ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: ELEKTRYKA z.188 Nr kol. 1627

Tadeusz BIAŁOŃ
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

METODY DOBORU PARAMETRÓW OBSERWATORÓW LINIOWYCH NA PRZYKŁADZIE OBSERWATORA ZMIENNYCH STANU MASZYNY INDUKCYJNEJ

Streszczenie. W niniejszym opracowaniu, wychodząc od modeli matematycznych liniowego, stacjonarnego obiektu dynamicznego i liniowego, stacjonarnego obserwatora zmiennych stanu, wyprowadzono warunki, których spełnienie gwarantuje poprawną estymację zmiennych stanu, a następnie, korzystając z tych warunków, zaproponowano cztery różne algorytmy doboru parametrów obserwatorów. Dwa z zaprezentowanych algorytmów umożliwiają syntezę obserwatora, który oprócz zmiennych stanu obiektu odtwarza również pochodne tych zmiennych.

METHODS FOR LINEAR OBSERVER DESIGN ON THE EXAMPLE OF STATE OBSERVER FOR INDUCTION MOTOR

Summary. In the paper four algorithms for linear observer design are proposed. The algorithms are based on the sets of conditions derived from the models of a linear, time-invariant system and a linear, time-invariant state observer, fulfillment of which provides correct state estimation. Two of the presented algorithms enable design of an observer, that estimates not only state variables but also their derivatives.

1. WSTĘP

Teoria liniowych obserwatorów zmiennych stanu została dobrze poznana i szeroko opisana w literaturze [2, 4, 5, 6, 7]. Znacząca większość opracowań dotyczących obserwatorów liniowych nie zawiera jednak prostych w zastosowaniu algorytmów doboru ich parametrów podających sposób postępowania krok po kroku. Dwa z zaprezentowanych algorytmów korzystają z zestawu warunków które zostały wyprowadzone bez definiowania macierzy transformacji [2, 6] wiążącej zmienne stanu obserwatora ze zmiennymi stanu obiektu obserwowanego. Pozwoliło to na zmniejszenie liczby założeń, jakie muszą spełniać macierze obserwatora, co z kolei zwiększyło możliwości redukcji rzędu obserwatora. Pozostałe dwa algorytmy bazują na zestawie warunków wyprowadzonych przy wykorzystaniu macierzy transformacji. W stosunku do algorytmów opisanych w literaturze algorytmy te zostały uzupełnione o analizę możliwości odtwarzania pochodnych zmiennych stanu obiektu obserwowanego. Wszystkie opisane algorytmy mogą posłużyć do doboru parametrów liniowych obserwatorów niestacjonarnych, jeżeli parametry, od których zależą współczynniki kolejnych macierzy obiektu obserwowanego, zmieniają się znacznie wolniej od zmiennych stanu tego obiektu oraz kolejne macierze dobieranego obserwatora są funkcjami ciągłymi tych parametrów w przedziale ich zmienności. W trakcie rozważań dużo uwagi poświęcono zagadnieniom istnienia rozwiązań zadanych problemów, co zaowocowało podaniem szeregu zależności pozwalających w prosty sposób określić, czy synteza danego obserwatora jest możliwa, oraz ułatwiających wybór najlepszego w danym przypadku algorytmu postępowania.

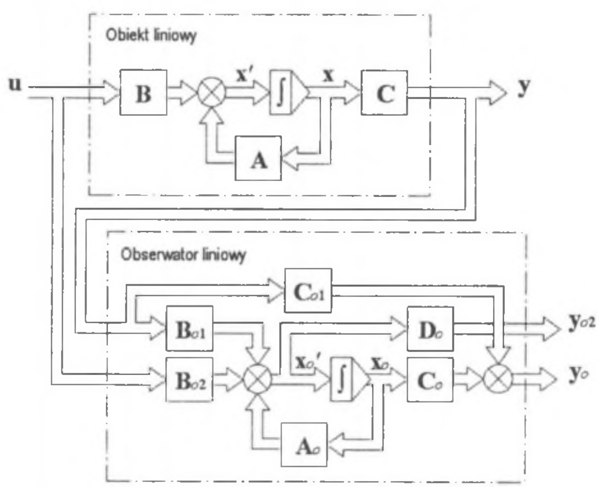
2. RÓWNANIA OBSERWATORA LINIOWEGO

Liniowy obiekt dynamiczny, o p wejściach, q wyjściach oraz o n zmiennych stanu, można opisać za pomocą równania stanu i równania wyjścia postaci [2, 3]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{2}$$

gdzie macierze **A**, **B** i **C** mają wymiary odpowiednio $n{\times}n$, $n{\times}p$ i $q{\times}n$, a wektory **u**, **x** i **y** mają odpowiednio p, n i q elementów. Wartości macierzy **A**, **B** i **C** są stałe w czasie, a para macierzy **A** i **C** jest obserwowalna [2, 5].



Rys. 1. Schemat blokowy obiektu liniowego i obserwatora liniowego
Fig. 1. Block diagram of linear system and linear observer

Do estymacji zmiennych stanu tak zdefiniowanego obiektu można użyć obserwatora liniowego o n_o zmiennych stanu i q_o wyjściach, opisanego następującymi równaniami [4, 6]:

$$\dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{A}_o\mathbf{x}_o + \mathbf{B}_{o1}\mathbf{y} + \mathbf{B}_{o2}\mathbf{u}, \tag{3}$$

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{C}_o\mathbf{x}_o + \mathbf{C}_{o1}\mathbf{y}, \tag{4}$$

gdzie macierze $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{B}_{o1}$, $\mathbf{B}_{o2}$, $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$ mają wymiary odpowiednio $n_o{\times}n_o$, $n_o{\times}q$, $n_o{\times}p$, $q_o{\times}n_o$ i $q_o{\times}q$. $\mathbf{x}_o$ jest wektorem zmiennych stanu obserwatora o wymiarze n_o, a $\mathbf{y}_o$ jest wektorem wyjść obserwatora o wymiarze q_o. Jeżeli opisany równaniami (3) i (4) obserwator spełnia warunek $n = n_o$, to jest to obserwator pełnego rzędu, jeżeli $n > n_o$, to jest to obserwator rzędu zredukowanego. Tak zdefiniowanego obserwatora można uzupełnić o dodatkowe równanie:

$$\mathbf{y}_{o2} = \mathbf{D}_o\dot{\mathbf{x}}_o, \tag{5}$$

służące do estymacji pochodnych zmiennych stanu obiektu - $\dot{\mathbf{x}}$, gdzie $\mathbf{D}_o$ jest macierzą o wymiarze $n_o \times n_o$, a $\mathbf{y}_{o2}$ jest dodatkowym wektorem wyjść obserwatora o wymiarze n_o odwzorowującym wektor pochodnych zmiennych stanu $\dot{\mathbf{x}}$. W dalszej części rozważań będą rozpatrywane tylko obserwatory, których liczba wyjść jest równa liczbie zmiennych stanu $q_o = n_o$. Schematy blokowe obiektu obserwowanego i obserwatora przedstawiono na rys. 1.

