pomocniczymi i mogą być w większości przypadków pominięte.

W dalszym ciągu będziemy się posługiwali przeważnie uproszczonym układem głównych rzutni (rys. 5).

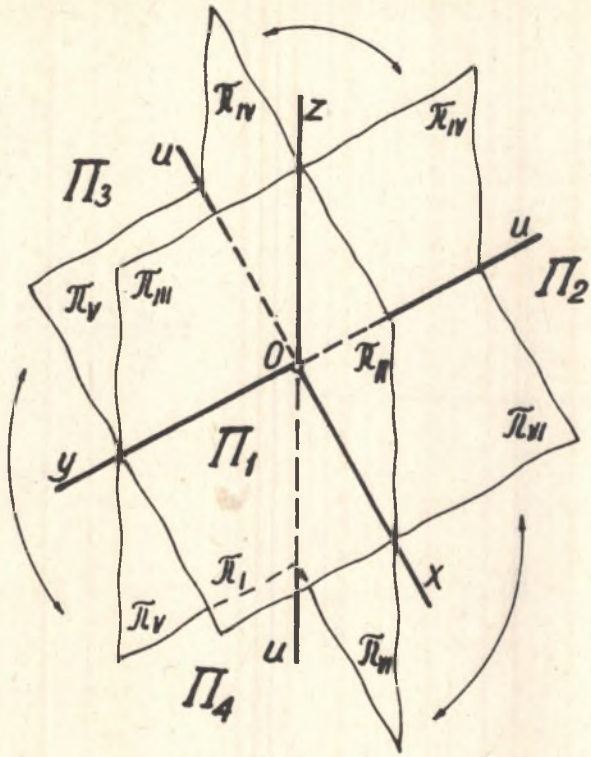
Uwaga: Należy tu zauważyć, że dla hiperrzutni Π_1 przyjąć można te same oznaczenia osi i rzutni co dla trójwymiarowej przestrzeni w zwykłej metodzie Monge'a.

5. Odwzorowanie figur elementarnych przestrzeni 4-wymiarowej

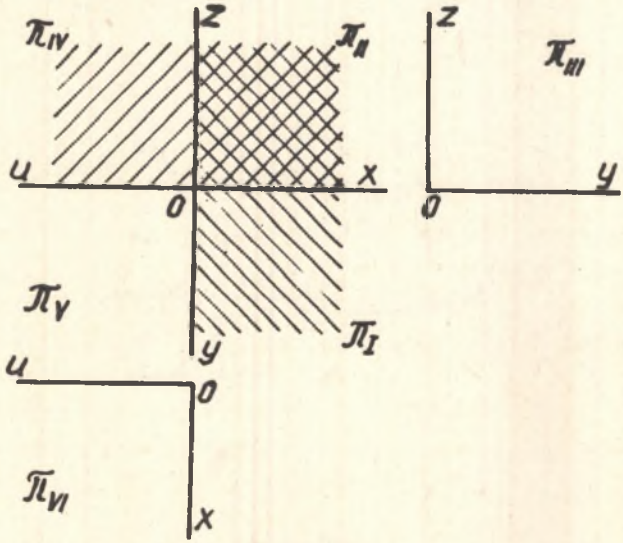
5.1. Punkt

Rzuty punktu w uproszczonym układzie rzutni przedstawia rys.6. Widzimy tu trzy główne rzuty P^I, P^{II}, P^{IV} punktu P leżące na odnoszących prostopadłych do osi rzutów.

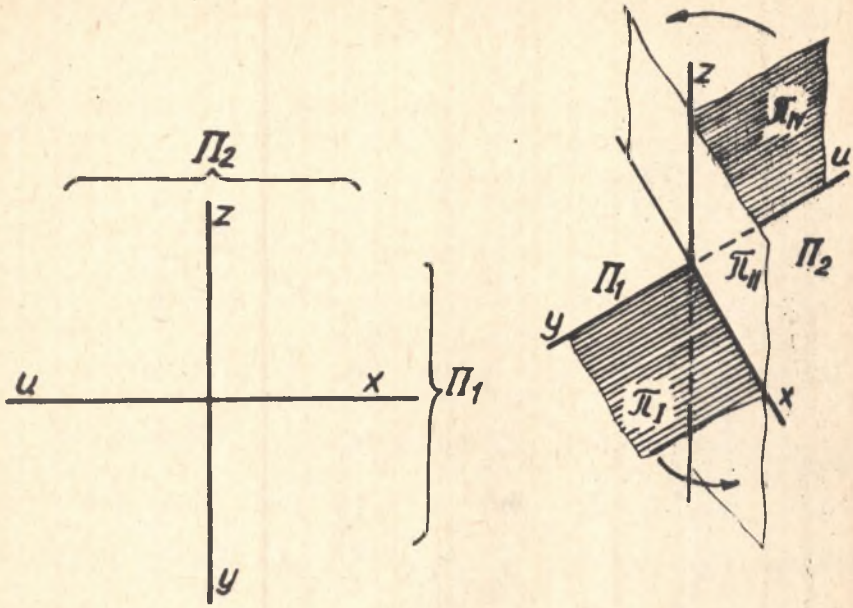
Rzuty P' i P'' wyznaczają w hiperrzutni Π_1 hiperrzut P^1 punktu P, a rzuty P'' i P^{IV} hiperrzut P^2 w hiperrzutni Π_2.


