ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 10 Nr kol. 162

MARIAN PALEJ

O PEWNYM PRZYPADKU WIERNOKĄTNEGO ODWZOROWANIA PŁASZCZYZN

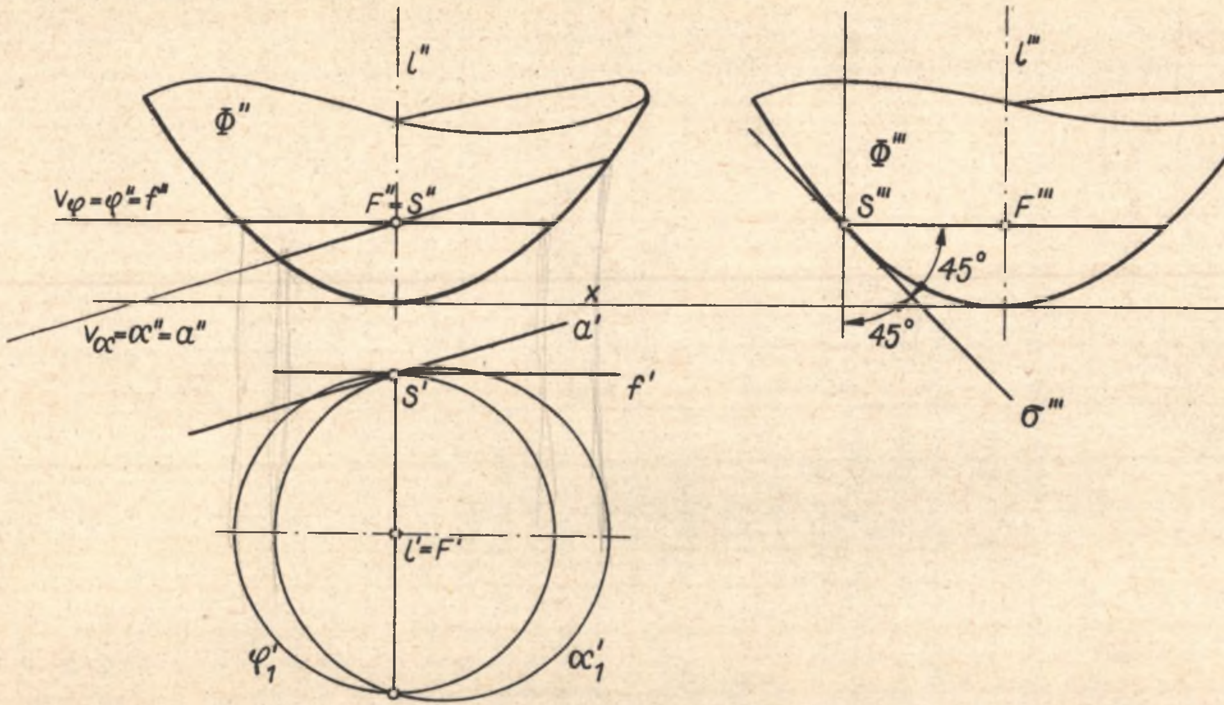
Weźmy pod uwagę dowolną paraboloidę obrotową Φ o osi prostopadłej do rzutni π_1. Rozważmy wiązkę płaszczyzn o środku w ognisku paraboloidy F. Odwzorujmy te płaszczyzny na rzutnię π_1 w sposób następujący: wyznaczmy stożkowe przekroju paraboloidy każdą z płaszczyzn wiązki (F), a następnie dokonajmy prostokątnego rzutu tych stożkowych na płaszczyznę π_1. W wyniku otrzymamy pęk prostych o środku F' odwzorowujący płaszczyzny prostopadłe do rzutni i zbiór okręgów odwzorowujący płaszczyzny dowolnie nachylone względem rzutni[x)]. Udowodnimy, że tak skonstruowane odwzorowanie wiązki płaszczyzn na rzutni π posiada cechy odwzorowania wiernokątnego, tj., że obrazy płaszczyzn (proste lub okręgi) tworzą z sobą kąty równe tym, jakie zawierają ich oryginały.
Własność ta jest istotna, gdyż pozwala bezpośrednio z odwzorowania dwu płaszczyzn odczytać prawdziwą wielkość ich kąta nachylenia.

