ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 10 Nr kol. 162

ADAM ZAWADZKI, KAROL BOLEK

DWUOBRAZOWY RZUT RÓWNOLEGŁY

Wstęp

W niniejszym artykule podano próbę ogólnego ujęcia odwzorowania trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej na płaszczyźnie przy pomocy dwu rzutów równoległych (w różnych kierunkach). Zmianę jednego kierunku rzutów nazwano transformacją jednokierunkową, dwu kierunków - dwukierunkową itd. a zmianę rzutni - transformacją podstawową.

Wykazano, że wykreślenie rzutu trzeciego Γ^3 figury Γ określonej rzutami Γ^1 i Γ^2 można zmechanizować przy pomocy dwu układów prostych równoległych (zasada aksonografów). Dwie kolejne transformacje jednokierunkowe można zastąpić jedną nazwaną ich sumą. Zbiór transformacji z tak określoną sumą jako działaniem dodawania, tworzy grupę przekształceń. Wprowadzenie normalnego kierunku rzutowania pozwala na rozwiązywanie zadań miarowych. Jeżeli jeden z kierunków rzutów jest normalny a drugi zawiera z rzutnią dowolny kąt ϑ to otrzymuje się rzut równoległy, zwany w rysunku technicznym perspektywą równoległą lub aksonometrią ukośnokątną, inaczej też perspektywą kawalerską.

W szczególnym przypadku gdy $\vartheta = 45^\circ$ ten rzut aksonometryczny nosi nazwę perspektywy wojskowej. Wykorzystując natomiast transformacje podstawowe, można w prosty i elementarnie przejrzysty sposób uogólniać metodę rzutów Monge'a przez zastąpienie prostopadłych rzutni rzutniami dowolnie nachylonymi oraz normalnych kierunków rzutowania kierunkami dowolnymi.

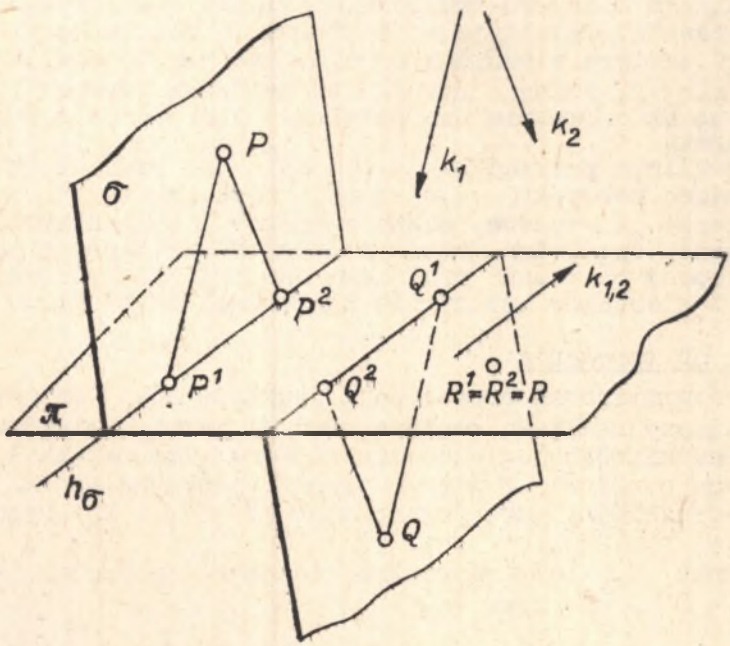
1. Zasada odwzorowania

1.1. W trójwymiarowej przestrzeni (euklidesowej) obierzmy dowolną płaszczyznę π jako rzutnię oraz wzajemnie nierównoległe, jak również nierównoległe do rzutni π dwa kierunki rzutów k_1 i k_2. Każdemu punktowi P w przestrzeni nieprzynależnemu do rzutni π przyporządkujmy parę jego rzutów $(P^1 P^2)$ i to wyrażać będzie zapis $P(P^1P^2)$.
Jeżeli punkt R_2 leży na rzutni, to jego dwuobrazem nazwiemy punkt $R = R^1 = R^2$ (rys. 1).

1.2. Prostą a tak samo płaszczyznę równoległą do kierunku rzutów k_1 względnie k_2 nazwiemy odpowiednio prostą i pła-

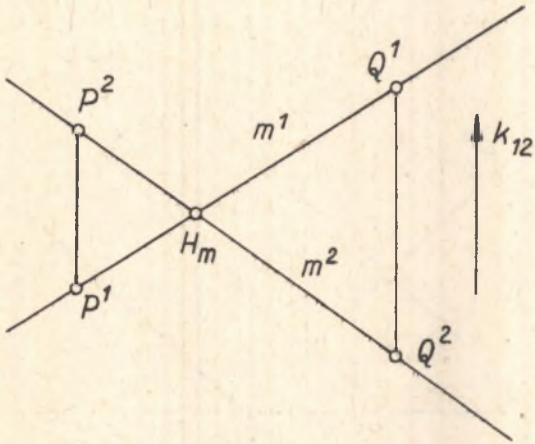
szczyzną k_1 względnie k_2 rzucającą. Płaszczyznę równoległą do obu kierunków rzutów k_1 i k_2 nazwiemy płaszczyzną podwójnie rzucającą lub płaszczyzną główną. Kierunek wyznaczony przez ślad płaszczyzny głównej nazywamy kierunkiem głównym k_{12}.

1.3. Nie zmniejszając ogólności rozważań przyjmijmy rzutnię π jako poziomą płaszczyznę rysunku. Jeżeli dwa punkty P i Q, położone są po różnych stronach rzutni π, to zwroty odcinków P^1P^2 i Q^1Q^2 są różne. Zwrot odcinka P^1P^2 punktu P położonego nad rzutnią nazwiemy dodatnim i wyróżnimy strzałką, a zwrot odcinka Q^1Q^2 ujemnym.

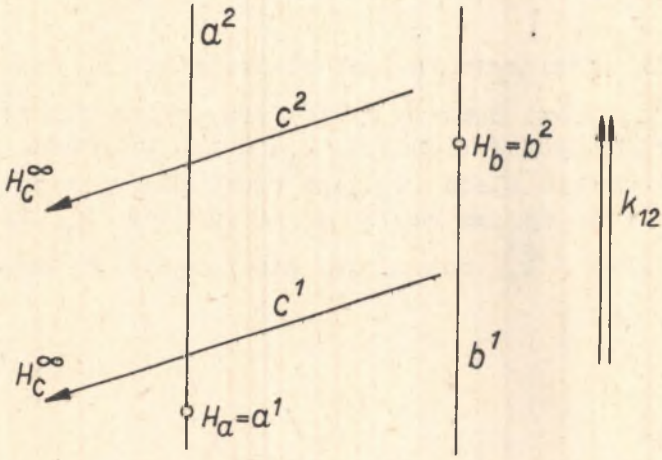


Rys. 1

1.4. Rysunek 2 przedstawia dwuobraz prostej m = PQ. Punkt Hm jest śladem prostej m. Rzuty prostych $a \parallel k_1$ $b \parallel k_2$ oraz $c \parallel \pi$ przedstawiono na rys. 3.
Ślad prostej ċ jest punktem niewłaściwym H_c^∞.

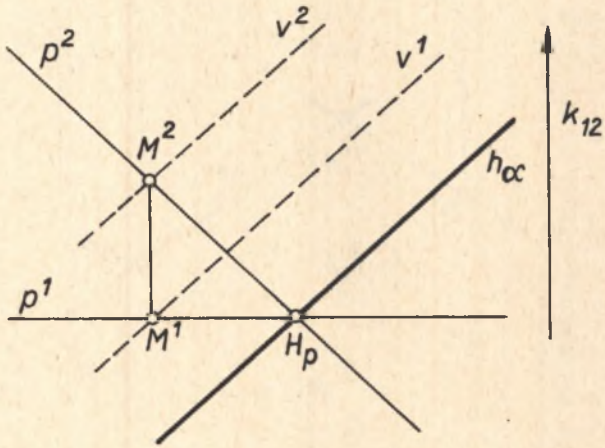


Rys. 2



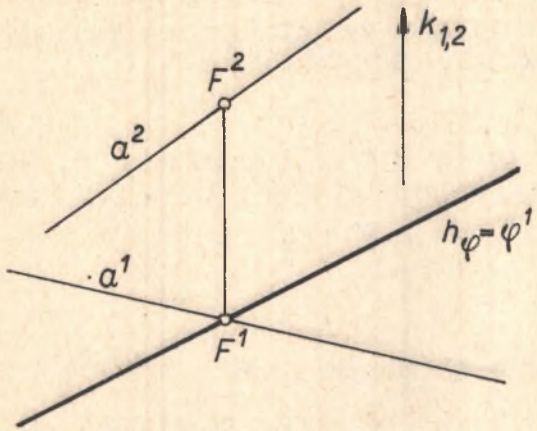
Rys. 3

1.5. Na rysunku 4 przedstawiono płaszczyznę α wyznaczoną przez jej ślad h_α i nie leżący na nim dowolny punkt $M(M^1M^2)$. Dwuobraz $(p^1\ p^2)$ prostej p przedstawia prostą $p \in \alpha$, ponieważ prosta ta przechodzi przez dwa różne punkty $M(M^1\ M^2)$ i H_p przynależne do α. Prosta $v(v^1v^2)$ jest warstwicą tej płaszczyzny.