z
u
u
x
y
0
u
Π_1
Π_2
Π_3
Π_4
π_{IV}
π_{IV}
π_V
π_{III}
π_{II}
π_{VI}
π_I
π_V
π_{III}

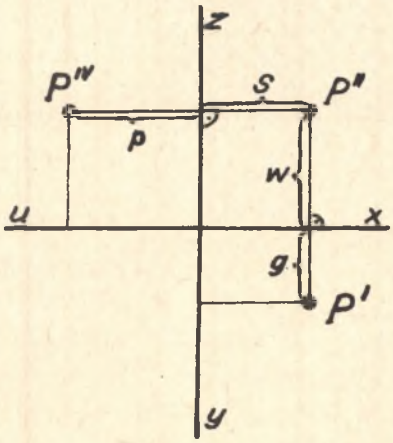
Rys. 3


π_{IV}
z
π_{II}
u
x
0
π_V
y
π_I
u
0
π_{VI}
x
z
π_{III}
y
0

Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Odległości poszczególnych rzutów od odpowiednich osi są współrzędnymi punktu P, [1][3], a mianowicie:

$P'x = g$ - g ł ę b o k o ś ć punktu P^1 równa odległości punktu P od hiperrzutni[2] Π_2, czyli głębokość" punktu P,

$P'y = s$ - s z e r o k o ś ć punktu P^1 równa odległości punktu P od Π_3,

$P'x = w$ - w y s o k o ś ć punktu P^1 równa odległości punktu P od Π_4, którą to odległość będziemy również nazywać "wysokością" punktu P.

$P^{IV}z = p$ - wartość parametru punktu P lub krótko "p a r a m e t r" punktu P jako odległość punktu P od hiperrzutni Π_1.

Współrzędne te mogą być dodatnie lub ujemne.

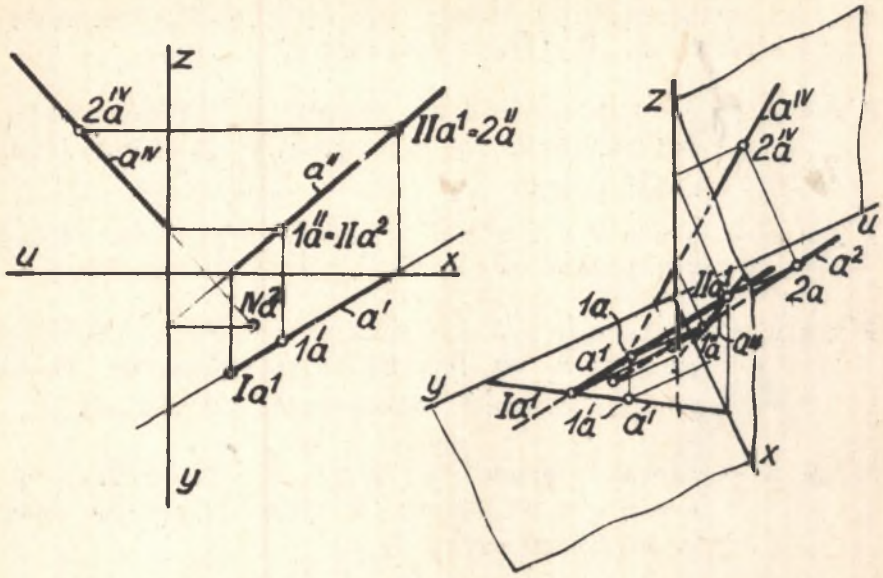
5.2. P r o s t a

Rzutem dowolnej prostej a w uproszczonym układzie rzutni przestrzeni 4-wymiarowej jest układ trzech dowolnych prostych a', a'', a^{IV} wyznaczających parami dwa hiperrzuty tej prostej: a^1 $(a'. a'')$ i a^2 (a'', a^{IV}) (rys. 7).

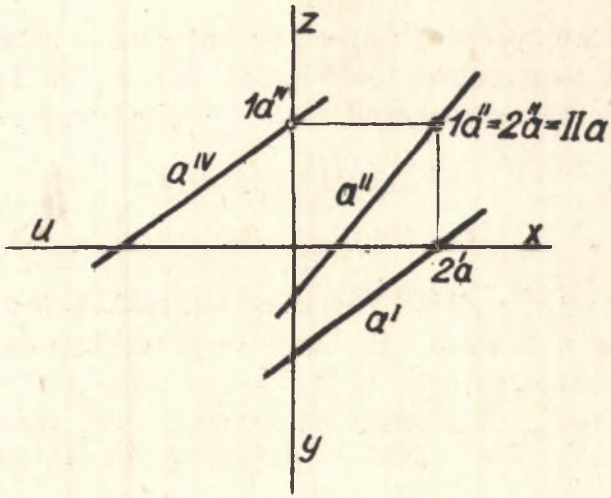
Proste a^1 i a^2 przebijają rzutnie w punktach Ia^1 i IIa^1 oraz IIa^2 i IVa^2, które są śladami hiperrzutów prostej a. Ale jednocześnie w punkcie IIa^1 prosta przebija hiperrzutnię Π_2, gdyż jej głębokość (odl. od Π_2) w tym punkcie równa jest zero więc punkt ten jest również hiperśladem 2a prostej a. Tak samo punkt IIa^2 jest hiperśladem 1a prostej a.

