ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

RYSZARD BARTŁOMIEJCZYK

O PEWNYM WYPROWADZENIU WARUNKÓW DLA ISTNIENIA EKSTREMÓW FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH BEZ UŻYCIA WZORU TAYLORA[x)]

W niniejszej pracy podane jest wyprowadzenie warunków dla istnienia ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych, które wydaje się prostsze od znanych dowodów opierających się na wzorze Taylora.

Wyprowadzenia tego nie znalazłem w znanej mi literaturze. Niech

$$u = f(x_1,\ldots,x_n), \tag{1}$$

będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P_1(x_1^o,\ldots,x_n^o)$. Nadto załóżmy, że funkcja (1) jest ciągła i posiada ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu w tym otoczeniu.

Rozważmy dowolną prostą pęku o wierzchołku P_o

$$x_i = x_i^o + m_i\, t, \tag{2}$$

dla $i = 1,2,\ldots,n$, gdzie:

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 = 1$$

x) Niniejsza praca jest modyfikacją rozważań podanych w [2].

Jeśli ograniczymy obszar określoności funkcji (1) do prostej pęku (2), to funkcję tę możemy zapisać w postaci

$$V(t) = f(x_1^o + m_1 t, \ldots, x_n^o + m_n t) \tag{3}$$

Funkcja $V(t)$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu $t = 0$.

Obliczmy pierwszą i drugą pochodną funkcji (3) w punkcie

$$(x_1^o + m_1 t, \ldots, x_n^o + m_n t).$$

$$V'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} m_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} m_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} m_n \tag{4}$$

$$V''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} m_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} m_1 m_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} m_1 m_n +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} m_n m_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} m_n m_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} m_n^2 \tag{5}$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji (3) dla $t = 0$ jest $V'(0) = 0$.

Stąd wobec równości (4) otrzymujemy

$$\frac{\partial f(x_1^o, \ldots, x_n^o)}{\partial x_1} m_1 + \ldots + \frac{\partial f(x_1^o, \ldots, x_n^o)}{\partial x_n} m_n = 0 \tag{6}$$

Jeżeli $V'(0) = 0$, to do istnienia ekstremum funkcji (3) dla $t = 0$ wystarcza $V''(0) \neq 0$.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\frac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i \, \partial x_j} = a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \tag{7}$$

dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$, wówczas równość (5) przyjmie postać

$$V''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^o, \ldots, x_n^o) m_i \, m_j. \tag{8}$$

Wartość $V''(0)$ jest zatem formą kwadratową zmiennych $m_1, \ldots, m_n$. Udowodnimy.

Twierdzenie 1

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji (1) w punkcie P_o jest układ równości

$$\frac{\partial f(x_1^o, \ldots, x_n^o)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x_1^o, \ldots, x_n^o)}{\partial x_n} = 0. \tag{9}$$

Dowód

Dla istnienia ekstremum funkcji (1) w punkcie P_o potrzeba, aby funkcja (3) dla dowolnych $m_1, \ldots, m_n$ spełniała warunek konieczny istnienia ekstremum dla $t = 0$.

Zatem równość (6) musi zachodzić dla dowolnych $m_1, \ldots, m_n$, a to pociąga równości (9).

Punkt, dla którego spełnione są warunki (9) nazywamy punktem stacjonarnym funkcji (1).

Twierdzenie 2

Jeżeli P_o jest punktem stacjonarnym funkcji (1) i forma kwadratowa (8) jest określona, to funkcja (1) w punkcie P_o osiąga ekstremum. Przy czym, jeśli forma kwadratowa jest określona dodatnio, to istnieje minimum, a gdy jest określona ujemnie to istnieje maksimum.

Jeśli natomiast forma kwadratowa (8) jest nieokreślona, to w punkcie P_o ekstremum nie istnieje.

Pierwszą część tezy udowodnimy w przypadku, gdy forma kwadratowa jest dodatnio określona.