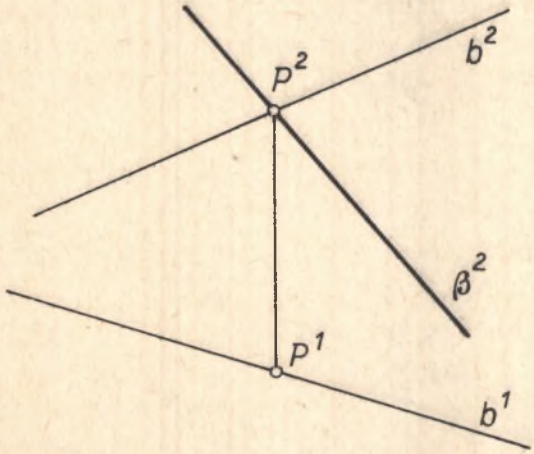


Rys. 4

1.6. Jeżeli płaszczyzna φ jest płaszczyzną k_1 rzucającą, to jej ślad h_φ jest zbiorem rzutów wszystkich punktów tej płaszczyzny rzuconych w kierunku k_1. W tym przypadku jest sensowne traktowanie śladu h_φ jako rzutu płaszczyzny φ w kierunku k_1 i to wyraża zapis φ^1 w miejsce h_φ (rys. 5). Analogicznie ślad k_2 rzucającej płaszczyzny β oznaczmy przez β^2 (rys. 6).



Rys. 5



Rys. 6

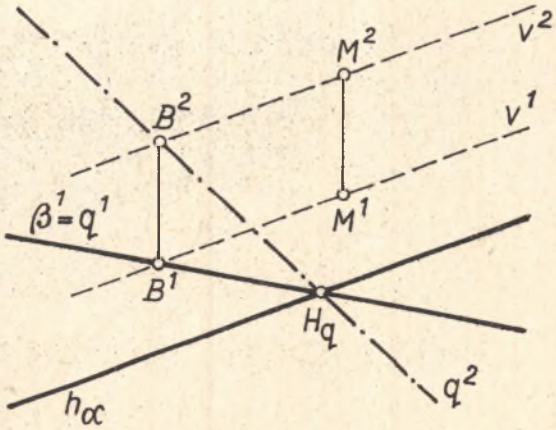
2. Zadania

Na podstawie przyjętych definicji można rozwiązać kilka zadań dotyczących elementów przynależnych.

2.1. Wyznaczyć punkt $F(F^1 F^2)$ przebicia k_1 rzucającej płaszczyzny $\varphi(\varphi^1)$ prostą $a(a^1 a^2)$ (rys. 5). Rozwiązanie: Warunki $\varphi^1 a^1 = F^1$ oraz $F^2 \in a^2$ i $F^1 F^2 \parallel k_{12}$ - wyznaczają rzut F^2.

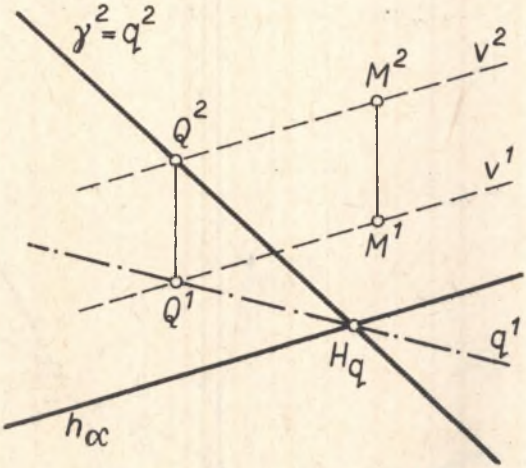
2.2. Analogicznie wyznaczymy punkt $P(P^1 P^2)$, w którym prosta $b(b^1 b^2)$ przebija k_2 rzucającą płaszczyznę β (rys. 6).

2.3. Wykreślić krawędź $q(q^1 q^2)$ przecięcia się płaszczyzn $\alpha = M\, h_\alpha$ i $\beta \parallel k_1$ (rys. 7). Rozwiązanie: Wykorzystując to, że krawędź $q = \alpha\beta$ jest zbiorem punktów, których proste leżące na jednej z tych dwu płaszczyzn przebijają pozostałą płaszczyznę, wyznaczmy punkt B, w którym warstwica $v \in \alpha$ przebije płaszczyznę β. Ponieważ $h_\alpha h_\beta = h_\alpha \beta^1 = H_q$, przeto $B\, H_q = q$.

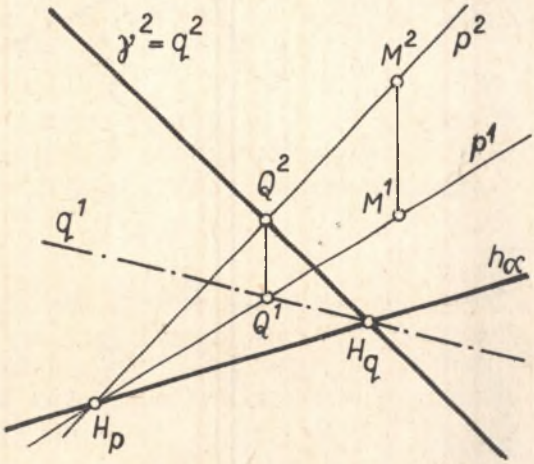


Rys. 7

2.4. Analogicznie wyznaczymy krawędź $q(q^1 q^2)$ płaszczyzny $\alpha = Mh_\alpha$ i k_2 rucającej płaszczyzny $\gamma(\gamma^2)$ (rys. 8). W miejsce warstwicy v można posłużyć się dowolną prostą $p \in \alpha$, co przedstawiono na rys. 9.

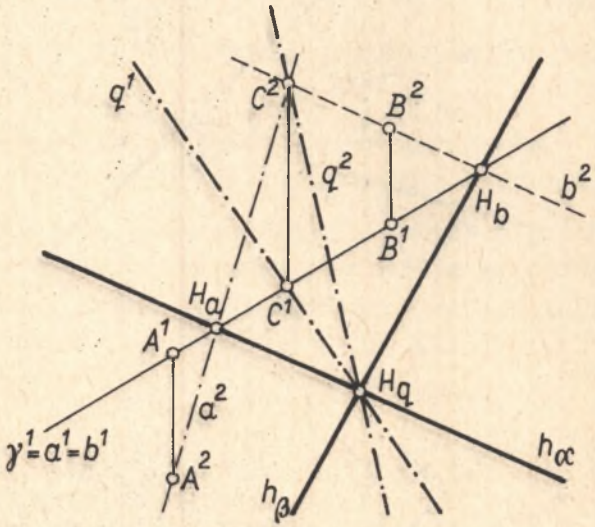


Rys. 8



Rys. 9

2.5. Wyznaczyć krawędź $q(q^1 q^2)$ przecięcia się płaszczyzn $\alpha = A h_\alpha$ i $\beta = B h_\beta$ (rys. 10). Rozwiązanie: Przez punkty A i B prowadzimy k_1 rzucającą płaszczyznę $\gamma(\gamma^1)$, która przecina płaszczyznę α w prostej $\alpha\gamma = a$ oraz płaszczyznę β w prostej $\beta\gamma = b$. Punkt $ab = C$ wyznacza wraz ze śladem $H_q = h_\alpha h_\beta$ krawędź $\alpha\beta = q = H_q C$. Analogicznie rozwiązalibyśmy to zadanie stosując k_2 rzucającą płaszczyznę $\gamma(\gamma^2 = A^2 B^2)$.