---

[2] Definicje i twierdzenia dotyczące odległości punktu od hiperpłaszczyzny (patrz spis literatury): [1], [2], [4].


z
2''a
a^IV
IIa^1=2''a
a''
1''a=IIa^2
u
x
IVa
a'
1'a
Ia^1
y
z
a^IV
2''a
u
a^2
2a
IIa^1
1a
a^1
1a
a''
y
Ia^1
1'a
a'
x

Rys. 7


z
1a^IV
1a''=2''a=IIa
a^IV
a''
u
x
2'a
a'
y

Rys. 8

Tak samo punkt IIa^2 jest hiperśladem 1a prostej a. Stąd wniosek, że:

Ślady hiperrzutów prostej są rzutami hiperśladów prostej (w innych hiperrzutniach).

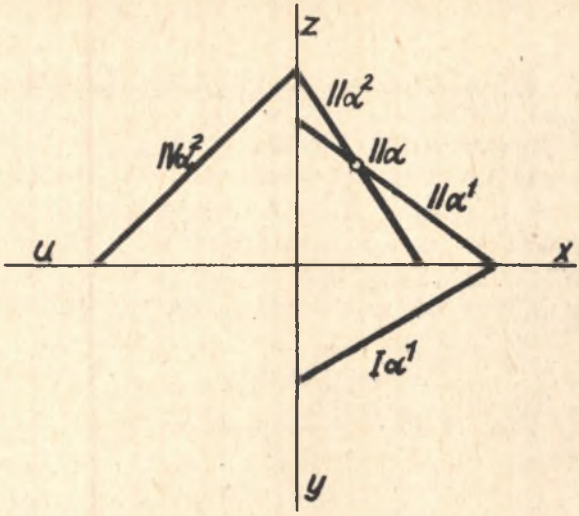
Ponieważ w przestrzeni 4-wymiarowej, w najogólniejszym przypadku, prosta nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną [1], [4] więc dlatego nie mówimy o śladach prostej (jako o punktach wspólnych z rzutniami). Jedynie tylko w przypadku, gdy ślady dwóch hiperrzutów jednoczą się na wspólnej rzutni, to wtedy mamy do czynienia ze śladem prostej na tej rzutni (rys.8), czyli

$$IIa^1 = IIa^2 = 1a = 2a = Ia$$

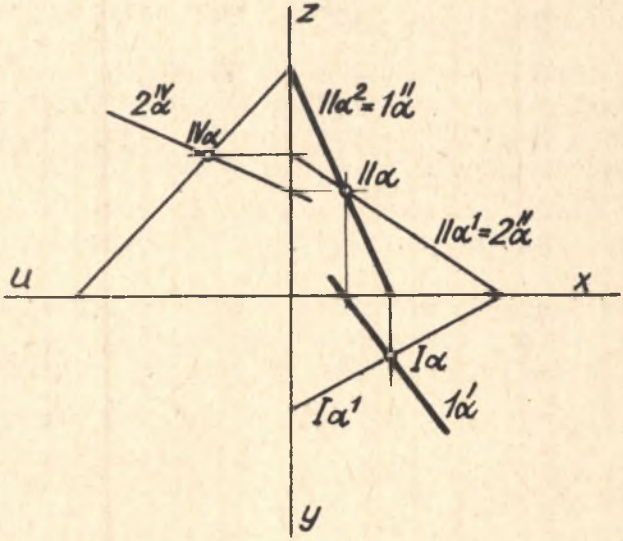
5.3. Płaszczyzna

Ponieważ rzutem płaszczyzny na hiperpłaszczyznę jest płaszczyzna, więc w rozwiniętym układzie hiperrzutni Π_1 i Π_2 dowolna płaszczyzna przestrzeni 4-wymiarowej odwzoruje się układem dwu płaszczyzn α^1 i α^2 przynależnych do odpowiednich hiperrzutni i będących hiperrzutami płaszczyzny α (rys. 9). Hiperrzuty α^1 i α^2 odwzorowują się znowu na rzutniach śladami $I\alpha^1$ i $II\alpha^1$ oraz $II\alpha^2$ i $IV\alpha^2$. A więc na π_2 wystąpią dwa ślady hiperrzutów płaszczyzny α, które w ogólnym przypadku przecinają się w punkcie $II\alpha$. Ponieważ punkt ten jest jedynym punktem rzutni wspólnym dla obu hiperrzutów pł. α, więc jest on również punktem wspólnym płaszczyzny α z rzutnią π_2, czyli jest śladem płaszczyzny α na tej rzutni. Jest to jedyny punkt płaszczyzny α, którego obie współrzędne g i p równe są zero.

