ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

WIESŁAW SOBIESZEK

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH EKSTREMALNYCH SUM CAŁKOWYCH FUNKCJI 1/1+x

W związku z badaniem zbioru wartości sum przybliżonych dla całki oznaczonej A. Wakulicz postawił problem wyznaczania optymalnych sum całkowych przy podziale przedziału na n-części. W pracy niniejszej rozwiązuje się ten problem dla funkcji $y = \frac{1}{1 + x}$ w przedziale $\langle o, a \rangle$. Okazuje się, że

$$\max_{x_1, \ldots, x_{n-1}} s_n (x_1, \ldots, x_{n-1}) = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}\right), \quad a > o, \; n \geqslant 2 \tag{1}$$

$$\min_{x_1, \ldots, x_{n-1}} S_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) = n\left(-1 + \sqrt[n]{1+a}\right), \quad a > o, \; n \geqslant 2 \tag{2}$$

gdzie s_n jest minimalną, zaś S_n maksymalną sumą całkową dla funkcji $y = \frac{1}{1 + x}$ w przedziale $\langle o, a \rangle$, przy czym

$$o < x_1 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < a. \tag{3}$$

Optymalny podział przedziału $\langle o, a \rangle$ zarówno dla sumy całkowej minimalnej jak i maksymalnej, jest wspólny i dany wzorem

$$x_1 = -1 + \sqrt[n]{1 + a}, \quad x_2 = -1 + \sqrt[n]{(1 + a)^2}, \; \ldots, \; x_{n-1} = $$
$$= -1 + \sqrt[n]{(1 + a)^{n-1}} \tag{4}$$

Stosując metodę programowania dynamicznego (p [1]) i zasadę indukcji matematycznej udowodnimy (1).

Oznaczmy

$$h_n(a) = \max_{x_1,\dots,x_{n-1}} s_n, \quad n \geq 2$$

Stosując zasadę optymalności (p [1]) otrzymujemy

$$h_n(a) = \max_{0 \leq y \leq a} \left[h_{n-1}(y) + \frac{a-y}{1+a}\right], \quad n \geq 2 \tag{6}$$

gdzie $$h_1(a) = \frac{a}{1+a}$$

Zgodnie z oznaczeniem (5) musimy więc udowodnić prawdziwość wzoru

$$h_n(a) = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}\right), \quad n \geq 2 \tag{7}$$

Dla $n = 2$ na mocy (6) otrzymujemy

$$h_2(a) = \max_{0 \leq y \leq a}\left(\frac{y}{1+y} + \frac{a-y}{1+a}\right) \tag{8}$$

Różniczkując względem y wyrażenie w nawiasie wzoru (8) i przyrównując do zera otrzymujemy

$$\frac{1}{(1+y)^2} = \frac{1}{1+a} \tag{9}$$

Oznaczając dodatni pierwiastek równania (9) symbolem $y_2(a)$ mamy

$$y_2(a) = -1 + \sqrt{1+a} \tag{10}$$

Wyrażenie w nawiasie wzoru (8) osiąga wartość maksymalną względem zmiennej y dla wartości $y_2(a)$ danej wzorem (10). Stąd

$$h_2(a) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)$$

Zakładając prawdziwość wzoru (7) dla $n = k \geq 2$ otrzymujemy na mocy (6)

$$h_{k+1}(a) = \max_{0 \leq y \leq a} \left[k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{1+y}}\right) + \frac{a-y}{1+a}\right] \tag{11}$$

Różniczkując z kolei wyrażenie w nawiasie kwadratowym wzoru (11) i przyrównując do zera otrzymujemy

$$\frac{1}{(1+y)\sqrt[k]{1+y}} = \frac{1}{1+a} \tag{12}$$

Oznaczając dodatni pierwiastek równania (12) symbolem $y_{k+1}(a)$ mamy

$$y_{k+1}(a) = -1 + \sqrt[k+1]{(1+a)^k} \tag{13}$$

Ponieważ wyrażenie w nawiasie kwadratowym wzoru (11) osiąga wartość maksymalną dla wartości $y_{k+1}(a)$ danej wzorem (13), więc

$$h_{k+1}(a) = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt[k+1]{(1+a)^k}}}\right) + \frac{a - 1 - \sqrt[k+1]{(1+a)^k}}{1 + a} =$$

$$= (k + 1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k+1]{1+a}}\right)$$

co kończy dowód.

Analogicznie dowodzi się prawdziwości (2), przy tym okazuje się, że punkty optymalnego podziału są takie same.

Z (1) i (2) wypływają następujące wnioski

$$n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}\right) \leqslant \ln(1 + a) \leqslant n\left(- 1 + \sqrt[n]{1 + a}\right), \quad a > 0 \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(- 1 + \sqrt[n]{1 + a}\right)\right] = \ln(1 + a) \tag{15}$$

$$\frac{n\left(- 1 + \sqrt[n]{1 + a}\right)}{a} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{a + n} + \frac{1}{2a + n} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n - 1)\, a + n} \leqslant \frac{n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{1 + a}}\right)}{a} - \frac{1}{na + n}, \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{2a+n} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\, a+n}\right) = \frac{\ln(1+a)}{a}, \tag{17}$$

Wnioski (14) i (15) wynikają wprost z definicji całki oznaczonej. W celu udowodnienia wniosku (16), należy wziąć sumę całkową minimalną i maksymalną, przy podziale przedziału $<o, a>$ na n równych części i skorzystać z optymalnych własności sum całkowych (1) i (2). Z (16) i twierdzenia o trzech ciągach wynika wniosek (17). Wzór (15) w sposób elementarny został wyprowadzony w [2]. Wzory (16) i (17) są znane, jednak sposób uzasadnienia wydaje się nowy.

Wzory (4) na optymalny podział przedziału $<o, a>$ otrzymujemy w następujący sposób

$$x_{n-1}(a) = y_n(a), \quad x_{n-2}(a) = y_{n-1}\left[x_{n-1}(a)\right], \ \ldots,$$

$$x_1(a) = y_2\left[x_2(a)\right].$$

Rękopis złożono w Redakcji dnia 16.III.1966 r.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Dinamiczeskoje programmirowanije, Izol. Inostr. Lit., Moskwa 1960.

[2] Sierpiński W.: Działania nieskończone, Warszawa, Czyt. 1948 r.

ОБ НИЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ ФУНКЦИИ $\frac{1}{1+X}$

Р е з ю м е

В работе помещены два результаты, касающиеся функции $\frac{1}{1+X}$.

1. Оптимальные деления на n частей для интегральных сумм нижних и верхних покрываются.

2. Получаются явные формулы для этих делений и соответствующих сумм (см. (4), (1), (2)).

ON SOME PROPERTIES OF THE EXTREMAL INTEGRAL SUMS FOR THE FUNCTION $\frac{1}{1+x}$

S u m m a r y

The paper includes two results concerning the function $\frac{1}{1+x}$:

1. The optimal divisions on the n parts for the integral inferior and superior sums are the same.

2. The explicit formulae for these divisions and for suitable sums are received (see (4), (1) and (2)).