Obserwator liniowy opisany równaniami (3) i (4) powinien jak najdokładniej odwzorowywać wektor stanu obiektu $\mathbf{x}$, dlatego wektor wyjścia obserwatora $\mathbf{y}_o$ powinien być w każdej chwili czasowej równy temu wektorowi. Na tej podstawie można zapisać warunek [2], [6]:

$$\mathbf{y}_o = \mathbf{T}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{T}$ jest zerojedynkową macierzą o wymiarze $n_o \times n$, a ε wektorem błędu estymacji o wymiarze n_o. Macierz $\mathbf{T}$ w każdym wierszu zawiera dokładnie jeden element niezerowy. W przypadku gdy obserwator jest obserwatorem pełnego rzędu, macierz $\mathbf{T}$ jest macierzą jednostkową rzędu $n = n_o$.

Na podstawie warunku (6), równań obiektu obserwowanego (1) i (2) oraz równań obserwatora, (4) i (5) można wyprowadzić warunki, jakie powinny spełniać macierze obserwatora, aby przebiegi błędów estymacji nie zależały od wartości zmiennych stanu $\mathbf{x}$ i wymuszeń $\mathbf{u}$ obiektu obserwowanego. Warunki te mają następującą postać:

$$\mathbf{A}_o\mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{A}_o\mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{C}_{o1}\mathbf{C} + \mathbf{B}_{o1}\mathbf{C} - \mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A} + \mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{C}_{o1}\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\mathbf{B}_{o2} - \mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{T}\mathbf{B} + \mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{C}_{o1}\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Jeżeli obserwator ma służyć do estymacji nie tylko zmiennych stanu, ale także ich pochodnych, elementy wektora zmiennych stanu obserwatora $\mathbf{x}_o$ powinny być kombinacjami liniowymi elementów wektora zmiennych stanu obiektu obserwowanego $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{w}, \tag{9}$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest macierzą o wymiarach $n_o \times n$. Warunek ten wynika bezpośrednio z równania (5). Wektor $\mathbf{w}$ o wymiarze n_o jest zależny tylko od wektora błędu estymacji ε. Dodatkowy wektor wyjścia obserwatora $\mathbf{y}_{o2}$ powinien być w każdej chwili czasowej równy pochodnej wektora stanu obiektu $\dot{\mathbf{x}}$, skąd wynika warunek:

$$\mathbf{y}_{o2} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \tag{10}$$

gdzie ε_2 jest wektorem błędu estymacji pochodnych zmiennych stanu o wymiarze n_o.

W tym przypadku uniezależnienie błędów estymacji od zmiennych stanu obiektu $\mathbf{x}$ oraz od wymuszeń $\mathbf{u}$ wymaga wprowadzenia czterech warunków:

$$\mathbf{C}_o\mathbf{K} - \mathbf{T} + \mathbf{C}_{o1}\mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

$$\mathbf{A}_o\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{B}_{o1}\mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{12}$$

$$\mathbf{B}_{o2} - \mathbf{K}\mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{13}$$

$$\mathbf{D}_o\mathbf{K} = \mathbf{T}. \tag{14}$$

Większa liczba warunków jest konsekwencją konieczności uwzględnienia założeń (9) i (10). W obydwu przypadkach, gdy obserwator odtwarza tylko zmienne stanu obiektu obserwowanego oraz gdy odtwarza zmienne stanu i ich pochodne, równanie błędu obserwatora przyjmuje tę samą postać:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_o \mathbf{A}_o \mathbf{C}_o^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} . \tag{15}$$

Po porównaniu równania (5) z warunkiem (10) otrzymano:

$$\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{D}_o \dot{\mathbf{x}}_o . \tag{16}$$

Ze względu na to, że macierz $\mathbf{D}_o$ w przypadku ogólnym nie jest macierzą kwadratową, nie jest możliwe zapisanie równania błędu dla wektora ε_2. Na podstawie warunków (11), (12), (13) i (14) oraz równań obiektu (1) i (2) oraz obserwatora (3) i (4) można uzyskać zależność:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{D}_o \mathbf{A}_o \mathbf{C}_o^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} . \tag{17}$$

z której wynika, że wektor błędów estymacji pochodnych zmiennych stanu ε_2 jest liniowo zależny od wektora błędów estymacji zmiennych stanu ε. Wynika stąd, że błędy te będą zanikać z takimi samymi stałymi czasowymi. Ponadto, w ten sam sposób można uzyskać zależność:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{D}_o \mathbf{C}_o^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} , \tag{18}$$

z której wynika, że wartości wektora ε_2 są wprost proporcjonalne do pochodnych wektora ε. Wynika stąd, że im szybciej będą zanikać błędy estymacji zmiennych stanu ε, tym większe wartości będą osiągać błędy estymacji pochodnych zmiennych stanu ε_2.

3. DOBÓR PARAMETRÓW OBSERWATORA LINIOWEGO

Synteza obserwatora liniowego polega na odpowiednim dobraniu wartości wszystkich jego macierzy: $\mathbf{A}_o$, $\mathbf{B}_{o1}$, $\mathbf{B}_{o2}$, $\mathbf{C}_o$, $\mathbf{C}_{o1}$ i ewentualnie $\mathbf{D}_o$, tak aby spełniały one wyprowadzone w rozdziale 2 warunki (7) i (8) albo warunki (11), (12), (13) i (14). Ponadto, dodatkowe wymagania są stawiane macierzy $\mathbf{A}_o$, której wartości własne (pierwiastki równania charakterystycznego obserwatora) są odpowiedzialne za zachowanie obserwatora w stanach nieustalonych. Zagadnienia z tym związane zostały opisane między innymi w pozycjach [2], [3] i [8]. Aby zapewnić szerokie możliwości doboru wartości własnych tej macierzy i jednocześnie uprościć dalsze rozważania, założono następującą jej postać [4]:

$$\mathbf{A}_o = a_o \mathbf{I}_{n_o} , \tag{19}$$

gdzie a_o jest stałą, w ogólnym przypadku liczbą zespoloną. Obserwator, którego macierz $\mathbf{A}_o$ ma postać określoną wzorem (19), ma tylko jedną, wielokrotną wartość własną równą co do wartości a_o, a krotność tej wartości własnej jest równa rzędowi obserwatora n_o.