W dowodzie zacznijmy od rozpatrzenia poziomej płaszczyzny α i dowolnej płaszczyzny φ, którą nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy jako pionowo-rzucającą (rys. 1).

Opiszmy okręgi odwzorowujące w podany wyżej sposób płaszczyzny α i φ na rzutni π_1 przez α_1' i φ_1', a odpowiednie styczne w punkcie przecięcia $\alpha_1' \varphi_1' = S'$ – przez a' i f'.
Należy udowodnić, że $\sphericalangle a'f' = \sphericalangle V_\alpha V_\varphi$, czyli, że kąt utworzony przez styczne a' i f' jest równy prawdziwej wielkości kąta płaskiego mierzącego kąt dwuścienny $\sphericalangle \alpha\varphi$.

---

x) Można bowiem wykazać [1], że rzut prostokątny każdej elipsy przynależnej do paraboloidy obrotowej – na płaszczyznę prostopadłą do osi tej powierzchni jest okręgiem.


l''
Φ''
$V_\varphi = \varphi'' = f''$
F''=S''
x
$V_\alpha = \alpha'' = a''$
a'
f'
S'
l'=F'
φ_1'
α_1'
l'''
Φ'''
S'''
F'''
45°
45°
σ'''

Rys. 1

Zauważmy, że a' i f' są rzutami prostokątnymi na π_1 prostych a i f, stycznych do elips α_1 i φ_1, w których płaszczyzny α i φ przecinają paraboloidę Φ (jedna z tych elips jest okręgiem). Rzuty pionowe tych prostych leżą na śladach pionowych płaszczyzn α i φ: $a'' = V_\alpha$, $f'' = V_\varphi$.
Twierdzenie nasze można więc wyrazić relacją:

$$\sphericalangle a' f' = \sphericalangle a'' f''$$

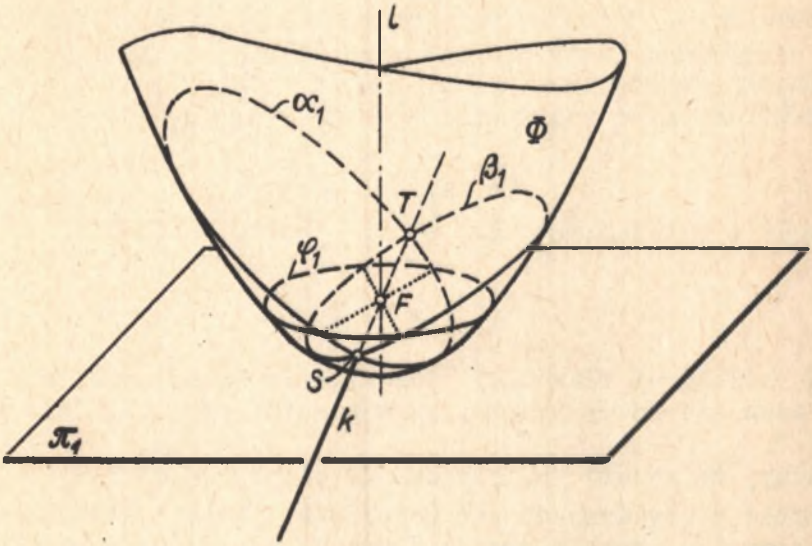
Ponieważ z założenia: $\alpha \perp \pi_2$, $\varphi \parallel \pi_1$ przeto zachodzi:

$$f' \parallel x \parallel f''$$

Dowód rozważanej własności odwzorowania płaszczyzn α i φ sprowadza się do wykazania, że w rozwiniętym układzie rzutni $a' \parallel a''$.
Zauważmy, że prosta a, styczna do elipsy $\alpha_1 \in \Phi$ leży w płaszczyźnie σ stycznej do paraboloidy Φ. Punkt styczności S jest przy tym punktem przynależnym do płaszczyzny $\varphi \in$ F, $\varphi \parallel \pi_1$. Z własności ogniska paraboloidy (rys. 1) wynika, że płaszczyzna σ jest jednakowo nachylona do promienia FS i prostej FF'. Ponieważ ponadto $\sigma \in f$, $f \parallel x$ - można stwierdzić, że płaszczyzna styczna σ jest równoległa do osi x i tworzy równe kąty z obydwiema rzutniami π_1 i π_2.
Z przynależności prostej a do płaszczyzny σ wynika bezpośrednio relacja: $\sphericalangle a' x = \sphericalangle a'' x$, co należało udowodnić.