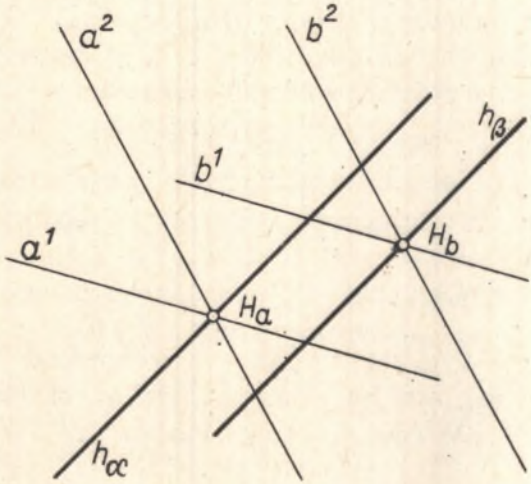
Rys. 10

3. Równoległość

3.1. Rzut równoległy przekształca proste równoległe w proste równoległe, a w szczególnym przypadku równoległości oryginałów do kierunku rzutów - w punkty. Przy dodatkowym założeniu $a, b \nparallel \sigma = k_1 k_2$ otrzymuje się warunek konieczny i wystarczający równoległości prostych, mianowicie:

$$(a \parallel b) = \begin{matrix} (a^1 \parallel b^1) \\ (a^2 \parallel b^2) \end{matrix}$$

3.2. Jeżeli przez ślady Ha i Hb prostych a ∥ b poprowadzimy odpowiednio proste $h_\alpha \parallel h_\beta$, to uzyskamy odwzorowanie dwu płaszczyzn równoległych $\alpha \in a$ i $\beta \in b$ (rys. 11).



Rys. 11

Warunek $h_\alpha \parallel h_\beta$ jest tylko warunkiem koniecznym równoległości oryginałów α i β. Dla płaszczyzn rzucających a tak samo dla płaszczyzn równoległych do dowolnego kierunku $k \nparallel \pi$ warunek $h_\alpha \parallel h_\beta$ jest wystarczający dla $\alpha \parallel \beta$.

3.3. Rysunek 11 można wykorzystać jako rozwiązanie zadania: Wykreślić rzuty prostej b równoległej do danej płaszczyzny α. Prosta $b \parallel a \in \alpha$ rozwiązuje zadanie.

4. Transformacje kierunkowe

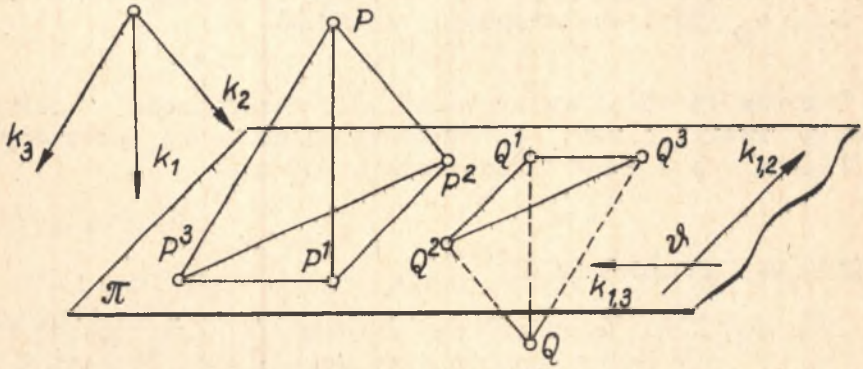
4.1. Przy ustalonej rzutni π oraz ustalonych kierunkach rzutów k_1 i k_2 rzuty punktów nieprzynależnych do rzutni π wyznaczają zbiór odcinków skierowanych, równoległych do kierunku głównego k_{12}. Jeżeli w miejsce kierunku k_1 wprowadzimy kierunek k_3 spełniający warunki $k_3 \nparallel k_1$ ii $k_3 \nparallel \pi$

(rys. 12) to punktom P,Q ,... zostaną przyporządkowane dwuobrazy P^1P^3,Q^1Q^3 ... W tym odwzorowaniu kierunek główny oznaczmy przez k_{13}.

4.2. Przyjmując jednostkę miary długości np. 1 cm,możemy dwuobrazowi (P^1P^2) a więc i punktowi P w przestrzeni przyporządkować jednoznacznie liczbę rzeczywistą n (P), którą nazwiemy normą punktu P, wyrażającą względną długość odcinka P^1P^2, dodatnią dla punktów położonych nad rzutnią, ujemną dla punktów leżących pod rzutnią. Punktowi $R \in \pi$ przypisujemy normę n (R) = 0.
Analogicznie, normę punktu P wyznaczoną przez rzutowanie w kierunkach k_1 i k_3 oznaczmy przez n´(P).

Występujące na rys. 12 trójkąty oznaczone tymi samymi wskaźnikami, ze względu na równoległość odpowiednich boków są podobne, skąd wynika równoległość stosunków:

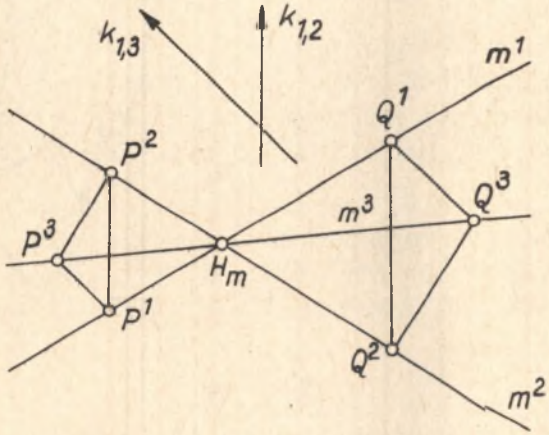
$$\frac{n(P)}{n'(P)} = \frac{n(Q)}{n'(Q)} = \ldots = \text{const} = c$$



Rys. 12

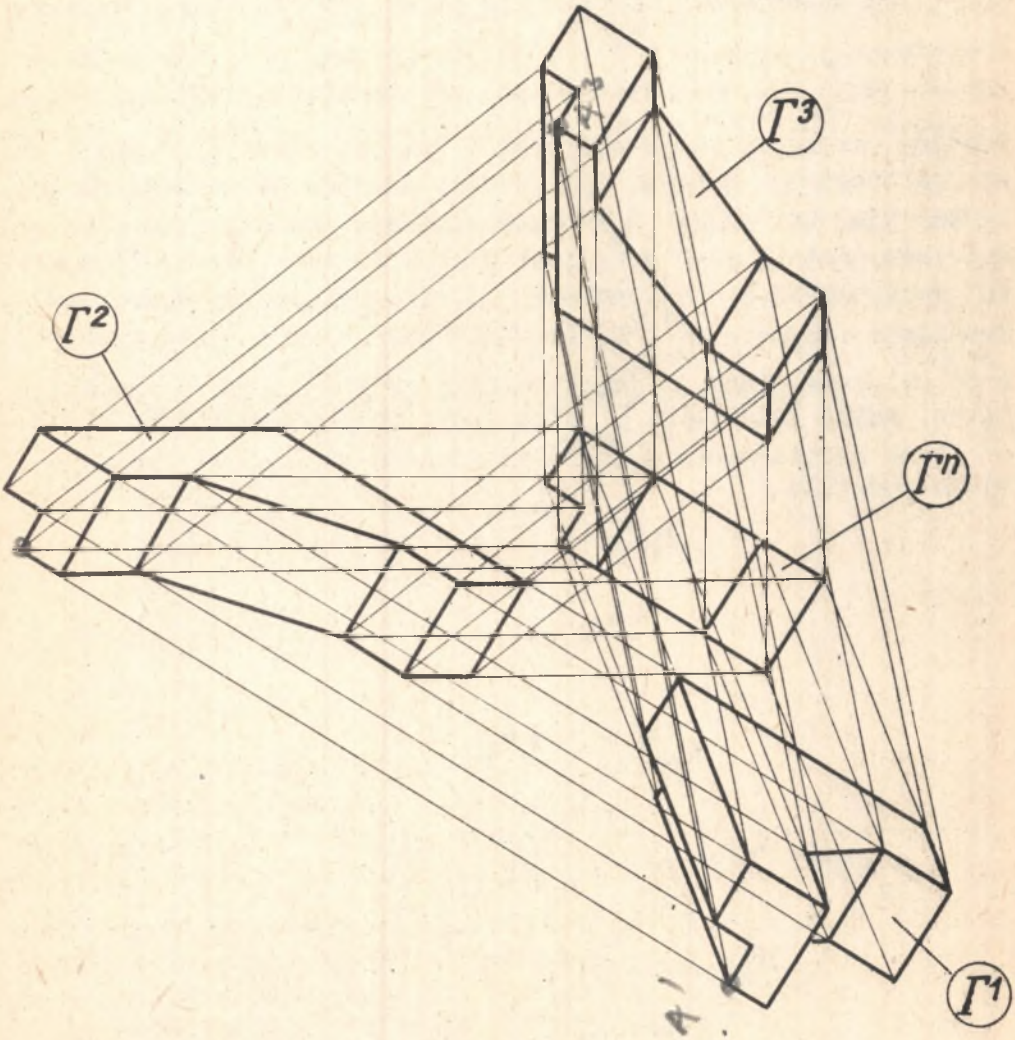
Zbiory dwuobrazów P^1P^2, Q^1Q^2 ... i P^1P^3, Q^1Q^3 ... oznaczymy odpowiednio przez [1,2] i [1,3]. Zmiana kierunku rzutów k_2 na kierunek k_3 przekształca wzajemnie jednoznacznie zbiór [1,2] na zbiór [1,3] i to przekształcenie nazwiemy transformacją jednokierunkową, oznaczając ją krótko (1, 2/3). W tej transformacji obrazy P^1P^2, Q^1Q^2 ... zostają skręcone o stały kąt $\vartheta = \sphericalangle k_{12}k_{13}$ odpowiednio dookoła punktów P^1, Q^1 ... jako środków obrotu, a normy wszystkich punktów zmieniają się w stałym stosunku c (rys. 13). Obrazy punktów przynależnych do rzutni (jak np. punkt H_m) przekształcają się w siebie tożsamościowo. Jeżeli więc dana jest trójka rzutów (P^1, P^2, P^3) punktu $P \in \pi$, to rzut Q^3, punktu $Q(Q^1Q^2)$ wyznaczymy przez wykreślenie trójkąta $Q^1Q^2Q^3$ środkowo podobnego do trójkąta $P^1P^2P^3$. W szczególności, jeżeli trójka $P^1P^2P^3$ jest współliniowa, czyli jeżeli $\sphericalangle\vartheta = 0^\circ$ albo 180°, to wówczas trójka $Q^1Q^2Q^3$ jest współliniowa i zachodzi równość stosunków pojedynczego podziału -

