ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 11 Nr kol. 172

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

OSCYLACJE RELAKSACYJNE W UKŁADACH NIELINIOWYCH, OPISANYCH PRZEZ PARAMETRY, KTÓRE SĄ WIELKOŚCIAMI STOCHASTYCZNYMI

Streszczenie. Artykuł jest pewną modyfikacją i znacznym skróceniem pracy autora z roku 1958, nawiązującej do dwu prac, publikowanych w Zeszytach [9, 10]. W pracy rozpatrzono układ n równań różniczkowych nieliniowych pierwszego rzędu, dający się sprowadzić do postaci (2), przy czym o macierzach A-F założono, że są przedstawialne w postaci sumy dwu macierzy, jednej o elementach stałych i drugiej o elementach stochastycznie zmiennych o średniej czasowej równej zeru. Warunki początkowe obrano następujące: $t = 0$, $\vartheta_k = \vartheta_{k,o}$, $k = 1, \ldots n$ oraz stały wektor N i stałą wartość ϑ_o. Rozpatrzono również wpływ stochastycznej składowej na chwilę załączania i wyłączania oscylacji. O składowych stochastycznych założono, że są one małe wobec składowych stałych, mianowicie rzędu pewnej wielkości dodatniej, której tylko pierwszą potęgę uwzględniono w dalszych obliczeniach.

Przy tych założeniach można otrzymać podobnie jak w [9-13] rozwiązanie, pozwalające wyznaczyć stan "ustalony" oscylacji, powstały w ten sposób, że w określonych chwilach wektor N jest zmieniany skokowo, przy czym przybiera na zmianę jedną z dwu stałych wartości.

Zastosowana metoda jest rozszerzeniem metody Dulaca [3] na równanie macierzowe postaci (2) o

współczynnikach zmiennych w czasie, przy założeniu małej w porównaniu z odpowiednimi wyrazami stałymi składowej czasowo zmiennej.

Przez ujednorodnienie równania i wydzielenie wyrazów stochastycznie zmiennych, doprowadzono równanie (2) do postaci (15). O macierzy $A^{(1)}$ założono, że posiada dzielniki elementarne pojedyncze, ujemne, rzeczywiste. Metodę można również rozszerzyć przez nieznaczną modyfikację na układy o dzielnikach wielkokrotnych. Mogą one być również zespolone, byle by dawały rozwiązanie stateczne, tzn. ich część rzeczywista była ujemna.

1. Sformułowanie zagadnienia

Praca nawiązuje do dwu poprzednich prac autora [9, 10]. Problem jest następujący: Dany jest układ n+1 ciał, z których jedno o nieskończenie dużej pojemności cieplnej stanowi "otoczenie", w jednym zaś z pozostałych ciał znajduje się źródło ciepła, załączane i wyłączane w określonych chwilach. Wskutek wymiany ciepła następują zmiany temperatur ciał układu. Aby sformułować zagadnienie przy pomocy równań różniczkowych zwyczajnych, rozpatrujemy średnie temperatury ciał, z założenia jednakowe we wszystkich punktach danego ciała. Wymianę cieplną opisano przy pomocy formalnych nieliniowych zależności, będących uogólnieniem prawa Newtona. Ze względu na to, że zachodzą w czasie konwekcji skomplikowane procesy aerodynamiczne, wykazujące wahania statystyczne, uwzględniono te wahania, przyjmując, że współczynniki równań różniczkowych, opisujących procesy, posiadają postać następującą:

$a_{i,o} = a_{i,o}^{(1)} + a_{i,o}^{(2)}$, $a_{i,k} = a_{i,k}^{(1)} + a_{i,k}^{(2)}$, $a_{i,k,o} = a_{i,k,o}^{(1)} + a_{i,k,o}^{(2)}$ itd., przy czym pierwsze wyrazy oznaczone indeksem 1, przedstawiają stałe średnie czasowe współczynników, wyrazy zaś oznaczone indeksem 2, części stochastycznie zmienne, o średniej czasowej równej zeru. Efekt wyrazów stochastycznych zakładamy mały w porównaniu z wyrazami o in-

deksie (1) w ten sposób, że w dalszych obliczeniach uwzględniono tylko pierwsze ich potęgi.