Zauważmy jeszcze, że prosta $II\alpha^2$ jako miejsce geometryczne punktów pł. α, dla których współrzędna p=0 jest rzutem prostej, w której płaszczyzna α przecina hiperrzutnię Π_1, czyli jest rzutem na π_2 hiperśladu 1α tej płaszczyzny w Π_1. Pierwszym rzutem tego śladu jest pierwszy rzut prostej α_1 przynależnej do α^1 (rys. 10).


z
IIα²
IVα²
IIα
IIα¹
u
x
Iα¹
y

Rys. 9


z
2ᴵᵛα
IIα²=1ᴵᴵα
IVα
IIα
IIα¹=2ᴵᴵα
u
x
Iα
Iα¹
1ᴵα
y

Rys. 10

Śladem prostej 1α na π_1 jest oczywiście ślad $I\alpha_1$ płaszczyzny α na π_1. Analogicznie w Π_2: drugi ślad $II\alpha$ jest rzutem $2\acute{\alpha}$ drugiego hiperśladu 2α płaszczyzny α przynależnego do α^2.

Z powyższego wynika, że w przestrzeni 4-wymiarowej:

1. Hiperślad płaszczyzny przynależy do odpowiedniego hiperrzutu tej płaszczyzny.
2. Ślady hiperśladu płaszczyzny są śladami płaszczyzny.
3. Ślady płaszczyzny leżą na przecięciu się rzutów hiperśladów tej płaszczyzny.
4. Rzuty hiperśladów płaszczyzny są śladami hiperrzutów tej płaszczyzny i odwrotnie.

Zauważmy jeszcze, że tak jak w przestrzeni 3-wymiarowej ślad pierwszego rzutu prostej na osi rzutów jest pierwszym rzutem drugiego śladu prostej, który przynależy do drugiego rzutu tej prostej, to w przestrzeni 4-wymiarowej ślad pierwszego hiperrzutu płaszczyzny na wspólnej rzutni jest pierwszym hiperrzutem drugiego hiperśladu płaszczyzny przynależnego do drugiego hiperrzutu tej płaszczyzny.

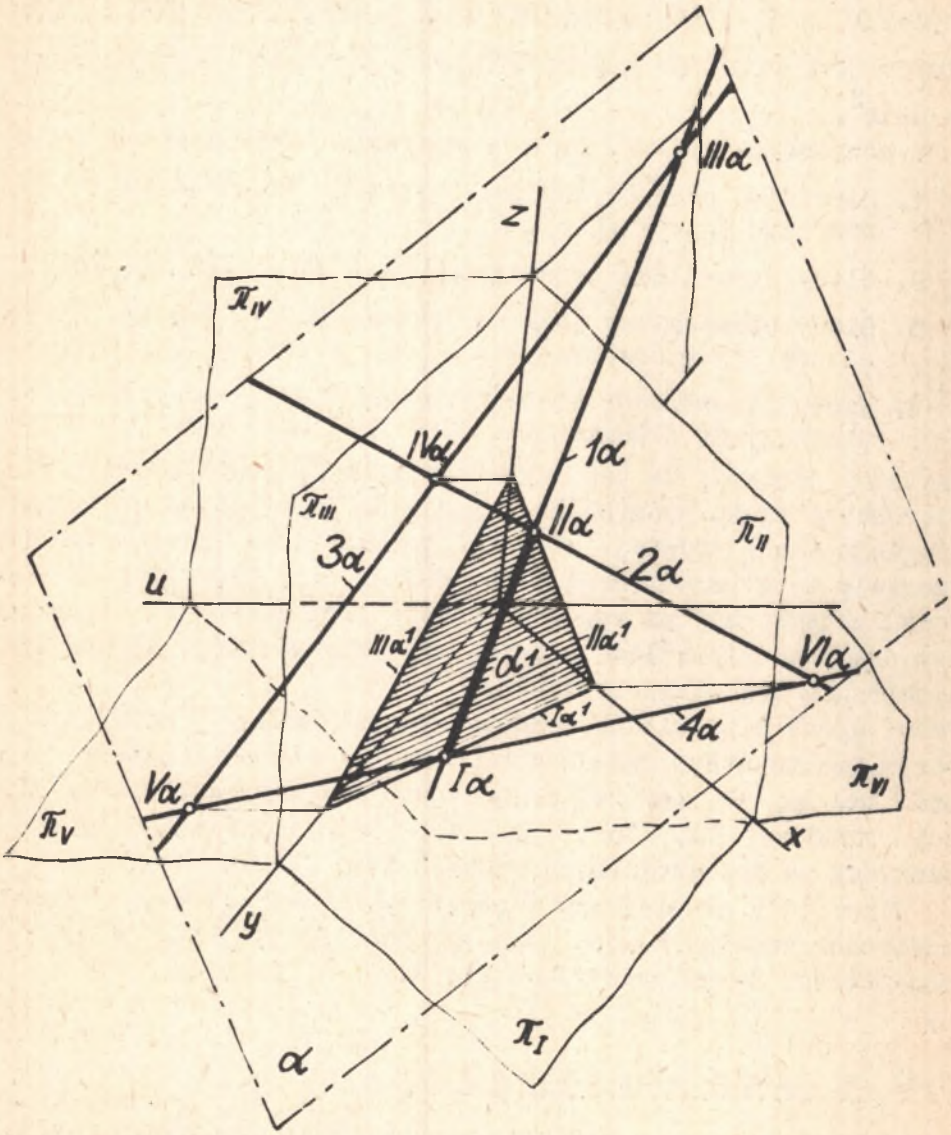
Pełny układ hiperśladów dowolnej płaszczyzny α w czterowymiarowym prostokątnym układzie hiperrzutni stanowią cztery proste 1α, 2α, 3α, 4α tej płaszczyzny przecinające się w sześciu punktach $I\alpha$, $II\alpha$, ..., $VI\alpha$ będących śladami tej płaszczyzny na poszczególnych rzutach tego układu, czyli, że:

Hiperślady płaszczyzny w przestrzeni 4-wymiarowej tworzą czworobok zupełny śladów (analogicznie do trójkąta śladów w przestrzeni 3-wymiarowej) - rys. 11.