$$(P^1P^2P^3) = (Q^1Q^2, Q^3).$$



Rys. 13

Wynika stąd, że wykreślenie rzutu trzeciego Γ^3 figury Γ (Γ^1 Γ^2) można "zmechanizować" przy pomocy dwukładów (pęków) prostych równoległych tak jak to przedstawiono na rys. 14.



Rys. 14

Tę zależność (dzięki jej prostocie konstrukcyjnej) można wykorzystać w budowie tzw. aksonografów. Ponadto po nieznacznych modyfikacjach ta zależność przenosi się na każdą parę obrazów Γ^x i Γ^y figury Γ uzyskanych przez dwa rzuty na dwie rzutnie.

4.3. Dwie kolejne transformacje $(1, {}^2/3)$ i $(1, {}^3/4)$ przekształcają zbiór $[1, 2]$ tak jak transformacja $(1, {}^2/4)$ i dlatego nazywamy ją ich sumą kładąc -

$$(1, {}^2/3) + (1, {}^3/4) = (1, {}^3/4)$$

Transformację $(1, {}^3/2)$ nazywamy odwrotną do $(1, {}^2/3)$ i oznaczamy $(1, {}^3/2) = (1, - {}^2/3)$.
Suma $(1, {}^2/3) + (1, - {}^2/3) = (1, {}^2/3) + (1, {}^3/2) = (1, {}^2/2)$ jest przekształceniem tożsamościowym.
Na podstawie tych definicji można sprawdzić, że dla tak określonego dodawania zachodzi łączność, tj. -

$$\left[(1,{}^2/3)+(1,{}^3/4)\right] + (1,{}^4/5) = (1,{}^2/3)+\left[(1, {}^3/4)+(1,{}^4/5)\right] =$$

$$= (1,{}^2/5).$$

Z powyższego wynika, że zbiór transformacji jednokierunkowych z tak określonym działaniem dodawania tworzy grupę przekształceń. Analogicznie wprowadza się transformację kierunku k_1 na kierunek k_3, który oznaczymy przez $({}^1/3, 2)$. Podobnie można zbudować grupę przekształceń transformacji dwukierunkowych polegających na równoczesnej zmianie obu kierunków rzutów. Wybierając dowolnie dwie pary rzutów figury Γ na rys. 14 uzyskamy ilustrację transformacji dwukierunkowych.

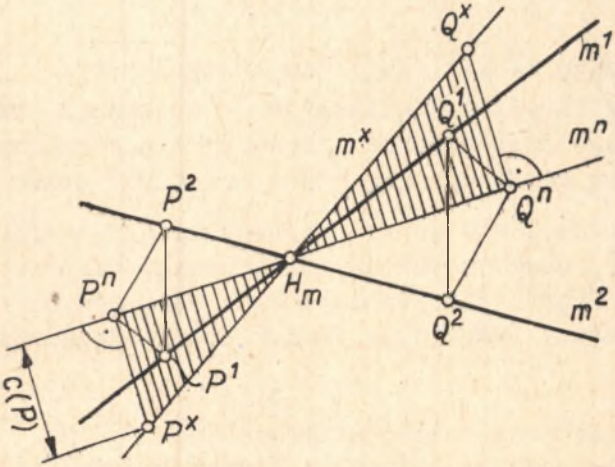
4.4. W rozwiązywaniu zadań miarowych szczególną przydatność posiada transformacja jednego z kierunków rzutów na kierunek normalny, czyli prostopadły do rzutni, który oznaczać będzie-

my przez k_n. Rzuty figur A, m, Γ... w tym kierunku oznaczymy przez A^n, m^n, Γ^n,... Odcinek skierowany P^nP nazywa się wysokością punktu P. Długość tego odcinka wyrażona w poprzednio ustalonej jednostce miary długości (przy wyznaczaniu normy n(P) punktu $P(P^1P^2)$ ust. 4.2) nazywa się cechą c(P) punktu $P(P^1P^2)$. Znak cechy ustala się tak aby zachodziła równość, sign c (P) = sign n (P).
Dla punktu $R \in \pi$, c (R) = 0.
Z podobieństw trójkątów oznaczonych tymi samymi wskaźnikami wynika równość stosunków ,

$$\frac{c(P)}{n(P)} = \frac{c(Q)}{n(Q)} = \ldots = \text{const} = \tau$$

która wyraża, że w odwzorowaniu scharakteryzowanym przez kierunki rzutów k_1 i k_2 norma punktu jest proporcjonalna do jego cechy.

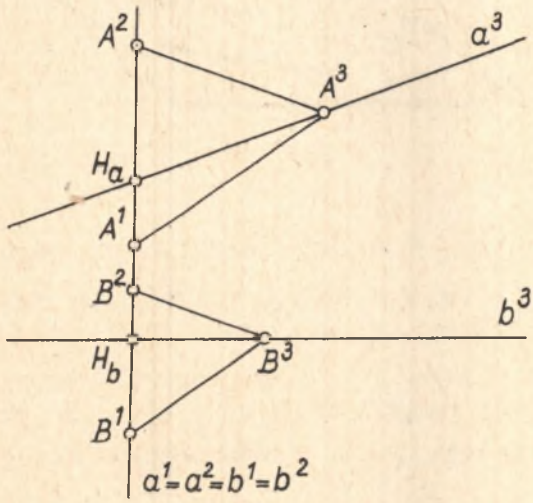
4.5. Jeżeli w zbiorze obrazów [1,2] znany jest rzut normalny P^n jednego tylko punktu $P \sim \in \pi$ oraz jego cecha c(P) to przy pomocy przekształcenia podanego na rys. 15 możemy wyznaczyć



Rys. 15

rzut normalny Q^n każdego danego punktu $Q(Q^1Q^2)$ oraz jego cechę $c(Q) = Q^nQ^x$. Tak wzbogacony zbiór [1,2] nazwiemy zmetryzowanym dlatego, że dla każdych dwu punktów $P(P^1 P^2)$ i $Q(Q^1Q^2)$ możemy już wyznaczyć ich odległość $\varrho(P\,Q)$.
Odległość tę wyznaczymy przy pomocy kładu "trapezowego" odcinka PQ na rzutnię π jak na rys. 15: $\varrho(PQ) = \varrho(P^xQ^x)$.