Rozpatrzmy z kolei przypadek ogólnego położenia płaszczyzn. Niech dane będą płaszczyzny α i β (rys. 2 i 3) określone prostokątnymi rzutami na π_1 elips przekroju paraboloidy Φ (przyjętej jak poprzednio) tj. okręgami α_1' i β_1'. Chcemy udowodnić, że styczne do okręgów α_1' i β_1' w ich punkcie wspólnym S', czyli promienie tych okręgów przynależne do punktu S', r_α i r_β' tworzą z sobą kąt równy prawdziwej wielkości kąta nachylenia płaszczyzn α i β.
W tym celu przeprowadźmy następujące rozumowanie.

Rozważmy krawędź płaszczyzn α i β, prostą k = ST (rys. 2 i 3). Jest oczywiste, że przechodzi ona przez ognisko paraboloidy F, gdyż obydwie płaszczyzny α i β z założenia przynależą do tego punktu.



Rys. 2

Sprowadźmy przez jednoczesny obrót płaszczyzny α i β do położenia rzucającego względem rzutni π_1. Obierzmy przy tym jako oś obrotu prostą $s \parallel \pi_1$, $s \in F$ (rys. 3). Z żądania prostopadłości do rzutni π_1 płaszczyzn α i β w nowym obróconym położeniu ($\bar{\alpha}$ i $\bar{\beta}$) wynika, że krawędź k po obrocie pokryć się musi z osią paraboloidy $l : \bar{k} = l$.

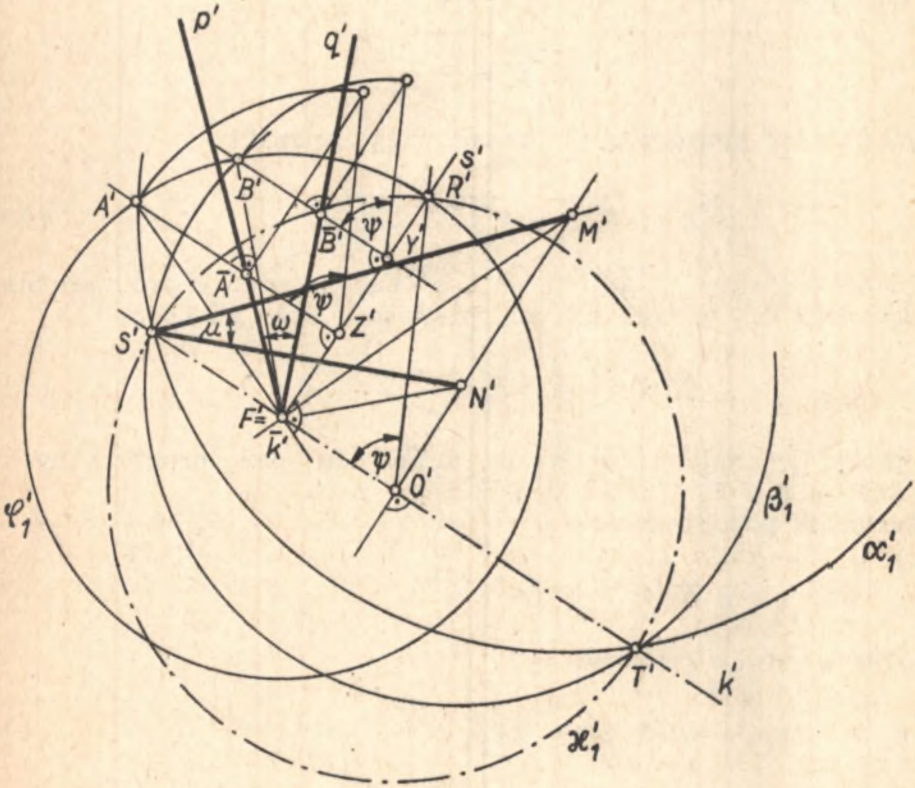
Oznacza to, że oś obrotu s winna spełniać warunek: $s \perp k$, $s' \perp k'$. Przejście krawędzi k do położenia $\bar{k}$ wymaga obrotu o kąt $\sphericalangle kl$. Zauważmy jednak, że kąt ten, a ściślej biorąc jego dopełnienie do $\frac{\pi}{2}$ jest natychmiast wyznaczalne jako kąt nachylenia do płaszczyzny poziomej prostej k.