Ponieważ również chwile załączania i wyłączania źródła ciepła są poddane statystycznym wahaniom, przedstawiono je w postaci $t_k = t_k^{(1)} + t_k^{(2)}$, przy czym wyrazy oznaczone indeksem (1) oznaczają średnie czasowe, wyrazy zaś oznaczone indeksem (2), wielkości stochastycznie zmienne o średniej czasowej równej zeru.

2. Równania różniczkowe problemu

Proces ogrzewania można opisać przy pomocy układu równań

$$
\begin{aligned}
&K_i\left[1 + b_{i,o}(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_{i,o})\right] d\bar{\vartheta}_i/dt + S_i h_i \Big\{ (a_{i,o}^{(1)} + a_{i,o}^{(2)})(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_o) + \\
&+ (a'^{(1)}_{i,o} + a'^{(2)}_{i,o})(\bar{\vartheta}_i - \vartheta_o)^2 + (a''^{(1)}_{i,o} + a''^{(2)}_{i,o})(\bar{\vartheta}_i - \vartheta_o)^3 + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k}^{(1)} + a_{i,k}^{(2)})(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_k) + \sum_{k=1}^{n} (a'^{(1)}_{i,k} + a'^{(2)}_{i,k})(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_k)^2 + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} (a''^{(1)}_{i,k} + a''^{(2)}_{i,k})(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_k)^3 + (\bar{\vartheta}_i - \vartheta_o) \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k,o}^{(1)} + \\
&+ a_{i,k,o}^{(2)})(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_k) + (\bar{\vartheta}_i - \vartheta_o) \sum_{k=1}^{n} (a'^{(1)}_{i,k,o} + a'^{(2)}_{i,k,o})(\bar{\vartheta}_i - \\
&- \bar{\vartheta}_k)^2 + (\bar{\vartheta}_i - \vartheta_o)^2 \sum_{k=1}^{n} (a''^{(1)}_{i,k,o} + a''^{(2)}_{i,k,o})(\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_k) \Big\} = \\
&= N_i, \quad i = 1, \ldots\ldots n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

z warunkiem początkowym $t = 0$, $\bar{\vartheta}_i = \bar{\vartheta}_{i,o}$, $i = 1, \ldots\ldots n$, przy czym dla ogrzewania $N_1 \neq 0$, $N_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$, dla ostygania zaś także $N_1 = 0$. W każdej kolejnej fazie procesu stan końcowy poprzedniej fazy jest stanem początkowym fazy następnej.

W równaniu (1) zastosowano następujące oznaczenia:

K_i - pojemności cieplne ciał,

$b_{i,o}$, $b'_{i,o}$ - ich współczynniki temperaturowe,

S_i - powierzchnie ciał,

h_i, $a_{i,k}$, $a'_{i,k}$, $a''_{i,k}$, $a_{i,k,o}$, $a'_{k,o}$, $a''_{i,k,o}$, $i, k = 1, \ldots n$ - parametry, charakteryzujące wymianę cieplną,

N_i - moce źródeł,

$\bar{\vartheta}_i$ - temperatury ciał,

ϑ_o - temperatura otoczenia.

3. Rozwiązanie problemu

Spośród trzech metod, którymi rozwiązano zagadnienia, mianowicie metody operującej skalarnymi równaniami (1), wzorowanej na metodzie Dulaca [3], metody macierzowej, prowadzącej do nieliniowego macierzowego równania całkowego typu Lalesco [2, 4-8] oraz metody macierzowej, wzorowanej na metodzie Dulaca, podano w artykule jedynie metodę ostatnią, jako pozwalającą na geometryczną interpretację otrzymanych wyników podobnie jak to uczyniono w poprzednich pracach.