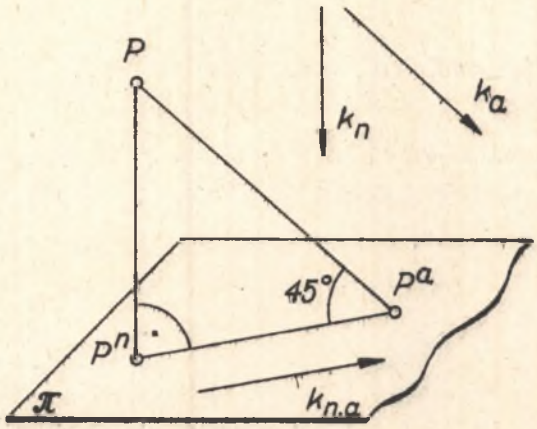
4.6. Stosując jakąkolwiek transformację $(1, {}^2/3)$ byle kierunek k_3 nie leżał w płaszczyźnie głównej $\sigma = k_1\, k_2$ możemy uzupełnić kryterium równoległości prostych podane w § 3.1. Dane na rys. 16 proste $a = H_aA$ i $b = H_bB$ nie są równoległe ponieważ $a^3 \nparallel b^3$.



Rys. 16

4.7. Na uwagę zasługuje ten szczególny przypadek transformacji dwukierunkowej, w której jeden z kierunków zostaje zastąpiony przez kierunek $k_n \perp \pi$ a pozostały na kierunek k_a zawierający z rzutnią kąt 45°. W tym odwzorowaniu $n(P) = c(P)$.

Jeżeli każdemu punktowi P przyporządkujemy wektor P^nP, to omawiany dwuobraz można rozważać jako "położenie" wszystkich tych wektorów w kierunku k_a lub "zaczesanie" tych wektorów w kierunku $k_{na} = P^nP^a$. (rys. 17).

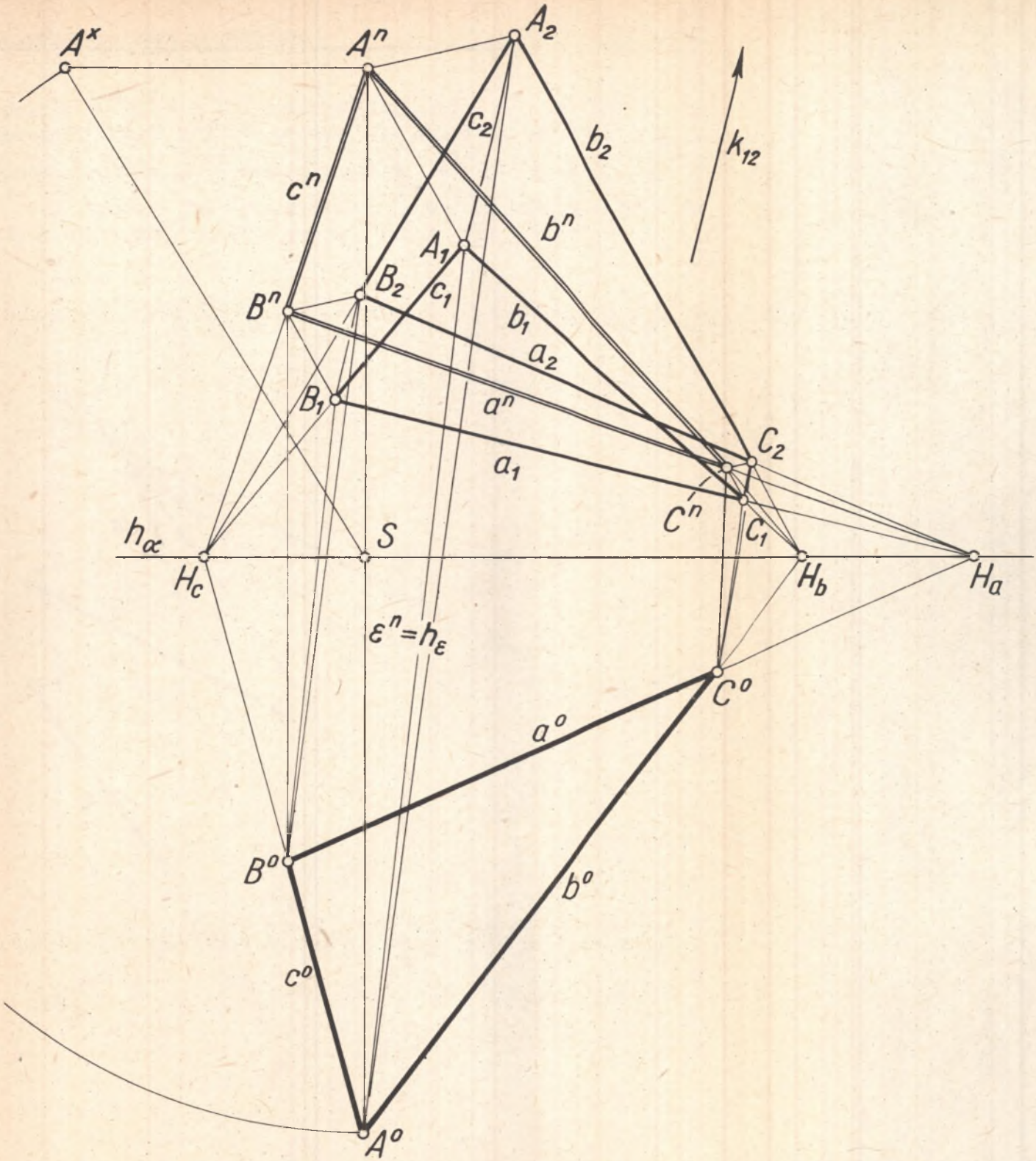


Rys. 17

Posługiwanie się zespołem dwu rzutów: normalnego Γ^n i ukośnego Γ^a (pod kątem 45° do rzutni π) jest znane pod nazwą aksonometrii wojskowej. Wykorzystuje się w tej metodzie znajomość rzutu poziomego Γ^1 jako rzutu Γ^n oryginału Γ, zaś cechy poszczególnych punktów odczytuje się z rzutu pionowego Γ'' figury Γ przedstawionej w dwuobrazowej metodzie Monge'a.

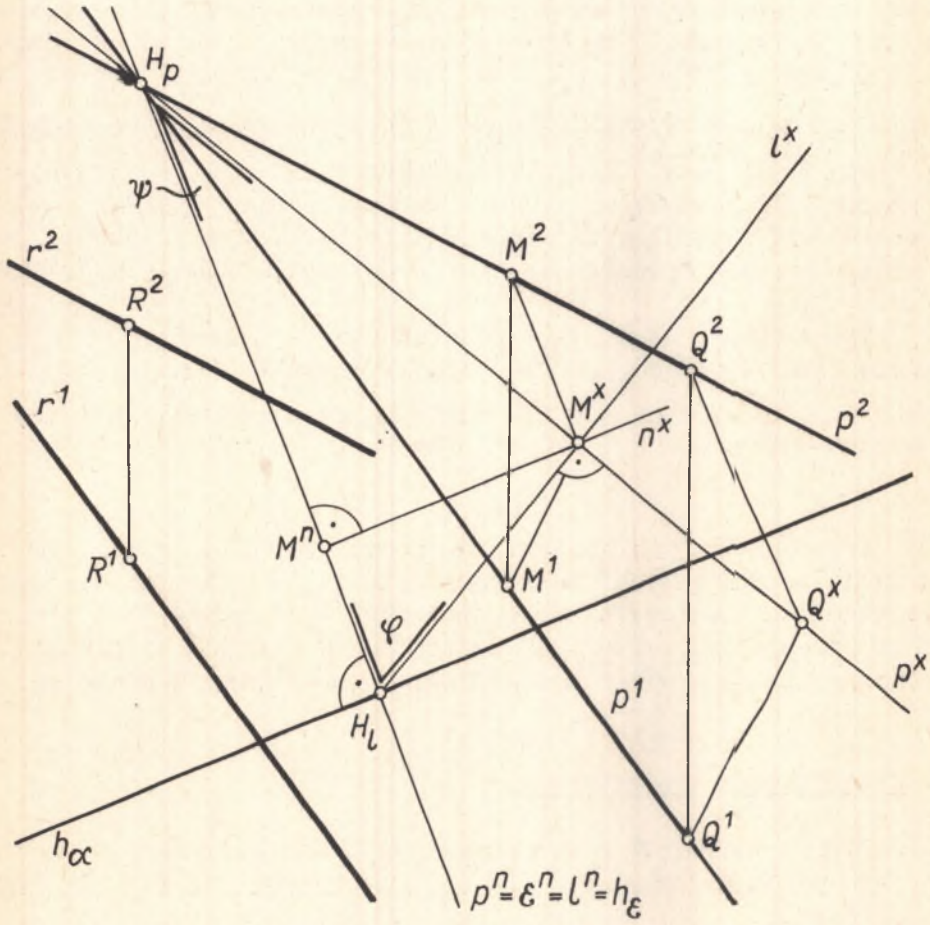
5. Prostopadłość i kłady

5.1. Dwuobraz (p^1p^2) prostej $p \perp \alpha$ wykreślimy następująco: Przez rzut normalny M^n punktu $M \in \alpha$ oraz $M \sim \varepsilon\, h_\alpha$ prowadzimy płaszczyznę $\varepsilon \perp h_\alpha$ (rys. 18). Krawędź $\varepsilon\alpha = l$ jest linią spadu płaszczyzny α względem rzutni π i z założenia $p \perp \alpha$ wynika $p \perp l$. W kładzie płaszczyzny ε na rzutnię (przez obrót o kąt 90° dookoła śladu h_ε) odmierzymy na prostej $n^x \perp \varepsilon^n$