Jeżeli bowiem rozważymy płaszczyznę $\varkappa \in k$, dla której prosta k jest linią spadu - prawdziwą wielkość kąta $\sphericalangle k\,\pi_1$, otrzymamy jako kąt nachylenia płaszczyzny $\varkappa$ do $\varphi \parallel \pi_1$, $\varphi \in F$ - bezpośrednio z konstrukcji omówionej w pierwszej części dowodu.

Płaszczyzna $\varkappa$ spełniająca powyższy warunek odwzorowuje się okręgiem $\varkappa_1' \in S'T'$ o środku O leżącym na k'. Konsekwentnie, kątem obrotu sprowadzającym położenia obydwu płaszczyzn α i β do rzucających względem π_1 jest dopełnienie kąta utworzonego przez okręgi φ_1' i $\varkappa_1'$ czyli $\sphericalangle\psi = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle F'R'.O'R'$

W wyniku obrotu o kąt ψ otrzymujemy: $\bar{k}' = F'$.

Rozważmy dwa punkty A i B przynależne odpowiednio do płaszczyzn α i β. Obróćmy je dokoła s o kąt ψ w kierunku zgodnym z obrotem krawędzi k.



Rys. 3

Rzuty punktów A i B w nowym położeniu - $\bar{A}'$ i $\bar{B}'$ są elementami śladów poziomych płaszczyzn α i β sprowadzonych do położeń prostopadłych względem π_1. W rezultacie - proste $p' = F'\bar{A}'$ i $q' = F'\bar{B}'$ uważać można za ramiona kąta reprezentującego prawdziwą wielkość kąta dwuściennego płaszczyzn α i β.

Weźmy pod uwagę trójkąty $F'A'Z'$ i $F'M'O'$.
Łatwo stwierdzić, że są one podobne, gdyż oprócz kątów prostych (przy Z' i O') posiadają równe sobie kąty przy wierzchołkach A' i M' ($\sphericalangle F'A'Z' = \sphericalangle F'M'O'$ ponieważ $A'F' \perp F'M'$).
Wynika stąd proporcja:

$$\overline{A'Z'} : \overline{F'Z'} = \overline{M'O'} : \overline{F'O'} \tag{1}$$

Rozważmy z kolei trójkąty $F'\bar{A}'Z'$ i $S'M'O'$

Zauważmy, że $\overline{\bar{A}'Z'} = \overline{A'Z'} \cdot \cos\psi$

$$\overline{S'O'} = \frac{\overline{F'O'}}{\cos\psi}$$

Uwzględniając proporcję (1) można więc napisać:

$$\overline{\bar{A}'Z'} : \overline{F'Z'} = \overline{M'O'} : \overline{S'O'} \tag{2}$$

Ponieważ trójkąty $F'\bar{A}'Z'$ i $S'M'O'$ są również prostokątne z proporcji (2) wynika ich podobieństwo. Stąd równość:

$$\sphericalangle S'M'O' = \sphericalangle F'\bar{A}'Z' \tag{3}$$

Przeprowadźmy analogiczne rozumowanie dla par prostokątnych trójkątów: $F'B'Y'$, $F'N'O'$ i $F'\bar{B}'Y'$, $S'N'O'$.
Stwierdzimy podobieństwo:

$$\Delta F'\bar{B}'Y' \sim \Delta S'N'O'$$

a w konsekwencji równość:

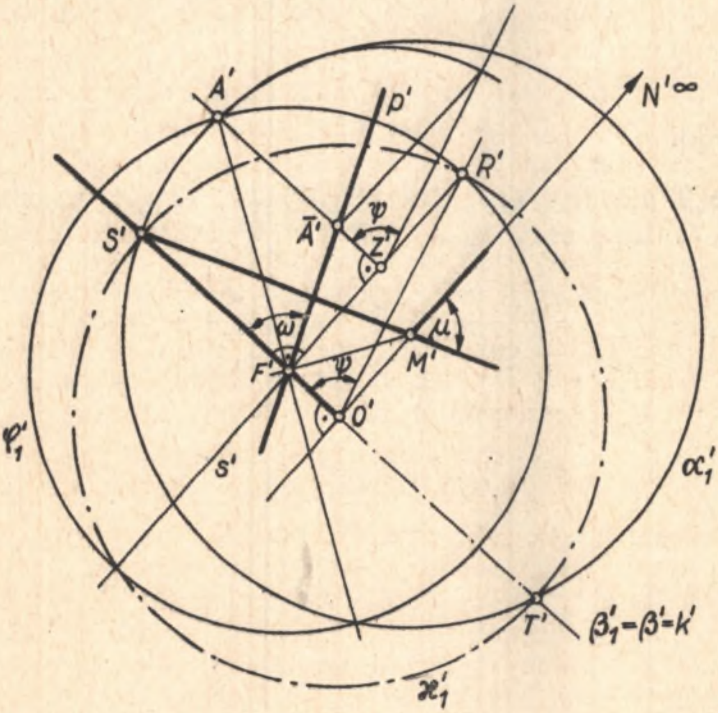
$$\sphericalangle S'N'O' = \sphericalangle F'\bar{B}'Y' \tag{4}$$

Z równań (3) i (4) wyprowadzamy:

$$\sphericalangle\mu = \sphericalangle O'S'M' - \sphericalangle O'S'N' = \sphericalangle F'\bar{A}'Z' - \sphericalangle F'\bar{B}'Y' = \sphericalangle\omega,$$

co należało udowodnić.

Jest oczywiste, że rozumowanie dotyczące szczególnych przypadków położenia płaszczyzn mieści się w powyższym schemacie ogólnym. Dla ilustracji na rys. 4 przedstawiono konstrukcję prawdziwej wielkości kąta utworzonego przez takie dwie płaszczyzny α i β, z których jedna (β) jest prostopadła do rzutni. W tym przypadku obrót płaszczyzny β dokoła osi s nie zmienią położenia tej płaszczyzny względem rzutni π_1 ($s \perp \beta$),



Rys. 4

dzięki czemu przy wyznaczaniu rzeczywistej wielkości kąta $\omega = \sphericalangle \alpha\beta$ wystarczy rozważyć jedynie obrót punktu $A' \in \alpha$. Prosta $p' = \bar{A}'F'$ przedstawia rzut obróconej płaszczyzny α, a kąt utworzony przez proste β' i p' wyraża prawdziwą wielkość kąta płaszczyzn α i β.

Dowód równości kątów μ i ω upraszcza się zatem do wykazania relacji (3) wynikającej z rozważenia dwóch tylko par trójkątów:

$$\Delta F'A'Z' \sim \Delta F'M'O'$$

$$\Delta F'\bar{A}'Z' \sim \Delta S'M'O'$$

Wpłynęło do Redakcji 16.10.65 r.

LITERATURA

[1] Bereis R.: Darstellende Geometrie - Berlin 1964 - Akademie-Verlag, str. 393.

ОБ ОДНОМ ИЗОБРАЖЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено некоторое изображение плоскостей при помощи их следов на произвольном параболоиде вращения.

Доказано, что ортогональные проекции упомянутых следов на плоскость касательную в вершине параболоида образуют углы, которые равны истинным углам между плоскостями если эти плоскости проходят через фокус параболоида.

ÜBER EINE ABBILDUNG VON EBENEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Man hat eine Abbildung von Ebenen mit Hilfe ihrer Spuren auf einem Drehparaboloid betrachtet.

Man hat bewiesen, dass Ortogonalprojektion solcher Spuren auf die Projektionsebene, die normal zur Drehparaboloidsachse ist, die wahre Grösse des Winkels von den abgebildeten Ebenen darstellt, wenn diese Ebenen durch Brennpunkt des Drehparaboloids hindurchgehen.