5.4. Hiperpłaszczyzna

Hiperśladem dowolnej hiperpłaszczyzny Γ na hiperrzutni Π_1 jest płaszczyzna $\gamma = 1\Gamma$ przynależna do niej, a na rzutni π_1 prosta $g = I\Gamma$, która jest jednocześnie śladem płaszczyzny γ.

Na rzutni π_2 wspólnej dla hiperrzutni Π_1 i Π_2 ślady płaszczyzn będących hiperśladami hiperpłaszczyzny Γ jednoczą się z


z
π_{IV}
$III\alpha$
$IV\alpha$
1α
π_{III}
$II\alpha$
π_{II}
3α
2α
u
$III\alpha^1$
α^1
$II\alpha^1$
$VI\alpha$
$I\alpha^1$
4α
$V\alpha$
$I\alpha$
π_{VI}
π_V
x
y
π_I
α

Rys. 11

jej śladem $II\Gamma$ na tej rzutni. Inaczej można powiedzieć, że hiperślady hiperpłaszczyzny przecinają się na wspólnej rzutni w jednej prostej (analogicznie do śladów płaszczyzny w przestrzeni 3-wymiarowej przecinających się w jednym punkcie na wspólnej osi rzutów). W rozwiniętym układzie rzutni przestrzeni 4-wymiarowej dowolna hiperpłaszczyzna odwzorowuje się więc jako układ 6 prostych (śladów) przecinających się na osiach rzutów (rys. 12). W przestrzeni proste te wraz z punktami przecięcia wyznaczają czworościan śladów hiperpłaszczyzny, który jest jednocześnie simpleksem 3-wymiarowym tej hiperpłaszczyzny (rys. 13).

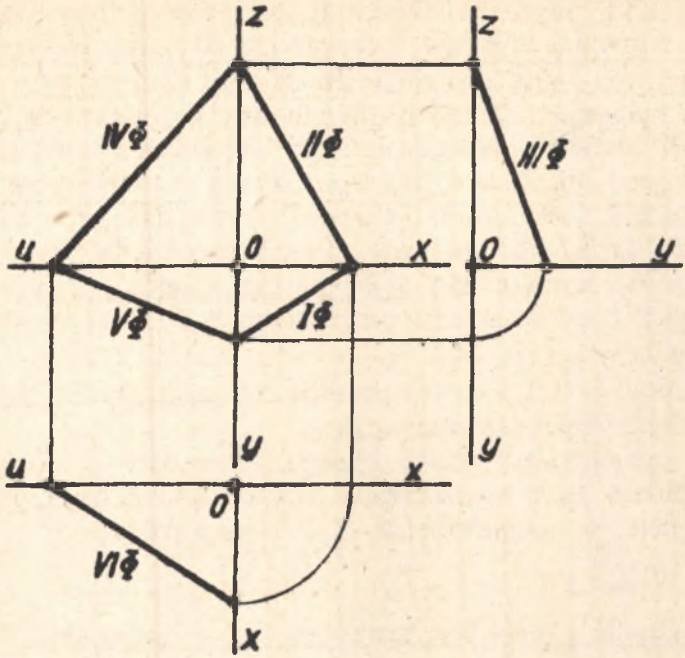
Płaszczyzny ścian tego czworościanu są hiperśladami, a krawędzie śladami hiperpłaszczyzny.
Rysunek 14 przedstawia ślady hiperpłaszczyzny w uproszczonym układzie rzutni jako uogólnienie odwzorowania hiperpłaszczyzny k-wymiarowej w przestrzeni k + 1-wymiarowej.