4. ALGORYTMY SYNTEZY LINIOWYCH OBSERWATORÓW ZMIENNYCH STANU

W rozdziale 2 przedstawiono dwa różne zestawy warunków (7) i (8) oraz (11), (12), (13) i (14). Warunki te są podstawą doboru kolejnych macierzy modelu matematycznego obserwatora. Można warunki te wykorzystać na dwa sposoby. Pierwszy sposób polega na utworzeniu i rozwiązaniu jednego dużego układu równań i wyznaczeniu wszystkich macierzy obserwatora naraz. Metoda ta lepiej wykorzystuje możliwości każdego z zestawów warunków, lecz wymaga dużego nakładu pracy i obliczeń. Dwa poniżej przedstawione algorytmy bazujące na tej metodzie nazwano algorytmami ogólnymi. Drugi sposób polega na kolejnym wykorzystaniu poszczególnych warunków i obliczaniu macierzy obserwatora jedna po drugiej. Ze względu na konieczność wprowadzenia dodatkowych założeń ten tok postępowania zapewnia mniejsze możliwości niż poprzedni, lecz nie wymaga wielu skomplikowanych obliczeń. Dwa algorytmy bazujące na tej metodzie nazwano algorytmami uproszczonymi.

4.1. Ogólny algorytm syntezy liniowego obserwatora zmiennych stanu

W punkcie 2 wyprowadzono warunki (7) i (8), jakie muszą spełniać macierze liniowego obserwatora zmiennych stanu, aby zapewnić poprawne jego działanie. Warunki te są podstawą do wyznaczenia tych macierzy. Poszukiwane są macierze o postaciach:

$$\mathbf{C}_o = \left[\alpha_{i,j}\right]_{n_o\times n_o}, \quad \mathbf{C}_{o1} = \left[\beta_{k,l}\right]_{n_o\times q}, \quad \mathbf{B}_{o1} = \left[\gamma_{m,n}\right]_{n_o\times q}, \quad \mathbf{B}_{o2} = \left[\delta_{r,s}\right]_{n_o\times p}. \tag{20}$$

Macierz $\mathbf{A}_o$ jest określona równaniem (19), a macierz $\mathbf{T}$ jest macierzą rzędu n_o o wymiarach i wartościach elementów zależnych od rzędu obserwatora i wyboru estymowanych zmiennych stanu obiektu obserwowanego. Podstawiając zależność (19) oraz wyrażenia (20) do warunku (7) oraz po wykonaniu wszystkich działań na macierzach po lewej stronie równania i porównaniu komórek otrzymanej w ten sposób macierzy do zera, otrzymuje się układ równań nieliniowych. Nieliniowość układu równań wynika z występowania w zależności (7) iloczynu macierzy $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$ będących niewiadomymi. Postępując analogicznie z warunkiem (8) otrzymano wyrażenie, które po wykonaniu wszystkich działań macierzowych i przyrównaniu wszystkich komórek powstałej w ten sposób macierzy do zera można przekształcić w układ równań nieliniowych.

Łącząc obydwa otrzymane układy równań w jeden, otrzymano układ $n_o\cdot(n + p)$ równań nieliniowych z $n_o\cdot(n_o + p + 2q)$ niewiadomymi. Układ ten można zlinearyzować zakładając odgórnie wartości wszystkich elementów macierzy $\mathbf{C}_o$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy różnica liczby niewiadomych i równań jest większa bądź równa liczbie elementów tej macierzy. Na tej podstawie można wyprowadzić warunek:

$$2q - n \geq 0. \tag{21}$$

Aby zlinearyzowany układ równań miał zawsze jednoznaczne rozwiązanie, należy założyć wartości takiej liczby niewiadomych, aby ilość pozostałych niewiadomych była równa liczbie równań, co opisuje równanie:

$$d = n_o\left(n_o + 2q - n\right), \tag{22}$$

gdzie d jest liczbą niewiadomych których wartości należy założyć. Dodatkowo, aby zagwarantować w każdym przypadku istnienie rozwiązania zlinearyzowanego układu równań, należy tak dobrać wartość a_o, aby spełniony był warunek[1]:

$$\text{rząd}\left(a_o\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right) = n. \tag{23}$$

W przypadku niespełnienia tego warunku może się zdarzyć (lecz nie musi), że otrzymany układ równań stanie się układem równań sprzecznych lub jedynym jego rozwiązaniem będą macierze zerowe.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na dodatkową, użyteczną właściwość równania (22). Równanie to może posłużyć do wyznaczenia przedziału wartości, do którego musi należeć rząd obserwatora (wartość n_o), aby synteza tego obserwatora była możliwa. Zakładając, że wartości

[1] Wszystkie podane w tej pracy warunki rozwiązalności układów równań wynikają z twierdzenia Kroneckera-Capellego [1] i gwarantują istnienie rozwiązania. W niektórych przypadkach może się zdarzyć jedynym rozwiązaniem będzie rozwiązanie zerowe. Co prawda, podano w niektórych przypadkach warunki zmniejszające prawdopodobieństwo wystąpienia takiego rozwiązania, lecz są to warunki konieczne, lecz nie konieczne i wystarczające.