A^x
A^n
A_2
c_2
b_2
k_{12}
c^n
b^n
A_1
B_2
c_1
B^n
b_1
a_2
B_1
a^n
C_2
a_1
C'^n
C_1
h_α
S
H_c
H_b
H_a
$\varepsilon^n = h_\varepsilon$
C^o
a^o
B^o
b^o
c^o
A^o

Rys. 19

odcinek $M^n M^x = c$ (M) i wykreślimy kład l^x prostej l a następnie kład $p^x \perp l^x$ prostej p. Punkt $p^x \varepsilon^n = H_p$ jest śladem prostej p i wraz z punktami M^1 i M^2 wyznacza rzuty p^1 i p^2 prostej p. Wykorzystując kryterium równoległości prostych wykreślimy ponadto prostą $r \in R$ i $r \perp \alpha$.



Rys. 18

5.2. Znajomość kładu p^x prostej $p(p^1p^2)$ umożliwia odmierzenie na prostej p odcinka MQ o danej długości M^xQ^x. Wykorzystując niezmienniczość stosunku pojedyńczego podziału w rzucie równoległym dwuobraz punktu Q wykreślimy przy pomocy prostych $Q^xQ^1 \parallel M^xM^1$ i $Q^xQ^2 \parallel M^xM^2$.

5.3. Aby położyć płaszczyznę $\alpha = ABC$ na rzutnię π obróćmy ją dokoła śladu h_α kładąc jeden punkt tej płaszczyzny nie przynależny do śladu h_α np. punkt A (rys. 19). Przechodząca przez ten punkt płaszczyzna $\varepsilon \perp h_\alpha$ jest płaszczyzną obrotu punktu A, a punkt $h_\alpha \varepsilon^n = S$ jest środkiem obrotu. Obrót płaszczyzny ε dokoła $h_\varepsilon = \varepsilon^n$ o kąt 90° ujawni promień obrotu $r^x = SA^x$. Okrąg $\Omega^x(S, SA^x)$ jest położonym torem punktu A; punkt $\varepsilon^n\Omega^x = A^o$ jest więc kładem punktu A na rzutnię π. Równoległość płaszczyzn obrotów poszczególnych punktów, a w konsekwencji równoległość śladów tych płaszczyzn, pozwala już na bezpośrednie wykreślenie kładów dalszych punktów płaszczyzny α.

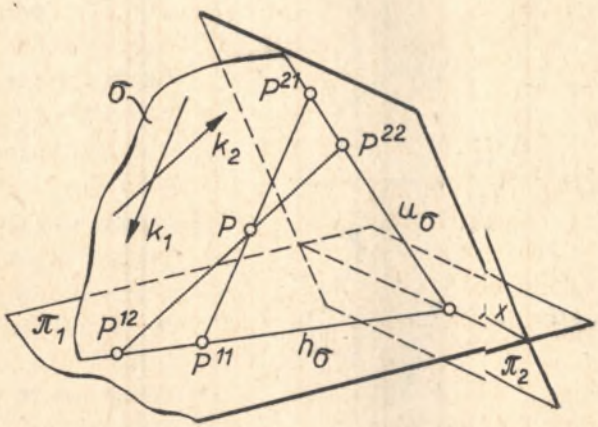
W tym kładzie ślad h_α jako oś obrotu przekształca się w siebie tożsamościowo, przeto związki łączące kład $A^oB^oC^o$ i rzuty $A^1B^1C^1$ oraz $A^2B^2C^2$ można zinterpretować jako powinowactwa osiowe.

5.4. Zespół podanych konstrukcji można uważać za zbiór "konstrukcji podstawowych" omawianej metody. W dotychczasowych rozważaniach pominięto szczególne przypadki prostych i płaszczyzn rzucających. Dla tych szczególnych położeń omawiane dotychczas konstrukcje ulegają niekiedy znacznemu uproszczeniu.

6. Transformacje podstawowe

6.1. Zespół rzutni π oraz związanych z nią kierunków rzutów k_1, k_2 nazwiemy aparatem $\{\pi_1, k_1, k_2\}$. Pozwoli to na znaczne skrócenie dalszych opisów.

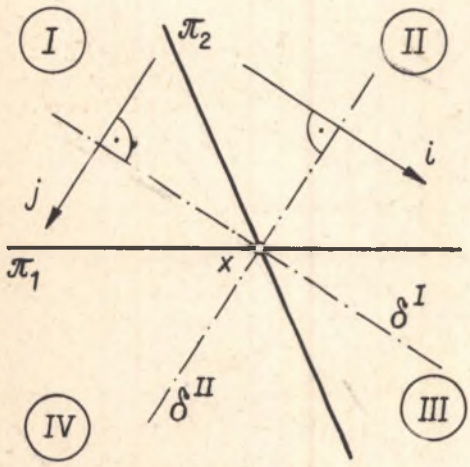
6.2. Niech dane będą dwa aparaty $\{\pi_1; k_1, k_2\}$ i $\{\pi_2, k_1, k_2\}$ o wspólnych kierunkach rzutów k_1 k_2 oraz różnych podstawach $\pi_1 \neq \pi_2$. Odwzorowują one zbiór punktów trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej na dwa płaskie zbiory dwuobrazów, które oznaczymy przez (π_1) i (π_2). Przyporządkujmy każdemu dwuobrazowi zbioru (π_1) dwuobraz zbioru (π_2) tak, aby przyporządkowane sobie dwuobrazy posiadały wspólny oryginał (rys.20). Uzyskamy wzajemnie jednoznaczne przekształcenie zbioru (π_1) na zbiór (π_2), który nazwiemy transformacją podstawową i oznaczymy przez $(\frac{\pi_1}{\pi_2})$. Przekształcenie odwrotne oznaczymy przez $(\frac{\pi_1}{\pi_2})^{-1} = (\frac{\pi_2}{\pi_1})$.



Rys. 20

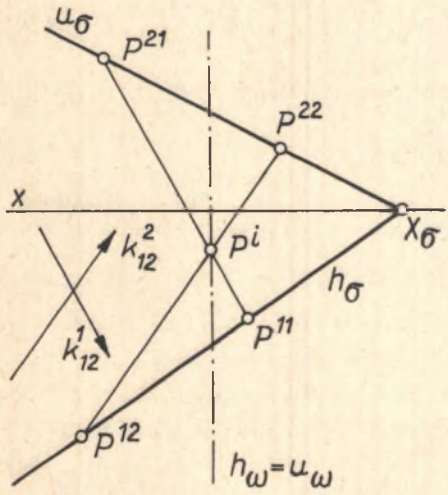
6.3. Dla zapewnienia jednoznaczności opisów, rzuty punktu P na rzutnię π_1 w kierunkach k_1 i k_2 oznaczymy przez P^{11} i P^{12} a na rzutnię π_2 przez P^{21} i P^{22} jego cechy przez $c_1(P)$ i $c_2(P)$ oraz normy przez $n_1(P)$ i $n_2(P)$. Ślady prostych a, b, ... i płaszczyzn α, β, ... na rzutni π_2 oznaczymy przez U_a, U_b, ... oraz u_α, u_β...