Lemat

Jeśli $a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ dla $i,j = 1, 2, \ldots, n$ są funkcjami ciągłymi w pewnym otoczeniu punktu P_o i forma kwadratowa (8) jest określona dodatnio, to istnieje takie otoczenie punktu P_o o promieniu δ, że forma kwadratowa

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) m_i m_j \tag{10}$$

jest określona dodatnio dla każdego punktu należącego do tego otoczenia.

Podam dwa dowody tego lematu; pierwszy bezpośredni, drugi - opierający się na twierdzeniu J.J. Sylvestera.

Pierwszy dowód lematu

Bez zmniejszania ogólności założeń można przyjąć, że

$$m_1^2 + \ldots + m_n^2 = 1 \tag{11}$$

Przez ε oznaczamy najmniejszą wartość formy kwadratowej (8) przy warunku (11).

Z ciągłości funkcji $a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ wynika istnienie otoczenia punktu P_o o promieniu δ_{ij}, że

$$\left| a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) - a_{ij}(x_1^o, \ldots, x_n^o) \right| < \frac{\varepsilon}{n^2}$$

dla każdego punktu $(x_1, \ldots, x_n)$ należącego do tego otoczenia.

Wprowadzamy oznaczenie

$$\delta = \min_{i,j=1,\ldots,n} \left[\delta_{ij}\right].$$

Dla dowolnego punktu $(x_1, \ldots, x_n)$ należącego do otoczenia punktu P_o o promieniu δ i dowolnych $m_1, \ldots, m_n$ spełniających warunek (11) zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)m_i\, m_j - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^o, \ldots, x_n^o)m_i m_j\right| \leqslant$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) - a_{ij}(x_1^o, \ldots, x_n^o)\right| |m_i|\, |m_j| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} |m_i||m_j| < \frac{\varepsilon}{n^2}\, n^2 = \varepsilon$$

Z ostatniej nierówności wynika, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^o, \ldots, x_n^o)m_i\, m_j - \varepsilon < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)m_i m_j$$

Stąd na podstawie określenia liczby ε otrzymujemy

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) m_i m_j > 0$$

dla każdego punktu $(x_1, \ldots, x_n)$ należącego do otoczenia punktu P_o o promieniu δ i dowolnych $m_1, \ldots, m_n$ spełniających warunek (11).

Oznacza to, że forma kwadratowa (10) jest określona dodatnio w otoczeniu punktu P_o o promieniu δ.

Drugi dowód lematu wynika łatwo z twierdzenia J.J. Sylvestera [1]. Forma kwadratowa (10) wtedy i tylko wtedy jest określona dodatnio w punkcie $(x_1, \ldots, x_n)$ jeśli spełnione są nierówności

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

i

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(x_1, \ldots, x_n), & \ldots, & a_{1i}(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}(x_1, \ldots, x_n), & \ldots, & a_{ii}(x_1, \ldots, x_n) \end{vmatrix} > 0$$

dla $i = 2, \ldots, n$.

Z założenia lematu i twierdzenia Sylvestera wynika, że

$$F_i(x_1^o, \ldots, x_n^o) > 0 \tag{12}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ponieważ funkcje $a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ dla $i,j = 1,2,\ldots,n$ są funkcjami ciągłymi w pewnym otoczeniu punktu P_o, więc funkcje $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ są ciągłe w tym otoczeniu.

Z ciągłości funkcji $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ i (12) wynika istnienie otoczenia punktu P_o o promieniu δ_i, że

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

dla każdego punktu $(x_1, \ldots, x_n)$ należącego do tego otoczenia. Wprowadzamy oznaczenie $\delta = \min\left[\delta_1, \ldots, \delta_n\right]$. Zatem w otoczeniu punktu P_o o promieniu δ zachodzą nierówności

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Z nierówności (13) i twierdzenia Sylvestera wynika, że forma kwadratowa (10) jest określona dodatnio w otoczeniu punktu P_o o promieniu δ .