6. Przynależność elementów przestrzeni 4-wymiarowej

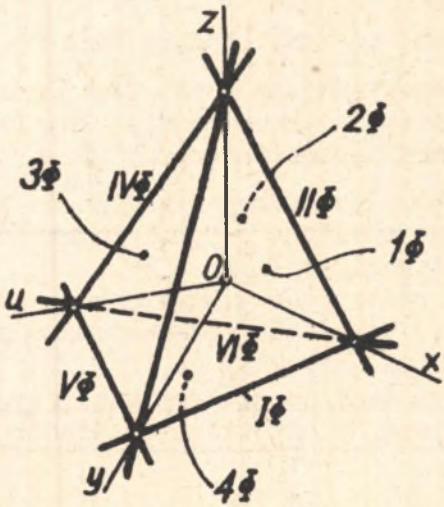
6.1. Hiperpłaszczyzna i płaszczyzna

Przyjmijmy w rozwiniętym układzie głównych rzutni π_1, π_2, π_4 (rys. 15) płaszczyznę α daną hiperrzutami $\alpha^1(I\alpha^1, II\alpha^1)$ i $\alpha^2(II\alpha^2, IV\alpha^2)$ oraz wyznaczmy ślady tej płaszczyzny: $I\alpha$, $II\alpha$ $IV\alpha$ wg p.5.3. Następnie przez punkty $I\alpha$, $II\alpha$, $IV\alpha$ przeprowadźmy ślady dowolnej hiperpłaszczyzny $\Phi(I\Phi, II\Phi, IV\Phi)$. Oczywiście punkty $I\alpha$, $II\alpha$, $IV\alpha$ przynależą do hiperpłaszczyzny Φ ponieważ leżą na prostych przynależnych do hiperpłaszczyzny Φ (na śladach tej hiperpł.).
Jeżeli jednak trzy różne punkty płaszczyzny α przynależą do danej hiperpłaszcz., to i cała płaszczyzna α przynależy do tej hiperpłaszczyzny. Stąd wniosek:

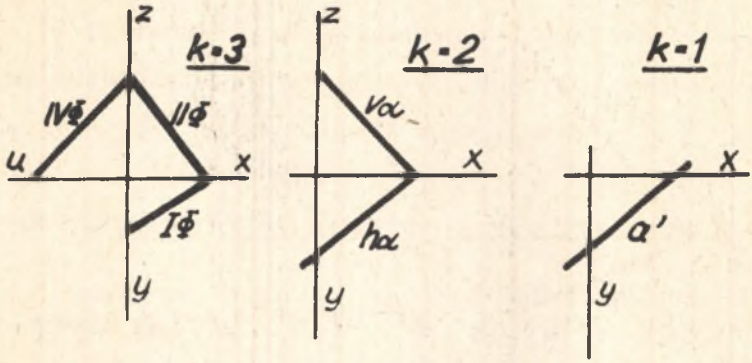
Płaszczyzna przynależy do hiperpłaszczyzny, jeżeli ślady płaszczyzny przynależą do odpowiednich śladów hiperpłaszczyzny.


z
z
IVΦ
IIΦ
IIIΦ
u
0
x
0
y
VΦ
IΦ
y
u
x
0
VIΦ
x

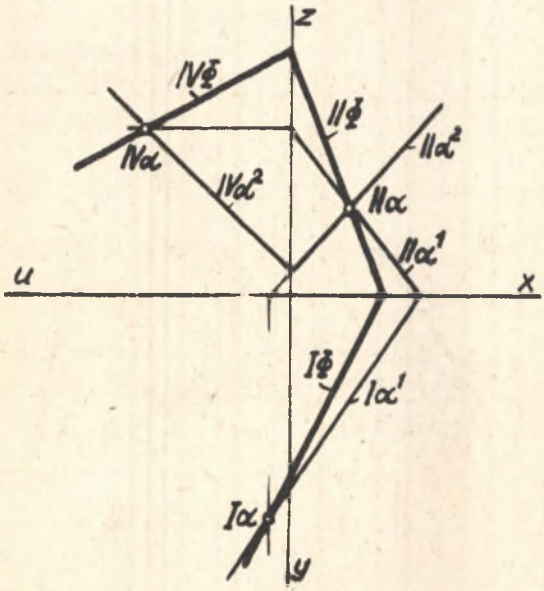
Rys. 12


z
2Φ
3Φ
IVΦ
IIΦ
1Φ
0
u
VIΦ
x
VΦ
IΦ
y
4Φ

Rys. 13


z
k=3
IVΦ
IIΦ
u
x
IΦ
y
z
k=2
Vα
x
hα
y
k=1
x
a'
y

Rys. 14


z
IVΦ
IIΦ
IIα²
IVα
IVα²
IIα
IIα¹
u
x
IΦ
Iα'
Iα
y

Rys. 15

Zauważmy jeszcze, że prosta 1α $(1\alpha', 1\alpha'')$, która jest pierwszym hipersladem pł. α, przynależy do płaszczyzny 1Φ $(I\Phi, II\Phi)$ która jest pierwszym hipersladem hiperpł. Φ, a prosta 2α $(2\alpha^{II}, 2\alpha^{IV})$ która jest drugim hipersladem płaszczyzny α, przynależy do pł 2Φ $(II\Phi, IV\Phi)$, która jest drugim hipersladem tej hiperpłaszczyzny. A zatem zachodzi tu również przynależność odpowiednich hipersladów.
Można więc zapisać krótko:

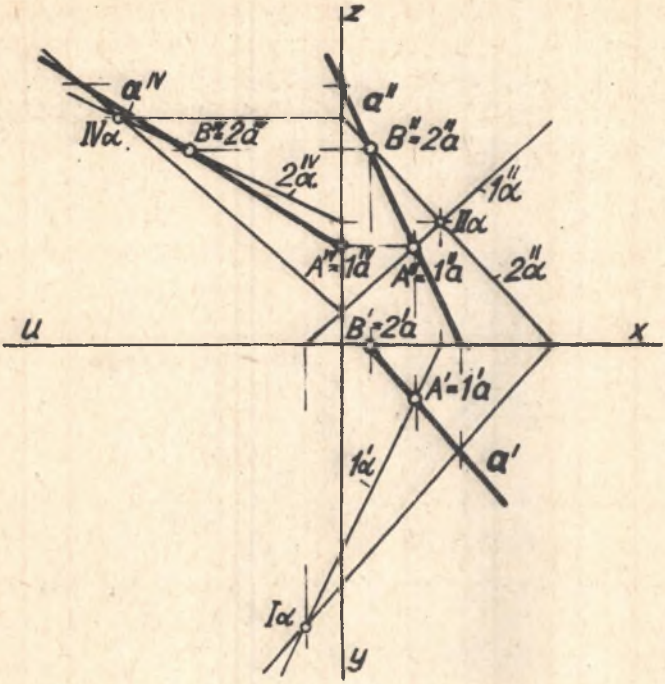
Jeżeli $\alpha \in \Phi$, to $1\alpha \in 1\Phi$, $2\alpha \in 2\Phi$ i $I\alpha \in I\Phi$, $II\alpha \in II\Phi$, $IV\alpha \in IV\Phi$.