Zakładając $\pi_1 \nparallel \pi_2$ oznaczmy ich krawędź $\pi_1\pi_2 = x$. Nierównoległe rzutnie π_1 i π_2 tworzą cztery kąty dwuścienne (czyli obszary). Obszar w którym cechy dowolnego punktu wewnętrznego są obie dodatnie nazwiemy obszarem I, a następne ponumerujemy jako II, III, IV. Płaszczyzny dwusieczne kątów I i III oraz II i IV oznaczymy przez δ' i δ''. Przekrój obu rzutni π_1 i π_2 oraz obu płaszczyzn dwusiecznych δ' i δ'' płaszczyzną $\omega \perp x$ przedstawia rys. 21. Oznaczmy przez i oraz j kierunki rzutów i $\perp \delta''$, j $\perp \delta'$. Rzut równoległy na płaszczyznę $\tau \parallel \pi_1$ albo $\tau \parallel \pi_2$ w kierunku i lub j odwzorowuje obie rzutnie wiernie, tj. izometrycznie. Takie wierne przedstawienie obu rzutni na jednej płaszczyźnie rysunku τ można uzyskać przez zidentyfikowanie jednej z rzutni z płaszczyzną τ i położenie pozostałej rzutni na płaszczyznę τ przez obrót dokoła osi x. Dla zapewnienia jednoznaczności należy ponumerować jednoznacznie obszary oraz jednoznacznie określić "zwrot" obrotu. W istocie są to dwie różne interpretacje tego samego zespołu konstrukcji stereometrycznych zrealizowanych przy pomocy konstrukcji planimetrycznych. Uzyskuje się w ten sposób

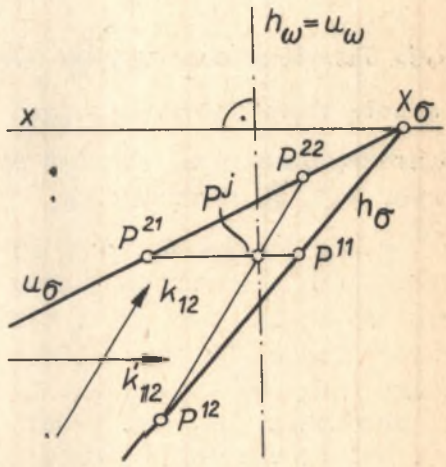


Rys. 21

"rozwinięcia" układu dwu rzutni π_1 i π_2 na jedną płaszczyznę rysunku τ (rys. 22 i 23). Przyjmując, że rysownik znajduje się w pierwszym obszarze i że stosujemy kierunek rzutów i otrzymamy rozwinięcie układu przedstawionego na rys. 20 jako rysunek 22. Jeżeli ten rysunek uważalibyśmy za rzut układu na płaszczyznę rysunku $\tau \parallel \pi_1$ i $\tau \neq \pi_1$ to wszystkie elementy tego rysunku powinny posiadać wskaźnik i, a jeżeli założylibyśmy $\tau \equiv \pi_1$, to zgodnie z poprzednio przyjętą umową § 6.3. np. rzut P^{21} należałoby również oznaczyć wskaźnikiem i, tj. P^{21i}. Aby nie komplikować oznaczeń rzutom elementów przynależnych do rzutni nie dajemy wskaźnika i (ani też wskaźnika j).

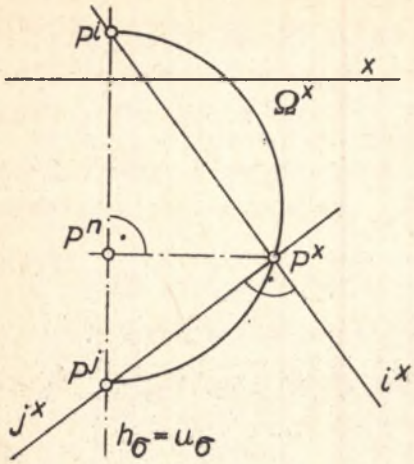


Rys.22



Rys. 23

6.4. Ponieważ kierunki i oraz j leżą w płaszczyźnie $\omega \perp x$ przeto w rozwinięciu proste $h_\omega = u_\omega \in P^i$ są śladami płaszczyzny $\omega \in P$. Jeżeli położymy płaszczyznę ω na rzutnię π_1 przez obrót dokoła śladu h_ω a następnie wykreślimy na średnicy P^iP^j półokrąg Ω^x to na tym półokręgu leżeć musi kład P^x punktu P (rys. 24). Półokrąg Ω nazwiemy zakresem punk-



Rys. 24

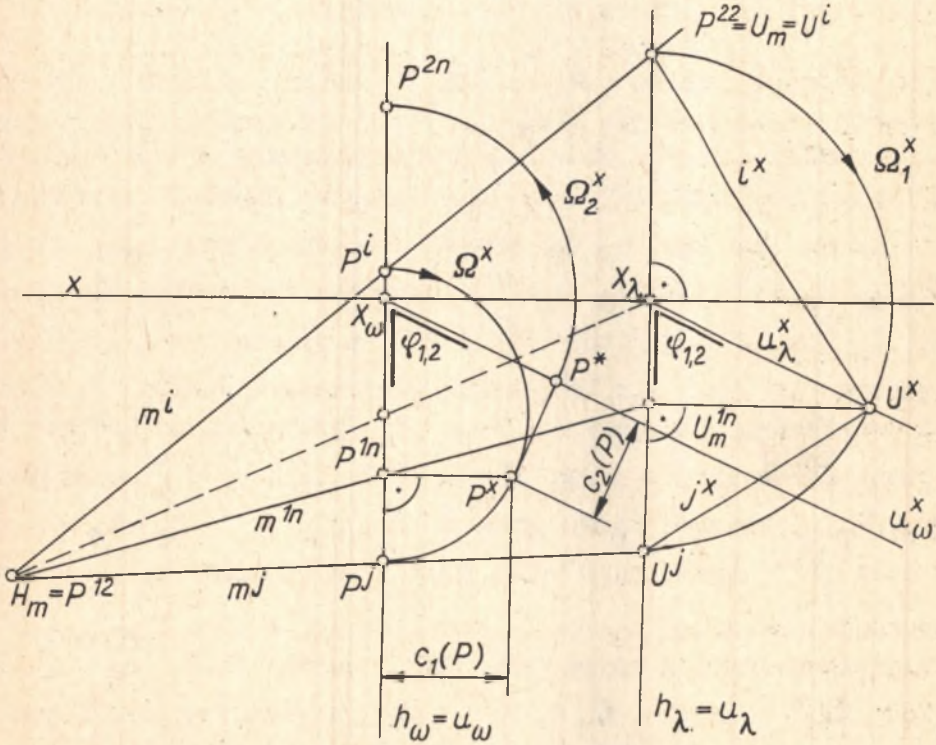
tu P a odcinek P^iP^j zakresem dla rzutu normalnego P^n punktu P na rzutnię π_1. Obierając dowolnie jeden z dwu punktów P^x albo P^n ustalamy jednoznacznie cechę c(P) punktu P względem rzutni π_1 jako odcinek P^nP^x.
W ten sposób zostanie zmetryzowany zbiór $[\pi_1]$ (patrz 4.5).

6.5. Wskażemy obecnie, że zmetryzowanie zbioru (π_1) pociąga za sobą zmetryzowanie zbioru (π_2).

Oznaczmy przez m promień rzutujący punkt P w kierunku k_2 (rys. 25). Śladami prostej $m = P^{12}P^{22}$ są punkty $P^{12} = Hm$ i $P^{22} = Um$. Na rysunku 22 i 25 punkt $P^{22} = Um$ nie jest oryginałem Um, ale rzutem punktu Um w kierunku i, co wyraża na rys. 25 zapis $Um = U^i$. Natomiast na rys. 23 punkt P^{22} jest rzutem śladu Um na rzutnię π_1 w kierunku j. Ponieważ odcinki $X_\lambda U^i$ oraz $X_\lambda U^j$ są wiernymi rzutami tego samego oryginału $X_\lambda Um$, przeto na rys. 25 punkty U^i i U^j muszą być symetrycznie położone względem osi x. Inaczej mówiąc jeżeli położymy rzutnię π_2 na rzutnię π_1 dwukrotnie przez dwa różne obroty to otrzymamy dwa kłady $X_\lambda U^i$ i $X_\lambda U^j$ tego samego oryginału $X_\lambda Um$ skąd wynika równość $X_\lambda U^i = X_\lambda U^j$. Kład płaszczyzny λ na rzutnię π_1 przez obrót tej płaszczyzny wokół śladu h_λ ujawni okrąg Ω^1 (X_λ, $X_\lambda U^i$), na którym leżeć musi kład U^x punktu Um.

Ponieważ prosta m jest promieniem rzutującym punkt P w kierunku k_2 przeto obierając dowolnie punkt P^{1n} lub P^x usta-

lamy jednoznacznie rzut normalny m^{1n} tego promienia rzutującego a tym samym położenie punktu U_m^{1n} i w konsekwencji jego wysokość wyrażoną odcinkiem $U_m^{1n}U^x$ i na odwrót. A więc tylko jeden z czterech punktów P^{1n}, P^x, U_m^{1n}, U^x może być obrany dowolnie i ten wyróżdeterminuje położenie trzech pozostałych punktów.