<u>Dowód twierdzenia.</u> Łatwo zauważyć, że funkcja (1) posiada w punkcie P_o minimum wtedy i tylko wtedy, jeżeli funkcja (3) osiąga dla $t = 0$ minimum w przedziale $(-\delta,\delta)$ (δ dowolna liczba dodatnia) dla dowolnych $m_1, \ldots, m_n$ spełniających warunek (11).

Aby to wykazać, należy udowodnić, że $V''(t) > 0$ dla $-\delta < t < \delta$ i dowolnych $m_1, \ldots, m_n$ spełniających warunek (11).

Przy oznaczeniach (7) funkcja (1) spełnia założenia lematu, a więc forma kwadratowa (10) jest określona dodatnio w otoczeniu punktu P_o o promieniu δ .

Forma kwadratowa (10) dla $x_1 = x_1^o + m_1 t, \ldots, x_n = x_n^o + m_n t$ jest równa $V''(t)$.

Zatem $V''(t) > 0$ dla dowolnych $m_1, \ldots, m_n$ spełniających warunek (11) dla $-\delta < t < \delta$.

Oznacza to, że funkcja $V(t)$ osiąga w przedziale $<-\delta, \delta>$ minimum dla $t = 0$, funkcja (1) posiada więc w punkcie P_o minimum.

Dowód pierwszej części tezy w przypadku, gdy funkcja (1) w punkcie P_o osiąga maksimum jest analogiczny.

Przeprowadzimy teraz dowód drugiej części tezy. Załóżmy, że dla układu $(m'_1, \ldots, m'_n)$ forma kwadratowa (8) jest dodatnia, a dla $(m''_1, \ldots, m''_n)$ jest ujemna. Oznacza to, że funkcja (1) przybiera na prostej

$$x_i = x_i^o + \frac{m'_i t}{\sqrt{m_1'^2 + \ldots + m_n'^2}}$$

$(i = 1, \ldots, n)$ wartość najmniejszą w punkcie P_o, a na prostej

$$x_i = x_i^o + \frac{m''_i t}{\sqrt{m_1''^2 + \ldots + m_n''^2}}$$

$(i = 1, \ldots, n)$ wartość największą w punkcie P_o.

Oczywiście oznacza to, że funkcja (1) w punkcie P_o ekstremum nie posiada.

Rękopis złożono w Redakcji dnia 16.III.1966 r.

LITERATURA

[1] Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy, t.I str. 350, Warszawa 1965.

[2] Bartłomiejczyk R.: O pewnym wyprowadzeniu warunków dla istnienia ekstremów funkcji wielu zmiennych. Wiadomości matematyczne IX (1966).

О НЕКОТОРОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВИЕ УСЛОВИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ БЕЗ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Р е з ю м е

Доказательство необходимых и достаточных условий существования экстремум функций нескольких переменных опирается на следующей теореме:

Пусть функция

$$u = f(x_1^0 + m_1 t, \ldots, x_n^0 + m_n . t)$$

определена в некоторой окрестности точки $t = 0$ о радиусе δ и имеет в этой точке экстремум тоже самое для произвольных $m_1, m_2, \ldots, m_n$ выполняемых условие

$$m_1^2 + \ldots + m_n^2 = 1$$

тогда функция $u = f(x_1 \ldots x_n)$ имеет в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ экстремум.

DERIVATION OF CONDITIONS FOR THE MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF A FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES WITHOUT USING TAYLOR'S THEOREM

S u m m a r y

The following theorem is the basis of the derivation of the necessary and sufficient conditions for the maximum and minimum values of the function of several variables: If the function

$$u = f(x_1^0 + m_1 t, \ldots, x_n^0 + m_n t) \tag{32}$$

is determined in a distance of a radius δ the point $t_0 = 0$ and if it reaches the same extreme in this very point for the arbitrary values for $m_1, \ldots, m_n$ satisfying the condition $m_1^2 + \ldots . m_n^2 = 1$,

then the function $u = f(x_1, \ldots, x_n)$

has the local extreme in the point $(x_1^0, \ldots\ldots x_n^0)$.