n_o, q i n są liczbami całkowitymi większymi od zera (obiekt obserwowany i obserwator mają co najmniej po jednej zmiennej stanu i dodatkowo, obiekt obserwowany ma co najmniej jedno wyjście), można powiedzieć, że synteza obserwatora jest możliwa wtedy i tylko wtedy, gdy wartość d jest większa bądź równa zeru. Gdy d osiągnie wartość mniejszą od zera, oznacza to, że rozpatrywany układ równań zawiera więcej niezależnych równań niż niewiadomych, a więc nie ma rozwiązania. Z równania (22) wynika, że d jest większe od zera, gdy:

$$n_o \geq n - 2q \,. \tag{24}$$

Na tej podstawie można stwierdzić, że rząd projektowanego opisywaną metodą obserwatora powinien należeć do przedziału:

$$\begin{cases} n-2q \leq n_o \leq n, & \text{gdy} \quad n-2q \geq 1, \\ 1 \leq n_o \leq n, & \text{gdy} \quad n-2q < 1. \end{cases} \tag{25}$$

Ostatecznie, sposób postępowania w trakcie syntezy liniowego obserwatora zmiennych stanu jest następujący:

1. Należy wybrać rząd obserwatora i zmienne stanu obiektu podlegające estymacji, tak aby rząd ten spełniał zależność (25) i na tej podstawie założyć postać macierzy **T**, tak aby jej rząd był równy wybranemu rzędowi obserwatora.
2. Założyć wartość a_o tak aby spełniony był warunek (23).
3. Zapisać postacie macierzy $\mathbf{B}_{o1}$, $\mathbf{B}_{o2}$, $\mathbf{C}_o$ oraz $\mathbf{C}_{o1}$ i utworzyć układ równań.
4. Jeżeli warunek (21) jest spełniony, założyć wartości elementów macierzy $\mathbf{C}_o$, tak aby jej rząd był równy n_o. Najłatwiej jest podstawić za tę macierz macierz jednostkową **I**.
5. Założyć dodatkowo wartości tylu niewiadomych, by ogólna liczba założonych niewiadomych z elementami macierzy $\mathbf{C}_o$ włącznie była określona zależnością (22).
6. Rozwiązać otrzymany układ równań wyznaczając wartości elementów macierzy $\mathbf{B}_{o1}$, $\mathbf{B}_{o2}$, $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$.

4.2. Uproszczony algorytm syntezy liniowego obserwatora zmiennych stanu

Algorytm ten również wykorzystuje warunki (7) i (8), przy czym każdy z tych warunków jest analizowany oddzielnie i wykorzystywany na innym etapie obliczeń. Uproszczenie obliczeń jest jednak w tym przypadku okupione zmniejszeniem możliwości algorytmu, objawiającym się mniejszą swobodą wyboru rzędu obserwatora.

Po podstawieniu do warunku (7) założenia (19) otrzymano równanie:

$$(\mathbf{C}_{o1}\mathbf{C} - \mathbf{T})(\mathbf{A} - a_o\mathbf{I}_n) + \mathbf{C}_o\mathbf{B}_{o1}\mathbf{C} = \mathbf{0} \,. \tag{26}$$

Równanie (26) może posłużyć do wyznaczenia macierzy $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$, po uprzednim założeniu wartości elementów macierzy $\mathbf{B}_{o1}$. W ogólnym przypadku obserwatora zredukowanego rzędu, aby rozwiązać równanie (26), należy podstawić do tego równania jako niewiadome macierze:

$$\mathbf{C}_o = \left[\alpha_{i,j}\right]_{n_o \times n_o}, \quad \mathbf{C}_{o1} = \left[\beta_{k,l}\right]_{n_o \times q} \,. \tag{27}$$

W ten sposób, po wykonaniu wszystkich działań macierzowych oraz po porównaniu do zera wszystkich komórek powstałej w ten sposób po lewej stronie równania macierzy, można równanie to przekształcić w układ $n \cdot n_o$ równań liniowych z $(q + n_o)n_o$ niewiadomymi. Układ ten ma na pewno jednoznaczne, niezerowe rozwiązanie, gdy spełniony jest szereg warunków. Pierwszym z nich jest równość liczby równań i liczby niewiadomych, skąd możemy obliczyć liczbę niewiadomych d, których wartości należy założyć:

$$d = q + n_o - n. \tag{28}$$

Na podstawie warunku (28), postępując analogicznie jak w przypadku warunku (22), można określić dolną granicę przedziału, do jakiego powinna należeć liczba zmiennych stanu obserwatora n_o (górną granicę, zależną od macierzy **C**, omówiono poniżej):

$$\begin{cases} n-q \le n_o \le \text{rząd}(\mathbf{C}), & \text{gdy} \quad n-q \ge 1, \\ 1 \le n_o \le \text{rząd}(\mathbf{C}), & \text{gdy} \quad n-q < 1. \end{cases} \tag{29}$$

Porównując warunki (25) i (29), widać, że przedstawiony w punkcie 4.1 algorytm ma większe możliwości, gdyż w ogólnym przypadku umożliwia większą redukcję rzędu obserwatora.

Aby rozpatrywany układ równań miał zawsze rozwiązanie, macierz **A** obiektu obserwowanego powinna spełniać zależność:

$$\text{rząd}\left(a_o \mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right) = n\,. \tag{30}$$

Spełnienie tego warunku należy zapewnić przez odpowiedni dobór wartości a_o, analogicznie jak w przypadku warunku (23). Również w przypadku omawianego algorytmu brak spełnienia tego warunku nie jest równoznaczny z brakiem możliwości syntezy obserwatora.

Kolejny warunek zapewniający istnienie rozwiązania układu równań jest opisany zależnością:

$$\text{rząd}\left(\mathbf{B}_{o1}\mathbf{C}\right) = n_o\,, \tag{31}$$

a jego spełnienie należy zapewnić odpowiednio dobierając macierz $\mathbf{B}_{o1}$. Ponadto, konieczność spełnienia równania (31) wymaga, aby rząd obserwatora był nie większy niż rząd macierzy **C** obiektu obserwowanego. W przeciwieństwie do warunku (30), niespełnienie zależności (31) w większości przypadków prowadzi do braku rozwiązania analizowanego układu równań, lub do przypadku, gdy jedynymi rozwiązaniami są macierze zerowe.