6.2. Płaszczyzna i prosta

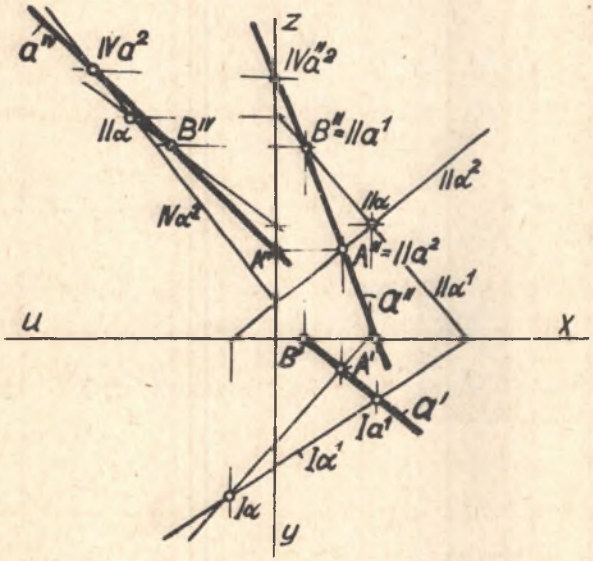
Niech punkty $I\alpha$, $II\alpha$, $IV\alpha$ będą śladami dowolnej płaszczyzny α, a proste 1α $(1\alpha^{I}, 1\alpha^{II})$ i 2α $(2\alpha^{II}, 2\alpha^{IV})$ jej hipersladami (rys. 16).
Przyjmijmy dwa punkty A i B tak, aby $A \in 1\alpha$ $B \in 2\alpha$, wtedy oczywiście punkty te będą przynależeć do płaszczyzny α, ale punkty A i B wyznaczają prostą $a = AB$, więc prosta a będzie również przynależeć do pł. α.
Z p. 5.2 wynika jednak, że punkt $A = 1a$ i $B = 2a$ są hipersladami prostej a. Stąd wniosek, że <u>w przestrzeni 4-wymiarowej prosta przynależy do płaszczyzny jeżeli hipersłady prostej przynależą do odpowiednich hipersladów płaszczyzny</u>, czyli, jeżeli $1a \in 1\alpha$ i $2a \in 2\alpha$, to $a \in \alpha$.
Zauważmy przy tym, że $A^1(A', A'') \in \alpha^1$ $(1\alpha', 1\alpha'', 2\alpha', 2\alpha'')$ i $B^1(B', B'') \in \alpha^1$ oraz $A^2 \in \alpha^2$ i $B^2 \in \alpha^2$, a więc i $a^1 = A^1B^1 \in \alpha^1$ oraz $a^2 = A^2B^2 \in \alpha^2$. Stąd: $Ia^1 \in I\alpha^1$ i $IIa^1 \in II\alpha^1$ oraz $IIa^2 \in II\alpha^2$ i $IVa^2 \in IV\alpha^2$ (rys. 17). A więc, jeżeli $a \in \alpha$, to <u>ślady hiperrzutów prostej przynależą do odpowiednich śladów hiperrzutów płaszczyzny</u>.

6.3. Prosta i hiperpłaszczyzna

Jeżeli prosta leży na płaszczyźnie, która przynależy do danej hiperpłaszczyzny, to prosta przynależy również do tej hiper-

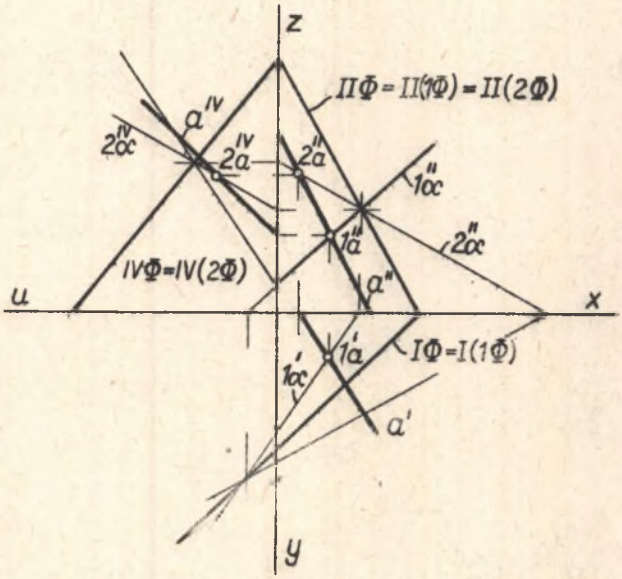

z
a''
B''=2''a
2''α
1''α
IIα
A''=1''a
A''=1''a
2''α
u
x
B'=2'a
A'=1'a
a'
1'α
Iα
y