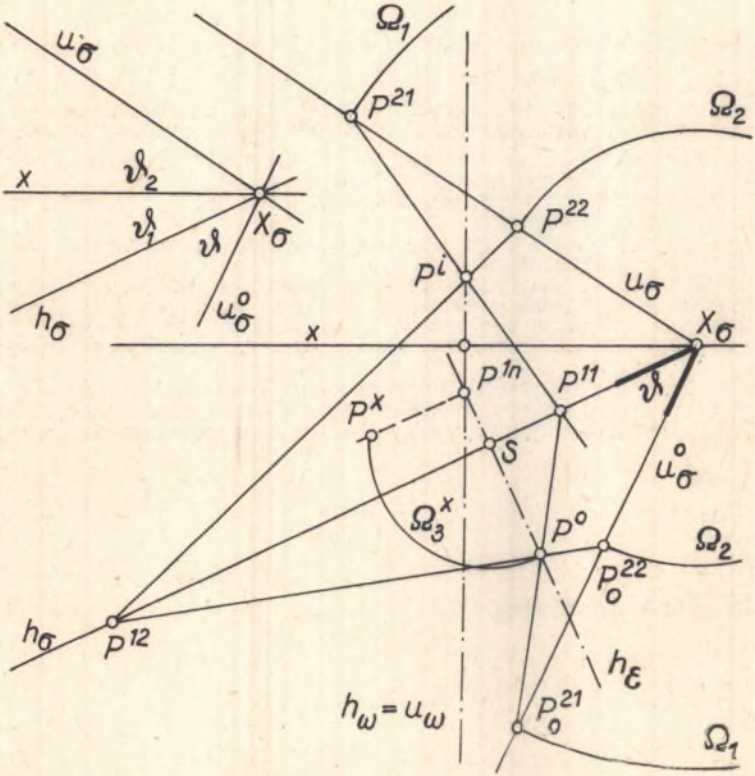
Rys. 25

Prostą $u_\omega^x \in X_\omega$ i $u_\omega^x \parallel u_\lambda^x$ jest kładem śladu u_ω a więc odległość $\varrho(P^x, u_\omega^x)$ wyraża odległość punktu P od rzutni π_2 tj. $\varrho(P^x, u_\omega^x) = \varrho(P, \pi_2) = c_2(P)$.

Znak cechy $c_2(P)$ zależy od przyjętej numeracji obszarów, która może być jednoznacznie ustalona w kładzie jakiejkolwiek płaszczyzny prostopadłej do osi x.

Okrąg Ω_2^x $(X_\omega, X_\omega P^x)$ wyznacza na śladzie u_ω rzut normalny P^{2n} punktu P na rzutnię π_2, który wraz z cechą $c_2(P)$ ustala metrykę zbioru (π_2). Analogiczną konstrukcję można uzasadnić dla jakiejkolwiek prostej $q \in P$ i $q \in \sigma$. Z porównania rysunków 20, 22 i 23 jest widoczne, że przekształcenie $\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}\right)$ można otrzymać przez dwukrotne przekształcenie osiowopowinowate o osi x i kierunkach powinowactwa $P^{11}P^{21}$ oraz $P^{12}P^{22}$.

6.6. Metrykę zbiorów (π_1) i (π_2) można również ustalić przez podanie kąta $\vartheta = \measuredangle h_\sigma u_\sigma$ jaki wyznaczają ślady płaszczyzny $\sigma // k_1, k_2$ (rys. 26). Połóżmy płaszczyznę σ na rzutnię π_1 przez obrót dokoła śladu h_σ; prosta $u_\sigma^o \in X_\sigma$ zawierająca ze śladem h_σ kąt $h_\sigma u_\sigma^o = \measuredangle\vartheta$ jest kładem śladu u_σ. Okręgi $\Omega_1(X_\sigma, X_\sigma P^{21})$ i $\Omega_2(X_\sigma, X_\sigma P^{22})$ wyznaczą na prostej u_σ^o kłady P_o^{21} i P_o^{22} punktów P^{21} i P^{22} a proste $P^{11}P^{21}$ i $P^{12}P^{22}$ przetną się w punkcie P^o, który jest kładem punktu P. Jeżeli podniesiemy płaszczyznę σ w jej pierwotne położenie to punkt P^o wyznaczy okrąg $\Omega_3(S, SP^o)$ leżący w płaszczyźnie $\varepsilon \perp h_\sigma$. Ponieważ $h_\sigma \in \pi_1$ przeto $h_\varepsilon \perp h_\sigma$ i $h_\varepsilon h_\sigma = S$ a rzut P^{1n} leżeć musi wobec $\varepsilon \perp \pi_1$ na śladzie h_ε. Z poprzednich rozważań wiadomo, że $P^{1n} \in h_\omega$ a więc $h_\varepsilon h_\omega = P^{1n}$. Kład płaszczyzny ε na rzutnię π_1 wokół śladu h_ε ujawni kład Ω_3^x okręgu $\Omega_3(S, SP^o)$ skąd uzyskamy wysokość punktu P jako odcinek $P^{1n}P^x$. Aby to zadanie posiadało rozwiązanie potrzeba i wystarcza aby kąty ϑ, $\vartheta_1 = \measuredangle x\ h_\sigma$ i $\vartheta_2 = \measuredangle x\ u_\sigma$ spełniały warunek trójkąta $(\vartheta_1 - \vartheta_2) < \vartheta < \vartheta_1 + \vartheta_2$.


u_σ
Ω_1
P^{21}
Ω_2
x
ϑ_2
ϑ_1
ϑ
X_σ
P^{22}
P^i
u_σ
h_σ
u_σ^o
x
X_σ
P^{1n}
P^{11}
ϑ
P^x
S
u_σ^o
Ω_3^x
P^o
Ω_2
P_o^{22}
h_σ
P^{12}
h_ε
$h_\omega = u_\omega$
P_o^{21}
Ω_1

Rys. 26

ДВУХКАРТИННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

Р е з ю м е

В работе сделано попытку дать общий подход к отображению на плоскость методом параллельных проекции (для разных направлений) трехмерного евклидового пространства.

Рассмотрено изменение направлений проекции т.н. трансформацию направлений и изменение плоскости проекции, т.н. базисную трансформацию. Доказано, что определение третьей проекции Γ^3 фигуры Γ заданной проекциями Γ^1 и Γ^2 дается механизировать при помощи двух пучков параллельных прямых.

Две последовательные трансформации направлений можно заместить одной трансформацией названной их суммой.
Совокупность трансформаций с так описанной их суммой как следством сложения образует группу преображений.
Введение нормального направления проекции позволяет решать метрические задачи.

Если одно из направлений нормальное, а другое образует с плоскостью проекции угол наклона ν тогда получается проекция аксонометрическая, т.н. кавальерная перспектива. В частности, когда $\nu = 45^0$ получается военная перспектива.

Используя базисные трансформации получается возможность просто и ясно обосщить метод Монжа через замену перпендикулярных плоскостей проекций наклонными плоскостями и нормальных направлений проекций произвольными направлениями.

ZWEIBILDIGE PARALLELPROJEKTION

Z u s a m m e n f a s s u n g

Im vorliegenden Artikel wurde eine allgemeine Auffassung der Abbildung des dreidimensionalen euklidischen Raumes auf Flächen mittels zwei Parallelprojektionen (in verschiedenen Richtungen) angegeben. Die Änderung einer(zwei) Projektionsrichtung/en) wurde als Transformation einer (zwei) Ruchtung/en und die Umformung der Projektionsfläche als Grundtransformation bezeichnet.

Es wurde bewiesen, dass man das Aufzeichnen der dritten Projektion Γ^3 einer Figur Γ die durch die Projektionen Γ^1 und Γ^2 gegeben ist mittels zwei Systemen von parallelen Linien mechanisieren kann (Prinzip des Aksonografes). Zwei aufeinanderfolgende Transformationen einer Richtung kann man mit einer dritten, die mit der Summe benannt ist, vertreten. Eine Menge von Transformationen mit nach der Additionsformel bezeichne-

ten Summe bildet eine Umformungsgruppe. Bei Einführung einer normalen Projektionsrichtung ist man im Stande auch Massaufgaben zu lösen. Wenn eine normale Projektionsrichtung vorhanden ist und die zweite mit ihrer Projektionsfläche einen beliebigen Winkel ϑ bildet, dann erhalten wir die Parallelprojektion die in der technischen Zeichnung als Parallelperspektive, schiefe Axonometrie oder auch als Kavallerie- Perspektive gennant ist.

Im speziellen Fall, wenn $\vartheta = 45^{\circ}$ ist diese axonometrische Projektion als Militär-Perspektive bekannt.

Mit Hilfe der Grundtransformation kann man die orthogonale Parallelprojektion auf beliebige schiefwinklige in einfacher Weise verallgemeinen.

Wpłynęło do Redakcji 15.II.66 r.