W przypadku gdy dokonujemy syntezy obserwatora pełnego rzędu ($n_o = n$), macierz **T** staje się macierzą jednostkową rzędu n. Ponadto, jeżeli macierz **C** jest macierzą kwadratową rzędu n (liczba zmiennych stanu obiektu jest równa liczbie wyjść $n = q$), możliwe jest przekształcenie równania (26) do postaci umożliwiającej bezpośrednie wyliczenie macierzy $\mathbf{C}_o$:

$$\mathbf{C}_o = \left(\mathbf{A} - a_o \mathbf{I}_n\right)\left(\mathbf{B}_{o1}\mathbf{C}\right)^{-1}. \tag{32}$$

Dodatkowo założono, że macierz $\mathbf{C}_{o1}$ jest macierzą zerową. Założenie takie znacznie ułatwia syntezę obserwatora nie wpływając na rozwiązalność równania (26), pod warunkiem że spełniony jest warunek (30). Po wyznaczeniu macierzy $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$ macierz $\mathbf{B}_{o2}$ można wyznaczyć z warunku (8):

$$\mathbf{B}_{o2} = \mathbf{C}_o^{-1}\left(\mathbf{T} - \mathbf{C}_{o1}\mathbf{C}\right)\mathbf{B}\,, \tag{33}$$

który dla obserwatora pełnego rzędu i po posłużeniu się wzorem (32) przyjmuje postać:

$$\mathbf{B}_{o2} = \mathbf{C}_o^{-1}\mathbf{B}\,. \tag{34}$$

Ostatecznie, podczas syntezy liniowego obserwatora zmiennych stanu metodą uproszczoną można przyjąć następujący sposób postępowania:

1. Dobrać liczbę zmiennych stanu (rząd) obserwatora, tak aby spełniona była zależność (29).
2. Wypełnić zerami i jedynkami macierz **T**, o wymiarach $n_o \times n$, tak by kolejnym elementom wektora wyjścia obserwatora $\mathbf{y}_o$ odpowiadały wybrane zmienne stanu obiektu obserwowanego (elementy wektora **x**).
3. Założyć wartość a_o – wielokrotną wartość własną macierzy $\mathbf{A}_o$, tak by spełniony był warunek (28).

4. Założyć taką postać macierzy $\mathbf{B}_{o1}$ o wymiarach $q \times n_o$, aby był spełniony warunek (31). Najprościej odpowiednio wypełnić tę macierz zerami i jedynkami.
5. Dobrać macierze $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$:
   - jeżeli syntetyzowany jest obserwator pełnego rzędu i spełniony jest warunek (30), macierz $\mathbf{C}_{o1}$ jest kwadratową macierzą zerową o wymiarach $n_o \times n_o$, a macierz $\mathbf{C}_o$ należy wyznaczyć z zależności (30),
   - jeżeli syntetyzowany obserwator jest obserwatorem rzędu zredukowanego, macierze $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$ należy wyznaczyć na podstawie układu równań otrzymanego z warunku (26).
6. Na podstawie zależności (33) w ogólnym przypadku, lub zależności (35), gdy uprzednio korzystano ze wzoru (32), wyznaczyć macierz $\mathbf{B}_{o2}$.

4.3. Uproszczony algorytm syntezy liniowego obserwatora zmiennych stanu i ich pochodnych

Macierz $\mathbf{D}_o$ można wyznaczyć z warunku (14) rozwiązując układ $n \cdot n_o$ równań z n_o^2 niewiadomymi. Jak widać, układ ten na pewno ma rozwiązanie, gdy $n = n_o$, a więc obserwator jest obserwatorem pełnego rzędu i dodatkowo, macierze $\mathbf{K}$ i $\mathbf{T}$ nie są macierzami osobliwymi. Dla obserwatora rzędu zredukowanego spełniona jest relacja $n > n_o$, a więc liczba równań jest większa od liczby niewiadomych, co sprawia, że wyznaczenie elementów macierzy $\mathbf{D}_o$ jest niemożliwe. Wynika stąd, że estymacja pochodnych zmiennych stanu jest możliwa tylko za pomocą obserwatora pełnego rzędu i tylko ten przypadek zostanie omówiony. Przedstawiony w tym punkcie algorytm uproszczony nadaje się tylko do syntezy obserwatora dla obiektu spełniającego zależność $q = n$. Jeżeli $n = n_o$, warunek (14) można przekształcić do postaci:

$$\mathbf{D}_o = \mathbf{K}^{-1}. \tag{35}$$

Macierz $\mathbf{K}$ można wtedy wyznaczyć na podstawie warunku (32), który po wprowadzeniu założenia (32) przyjmie w tym przypadku postać:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{B}_{o1}\mathbf{C}(a_o\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}. \tag{36}$$

Jak wynika ze wzoru (35), macierz $\mathbf{K}$ musi być macierzą nieosobliwą, aby możliwe było jej odwrócenie. Aby to zapewnić, muszą być spełnione obydwa warunki:

$$\text{Rząd}\left(a_o\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\right) = n, \tag{37}$$

$$\text{Rząd}\left(\mathbf{B}_{o1}\mathbf{C}\right) = n. \tag{38}$$

Należy zauważyć, że w odróżnieniu od poprzednich algorytmów, gdzie niespełnienie warunku (37) (który ma taką samą postać jak warunki (30) i (23) tylko ograniczało liczbę przypadków, w których synteza obserwatora była możliwa, tutaj uniemożliwia syntezę we wszystkich przypadkach. Spełnienie warunku (38) jest łatwe do uzyskania, gdy rząd macierzy $\mathbf{C}$ jest równy rzędowi obserwatora i należy je zapewnić przez odpowiedni dobór macierzy $\mathbf{B}_{o1}$. Jeżeli rząd macierzy $\mathbf{C}$ jest mniejszy od rzędu obserwatora, co ma miejsce zawsze, gdy liczba niezależnych wyjść obiektu obserwowanego jest mniejsza od liczby jego zmiennych stanu, warunek (38) nie jest spełniony i synteza obserwatora za pomocą tego algorytmu nie jest możliwa. W takich przypadkach należy skorzystać z przedstawionego w punkcie 4.4 algorytmu ogólnego. W dalszej kolejności, z warunku (13) można wyznaczyć macierz $\mathbf{B}_{o2}$:

$$\mathbf{B}_{o2} = \mathbf{KB}. \tag{39}$$

Warunek (11) może posłużyć do wyznaczenia macierzy $\mathbf{C}_o$ i $\mathbf{C}_{o1}$. W rozpatrywanym przypadku macierz $\mathbf{K}$ jest macierzą kwadratową pełnego rzędu, więc macierz $\mathbf{C}_o$ można wyznaczyć na podstawie warunku (11) przekształconego do postaci:

$$\mathbf{C}_o = (\mathbf{I}_n - \mathbf{C}_{o1}\mathbf{C})\mathbf{K}^{-1}, \tag{40}$$

po uprzednim takim dobraniu macierzy $\mathbf{C}_{o1}$, by spełniony był warunek:

$$\text{rząd}\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{C}_{o1}\mathbf{C}\right) = n. \tag{41}$$