Rys. 16


z
IVa''2
B''=IIa'
IIα
IIα2
IIα
A''=IIa2
a''
IIα1
u
x
B'
A'
a'
Ia1
Iα1
Iα
y

Rys. 17

płaszczyzny. Z przynależności tych wynika jednak przynależność odpowiednich hiperśladów, a więc możemy twierdzić, że, jeżeli płaszczyzna α przynależy do hiperpłaszczyzny Φ, to hiperślady prostej przynależą do odpowiednich hiperśladów hiperpłaszczyzny Φ, czyli krótko: Jeżeli $a \in \Phi$, to $1a \in 1\Phi$ i $2a \in 2\Phi$ (rys. 18).



Rys. 18

6.4. Uogólnienie przynależności śladów

Uważając wszystkie liniowe elementy przestrzeni 4-wymiarowej za hiperpłaszczyzny m-wymiarowe [2], gdzie $3 \geqslant m \geqslant 1$ można wyprowadzone powyżej warunki wykreślne przynależności dla poszczególnych przypadków uogólnić w następującej formie:

U o g ó l n i e n i e 1

W 4-wymiarowej przestrzeni euklidesowej hiperpłaszczyzna k-wymiarowa (k = 1,2) przynależy do hiperpłaszczyzny m-wymiarowej (m = 1,2,3) jeżeli hiperślady jednej z nich przynależą do odpowiednich hiperśladów drugiej.

Dla dowodu należałoby podstawić pojęcia:
prosta = hiperpłaszczyzna 1-wymiarowa,
płaszczyzna = hiperpłaszczyzna 2-wymiarowa,
hiperpłaszczyzna = hiperpłaszczyzna 3-wymiarowa,
i powtórzyć rozumowanie przeprowadzone w punkcie 6.1. do 6.3.

6.5. U o g ó l n i e n i e p r z y n a l e ż n o ś c i r z u t ó w

Wprowadzone pojęcia hiperrzutu punktu prostej i płaszczyzny pozwalają na uogólnienie twierdzenia o przynależności odpowiednich rzutów tych elementów wynikającego bezpośrednio z definicji rzutowania.

U o g ó l n i e n i e 2

Jeżeli w euklidesowej przestrzeni 4-wymiarowej hiperpłaszczyzna k-wymiarowa (k = 0,1) przynależy do hiperpłaszczyzny m-wymiarowej (m = 1,2), to hiperrzuty jednej z nich przynależą do odpowiednich hiperrzutów drugiej.

Uwaga: W tym przypadku punkt uważamy za hiperpłaszczyznę 0-wymiarową.

Rękopis złożono w Redakcji 15.I.64 r.

LITERATURA

[1] Schoute P.H.: Mehrdimensionale Geometrie. 1902.

[2] Borsuk K.: Geometria analityczna w n wymiarach. 1950.

[3] Lietzman W.: Anschauliche Einführung in die Mehrdimensionale Geometrie. 1952.

[4] Baumgartner L.: Geometrie in Raum von vier Dimensionen. 1954.

ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИИ К ОБОБЩЕНИЮ МЕТОДА МОНЖА НА ЕВКЛИДОВОЕ, ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Р е з ю м е

В настоящей работе рассматривается изображение фигур четырехмерного пространства методом Монжа. Как плоскости проекции принято перпендикулярные гиперплоскости этого пространства. Ортогональные проекции фигур на гиперплоскости проекции автор называет гиперпроекциями, общие точки фигур и плоскостей проекций - гиперследами.

Гиперпроекции и гиперследы изображенные на плоскости методом Монжа. Подробно рассматриваются проекции точки, прямой, плоскости и гиперплоскости и тоже обобщенные графические условия их принадлежности.

VERWENDUNG DER HYPERPROJEKTIONSEBENEN ZUR VERALLGEMEINERUNG DER GRUNDRISS-AUFRISS-METHODE (MONGE-METHODE) AUF VIERDIMENSIONALE, EUKLIDISCHE RAUM

Z u s a m m e n f a s s u n g

Um die Figuren des vierdimensionalen Raumes mit der Grundriss-Aufriss-Methode (Monge-Methode) darzustellen, unterscheidet der Autor in diesem Raum aufeinander fallende senkrechte Hyperebenen und nimmt sie als Hyperbildebenen an. Die ortho-

gonalen Projektionen der Figuren dieses vierdimensionalen Raumes auf die angeführten Hyperbildebenen nennt er Hyperprojektionen und die gemeinsamen Punkte dieser Gebilde mit der Hyperebenen nennt er Hyperspuren.
Hyperprojektionen und Hyperspuren können weiter auf die Ebene mit der Monge-Methode dargestellt werden.

Genauer beschrieben sind die Projektionen des Punktes, der Geraden, der Ebene und der Hyperebene sowie die Ableitung der verallgemeinenerten zeichnerischen Bediengungen der Inzidenz (zusammengehörigkeit) dieser Gebilden.