Ostatecznie, sposób postępowania podczas syntezy obserwatora jest następujący:

1. Założyć wartość a_o, tak by spełniony był warunek (37).
2. Założyć taką postać macierzy $\mathbf{B}_{o1}$ o wymiarach $n{\times}n$, aby był spełniony warunek (38). Najprościej jest podstawić za tę macierz macierz jednostkową.
3. Na podstawie zależności (36) wyznaczyć macierz $\mathbf{K}$.
4. Na podstawie zależności (39) wyznaczyć macierz $\mathbf{B}_{o2}$.
5. Założyć taką postać $n{\times}n$-wymiarowej macierzy $\mathbf{C}_{o1}$, by spełniony był warunek (41). Najprostszym rozwiązaniem jest podstawienie za macierz $\mathbf{C}_{o1}$ macierzy zerowej.
6. Macierz $\mathbf{C}_o$ wyznaczyć z zależności (40).
7. Na podstawie wzoru (35) wyznaczyć macierz $\mathbf{D}_o$.

4.4. Ogólny algorytm syntezy liniowego obserwatora zmiennych stanu i ich pochodnych

Algorytm przedstawiony w punkcie 4.3 wykorzystuje wyprowadzone w punkcie 2 równania (11), (12) i (13) kolejno, rozbijając proces syntezy na kilka etapów. Wymaga to jednak spełnienia dodatkowych warunków, co ogranicza możliwości tego algorytmu. Pełne wykorzystanie możliwości równań (11), (12) i (13) można uzyskać przez połączenie wszystkich trzech warunków w jeden układ równań i jednoczesne wyznaczenie wszystkich macierzy obserwatora (z wyjątkiem macierzy $\mathbf{D}_o$). W punkcie 4.3 wykazano, że odtwarzanie pochodnych zmiennych stanu jest możliwe tylko w obserwatorze pełnego rzędu, więc w tym punkcie również analizowano tylko ten przypadek.

Poszukiwane są macierze o postaciach:

$$\mathbf{C}_o = \left[\alpha_{i,j}\right]_{n\times n},\ \mathbf{C}_{o1} = \left[\beta_{k,l}\right]_{n\times q},\ \mathbf{B}_{o1} = \left[\gamma_{m,n}\right]_{n\times q},\ \mathbf{B}_{o2} = \left[\delta_{r,s}\right]_{n\times p},\ \mathbf{K} = \left[\eta_{t,z}\right]_{n\times n}. \tag{42}$$

Macierz $\mathbf{A}_o$ ma postać opisaną równaniem (19), a macierz $\mathbf{T}$ jest macierzą jednostkową rzędu n. Po podstawieniu zależności (42) do równania (11), wykonaniu wszystkich działań macierzowych po lewej stronie otrzymanej zależności i porównaniu do zera wszystkich komórek w ten sposób otrzymanej macierzy otrzymuje się układ równań nieliniowych. Nieliniowość jest spowodowana występowaniem iloczynów kolejnych niewiadomych α i η. Analogicznie postępując z warunkami (12) i (13) otrzymuje się układy równań liniowych.

Trzy otrzymane układy równań należy połączyć w jeden duży układ $n{\cdot}(2n + p)$ równań nieliniowych z $n{\cdot}(p + 2q + 2n)$ niewiadomymi. Synteza obserwatora sprowadza się zatem do rozwiązania tego układu i wyznaczenia wszystkich niewiadomych α, β, γ, δ, i η. Rozpatrywany układ równań jest układem nieliniowym, więc nie da się jednoznacznie określić warunków jego rozwiązalności. Jednak zakładając z góry wartości elementów α macierzy $\mathbf{C}_o$, można tę nieliniowość wyeliminować. Jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy różnica liczby niewiadomych i równań jest większa bądź równa liczbie elementów tej macierzy, skąd wynika warunek:

$$2q - n \geq 0. \tag{43}$$

Aby liniowy układ równań miał zawsze rozwiązanie, liczba jego równań musi być równa liczbie niewiadomych. Liczba niewiadomych *d*, których wartości należy założyć, jest wtedy dana wzorem:

$$d = 2qn\,. \tag{44}$$

Jeżeli liczba nadmiarowych niewiadomych *d* jest większa lub równa liczbie elementów macierzy $\mathbf{C}_o$, to linearyzacja rozpatrywanego układu równań jest zawsze możliwa i warunek (43) jest spełniony.

Ostatecznie, algorytm syntezy obserwatora liniowego ma postać:

1. Założyć wartość a_o.
2. Zapisać postacie macierzy $\mathbf{B}_{o1}$, $\mathbf{B}_{o2}$, $\mathbf{C}_o$, $\mathbf{C}_{o1}$ oraz $\mathbf{K}$ i utworzyć układ równań.
3. Jeżeli warunek (43) jest spełniony, założyć wartości elementów macierzy $\mathbf{C}_o$, tak aby jej rząd był równy *n*. Założyć dodatkowo wartości tylu niewiadomych, by ogólna liczba założonych niewiadomych z elementami macierzy $\mathbf{C}_o$ włącznie spełniała zależność (44).
4. Rozwiązać otrzymany układ równań wyznaczając macierze $\mathbf{B}_{o1}$, $\mathbf{B}_{o2}$, $\mathbf{C}_o$, $\mathbf{C}_{o1}$ i $\mathbf{K}$.
5. Macierz $\mathbf{D}_o$ obliczyć na podstawie wzoru (35).

5. BADANIA SYMULACYJNE LINIOWEGO OBSERWATORA STRUMIENIA WIRNIKA MASZYNY INDUKCYJNEJ

Niestacjonarny obserwator zmiennych stanu może być wykorzystany do odtwarzania zmiennych stanu silnika indukcyjnego [4]. Do doboru obserwatora wykorzystano równania monoharmonicznej maszyny indukcyjnej o liniowym obwodzie magnetycznym i jednym obwodzie wirnika, zapisane w dwuosiowym układzie współrzędnym α-β-0 [9]. Model maszyny indukcyjnej może być traktowany jako liniowy niestacjonarny [9], przy założeniu że prędkość obrotowa wirnika zmienia się znacznie wolniej niż pozostałe, elektromagnetyczne zmienne stanu. Jako wymuszenia przyjęto napięcia stojana w dwuosiowym układzie współrzędnych α-β, jako wielkości wyjściowe prądy stojana, a jako zmienne stanu składowe strumieni elektromagnetycznych stojana i wirnika. Prędkość obrotową ω potraktowano jako wolnozmienny parametr. Wektory **u**, **y** i **x** przyjmują zatem postacie:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_{1\alpha} \\ U_{1\beta} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} I_{1\alpha} \\ I_{1\beta} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Psi_{1\alpha} & \Psi_{1\beta} & \Psi_{2\alpha} & \Psi_{2\beta} \end{bmatrix}^T. \tag{45}$$

Macierze modelu matematycznych silnika przyjmują postacie:

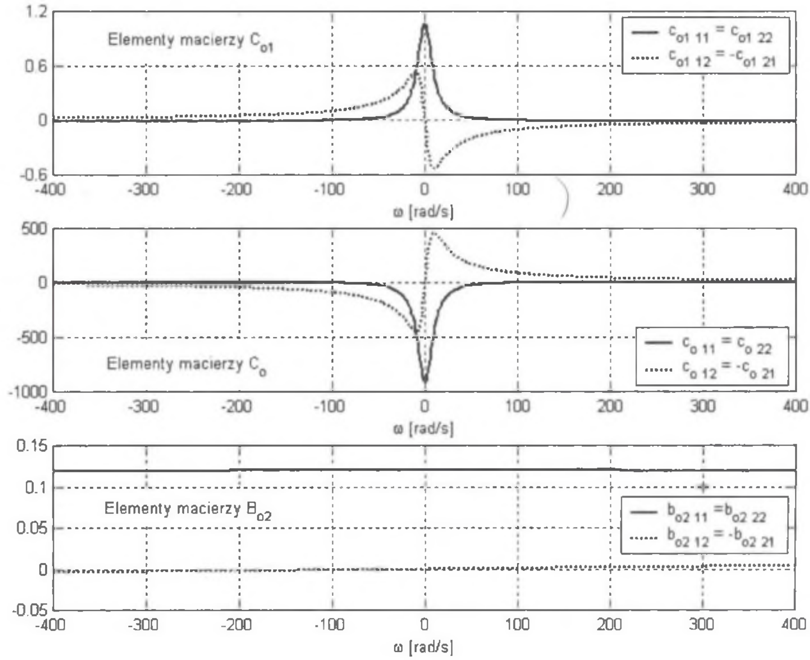
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R_1 c & 0 & -R_1 a & 0 \\ 0 & R_1 c & 0 & -R_1 a \\ -R_2 a & 0 & R_2 b & -\omega \\ 0 & -R_2 a & \omega & R_2 b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -c & 0 & a & 0 \\ 0 & -c & 0 & a \end{bmatrix}, \tag{46}$$

gdzie współczynniki *a*, *b* i *c* dane są wzorami:

$$a = \frac{L_m}{L_m^{\,2} - L_s L_r}, \quad b = \frac{L_s}{L_m^{\,2} - L_s L_r}, \quad c = \frac{L_r}{L_m^{\,2} - L_s L_r}. \tag{47}$$

Badania przeprowadzono dla silnika o następujących danych znamionowych i parametrach schematu zastępczego: U_n = 380 V (Y), I_n = 10 A (Y), f_n = 50 Hz, p_b = 2, R_1 = 0,62 Ω, R_2= 0,84 Ω, L_1= 0,087 H; L_2= 0,087 H, L_m = 0,082 H.

Na podstawie algorytmu przedstawionego w punkcie 4.2 dobrano parametry obserwatora strumienia elektromagnetycznego wirnika maszyny indukcyjnej. Założono wielokrotną wartość własną obserwatora $a_o = -1000$ oraz następujące postacie macierzy **T** i $\mathbf{B}_{o1}$:

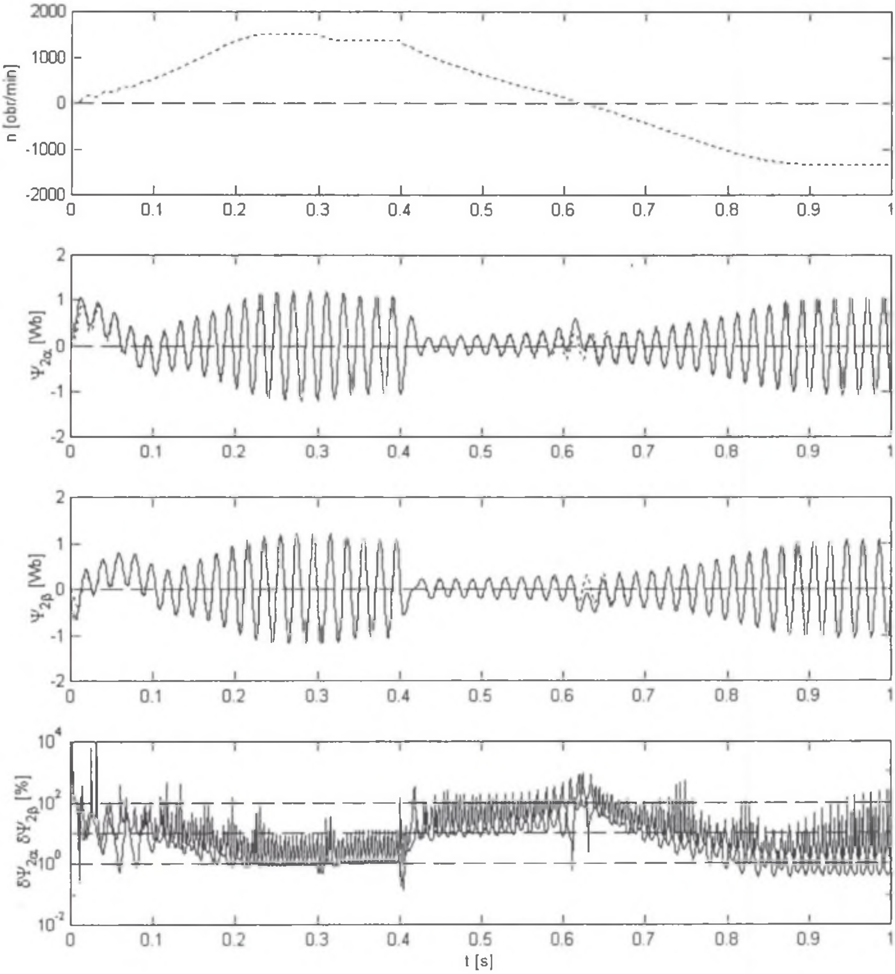


Rys. 2. Zależność elementów macierzy obserwatora od prędkości kątowej wirnika
Fig. 2. Dependence of matrices elements of observer on the rotor angular speed

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{o1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{48}$$

Pozostałe macierze obserwatora są antysymetrycznymi macierzami kwadratowymi o wartościach zależnych od prędkości obrotowej ω. Wartości elementów tych macierzy przedstawiono w funkcji prędkości obrotowej na rysunku 2.

Aby sprawdzić poprawność działania obserwatora w warunkach zakłóceniowych, do przebiegów wejściowych obserwatora dodano zakłócenie o postaci składowej stałej (udział zakłócenia w przebiegach wejściowych obserwatora wynosi kilka procent).



Rys. 3. Wyniki badań symulacyjnych obserwatora strumienia wirnika silnika indukcyjnego
Fig. 3. Simulation results of linear observer of induction motor rotor flux

Badania objęły symulację rozruchu silnika i następującego po zakończeniu rozruchu skokowego załączenia momentu obciążenia oraz nawrotu poprzez zmianę kolejności faz. Na rysunku 3 przedstawiono zarejestrowane przebiegi prędkości obrotowej silnika, składowych strumienia wirnika w osiach α i β oraz względnych błędów odtwarzania tych składowych. Linią przerywaną wykreślono rzeczywiste przebiegi silnika, a linią ciągłą przebiegi wielkości odtworzonych przez obserwatora.

6. WNIOSKI

Badania symulacyjne wykazują, że liniowe niestacjonarne obserwatory zmiennych stanu mogą mieć zastosowanie do odtwarzania zmiennych stanu maszyny indukcyjnej w szerokim zakresie zmian prędkości obrotowej. Zaletą tego typu obserwatorów jest możliwość redukcji ich rzędu, co nie jest możliwe przy zastosowaniu obserwatorów proporcjonalnych [4]. Wyraźne pogorszenie jakości estymacji w stanach nieustalonych (początek rozruchu oraz nawrót silnika) przy niewielkich wartościach prędkości obrotowej, widoczne na rysunku 3, jest spowodowane silną zależnością wartości elementów macierzy obserwatora od prędkości obrotowej (rys.2). Szybkie zmiany wartości prędkości obrotowej w tych warunkach pracy silnika w połączeniu z silną zależnością parametrów obserwatora od prędkości obrotowej, gdy jej wartości są niewielkie, powodują, że w tych warunkach założenie wolnozmienności prędkości obrotowej w stosunku do pozostałych zmiennych stanu nie jest do końca prawdziwe, co jest bezpośrednią przyczyną wzrostu błędów estymacji.

LITERATURA

1. Kaczorek T.: Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT, Warszawa 1998.
2. Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej. WNT, Warszawa 1974.
3. Kaczorek T.: Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych. WNT, Warszawa 1983.
4. Orłowska-Kowalska T.: Obserwatory zmiennych stanu i parametrów w układach sterowania silników indukcyjnych klatkowych. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1990.
5. Luenberger D.G.: An Introduction to Observers, IEEE Trans. on Aut. Contr. vol AC-16, No 6, 1971 pp. 596 – 603.
6. Yüksel Y. Ö., Bongiorno J. J.: Observers for Linear Multivariable Systems with Applicatins, IEEE Trans. on Aut. Contr. vol AC-16, No 6, 1971 pp. 603 – 621.
7. Luenberger D.G.: Observers for Multivariable Systems, IEEE Trans. on Aut. Contr. vol AC-11, No 2, 1966, pp. 190 – 197.
8. Munro N.: Symbolic methods in control system analysis and design, The Institution of Electrical Engineers, Bookcraft 1999.
9. Paszek W.: Dynamika maszyn elektrycznych prądu przemiennego. Helion, Gliwice 1998.

Recenzent: Dr hab. inż. Teresa Orłowska-Kowalska
Profesor Politechniki Wrocławskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 20 listopada 2003 r.

Abstract

In the paper four algorithms for linear observer design are presented. They enable calculation of observer parameters basing on the known parameters of an observed system and the assumed observer eigenvalues.

In section 2 equations of the mathematical models of an observed system and a linear observer are given. The observer mathematical model includes an additional equation enabling estimation of the derivatives of the observed system state variables. Estimation of the derivatives of state variables is useful because their values are sometimes used during automatic control process and calculation of these values using the observer is much easier than calculation by differentiation of the estimated state variables. Conditions for observer parameters providing correct estimation are also derived. They refer to two cases. The fist one is when estimation of state values derivatives is not necessary, which provides independence of estimation errors from observer input values and state values of the observed system. The second case includes the set of conditions providing correct work of the observer when estimation of state values derivatives is required. Moreover, in sections 2 error equations of the discussed observers are derived.

In section 4 four different algorithms for linear observer design are derived. The algorithms presented in sections 4.1 and 4.2 enable design of an observer of state variables only without possibility of estimation of their derivatives. Section 4.1 includes description of the algorithm providing wide possibilities for full order and reduced order observer design, however requiring great expenditure of calculations. The algorithm presented in section 4.2 requires less expenditure of calculations than that presented in section 4.1 but provides less possibility of observer order choice and can be used only in some special cases.

In sections 4.3 and 4.4 there are presented algorithms providing design of a full order observer, estimating state variables and their derivatives. Section 4.4 describes the algorithm using full possibilities of the set of the considered conditions but requiring great expenditure of calculations. In section 4.3 the algorithm simplified and easier for application is presented but it can be used only when the number of outputs of observed system is equal to the number of its state variables.

Section 5 gives the simulation results of the observer of the induction motor rotor flux. The observer was designed using one of the described algorithms.

The conclusions are presented in section 6.