4. Macierzowa metoda rozwiązania zagadnienia

Równanie (1) można przekształcić, mianowicie, ze względu na małość współczynników $b_{i,o}$, można równanie (1) podzielić przez współczynnik przy $d\bar{\vartheta}_i/dt$, wykonując przybliżone dzielenie do pierwszych potęg $\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_{i,o}$ włącznie. Daje to zasadniczo ten sam typ równań ze zmienionymi nieco współczynnikami. Z kolei uwalniamy się od stałych temperatur $\bar{\vartheta}_{i,o}$, ϑ_o podstawiając

$$\bar{\vartheta}_i - \bar{\vartheta}_{i,o} = \bar{\bar{\vartheta}}_i$$

i porządkujemy równanie według potęg $\bar{\bar{\vartheta}}_i$. Daje to znów ten sam typ równań ze zmienionymi nieco współczynnikami. W celu przejścia od równań (1) do postaci macierzowej należy wyrażenie zawierające drugie i trzecie potęgi temperatur przedstawić w formie iloczynów form liniowych. Na ogół formy kwadratowe czy sześcienne dadzą się przedstawić w formie sumy takich iloczynów. Aby nie komplikować zagadnienia, w dalszym ciągu będziemy pisać jedynie jeden składnik tych sum, rozumiejąc, że należy po nim wykonać sumowanie, uwzględniające wszelkie możliwe kombinacje występujących czynników liniowych. Czynniki liniowe przedstawiono w formie macierzy diagonalnych, oznaczonych nawiasami.

W ten sposób układ równań różniczkowych (1) można zastąpić równaniem macierzowym

$$d\bar{\bar{\vartheta}}/dt + \bar{A}\bar{\bar{\vartheta}} + (\bar{B}\bar{\bar{\vartheta}})(\bar{C}\bar{\bar{\vartheta}}) + (\bar{D}\bar{\bar{\vartheta}})(\bar{E}\bar{\bar{\vartheta}})(\bar{F}\bar{\bar{\vartheta}}) = N \qquad (3)$$

przy czym $\bar{\bar{\vartheta}}$ oznacza wektor kolumnę o elementach $\bar{\bar{\vartheta}}_1, \ldots \bar{\bar{\vartheta}}_n$, N wektor kolumnę o elementach $N_1, \ldots\ldots N_n$. Macierze A–F są kwadratowe rzędu n. Aby uwzględnić stochastyczny charakter procesu, zakładamy o nich, że dadzą się przedstawić w formie sumy dwu macierzy, jednej o elementach stałych (średnie czasowe wyrazów stochastycznych), oznaczonej indeksem 1 oraz macierzy, której elementy są stochastycznie zmienne ze średnią czasową równą 0, oznaczonej indeksem 2. Zgodnie z założeniem, uczynionym na początku, elementy drugiej macierzy należy uważać za małe pierwszego rzędu w porównaniu z elementami macierzy pierwszej.

5. Ujednorodnienie równania (2)

W odróżnieniu od równań układu (1), gdzie tylko $N_1 \neq 0$, w równaniu (2) dla ogrzewania i ostygania, będzie na ogół $N_i \neq \neq 0$, $i = 1, \ldots n$, przy czym wartości te są różne dla ogrzewania i ostygania. Wynika stąd, że równanie (2) w obu przypadkach wymaga ujednorodnienia. Dokonujemy tego przy pomocy podstawienia

$$\bar{\bar{\vartheta}} = \vartheta + \Theta \qquad (4)$$

przy czym wektor-kolumna o stałych elementach Θ, przedstawia fizykalnie temperatury ustalone procesu (różne dla ogrzewania i ostygania), ϑ wektor-kolumna nowych zmiennych.

Podstawienie do równania (2) daje

$$d\vartheta/dt + A\vartheta + (B\vartheta)(C\vartheta) + (\bar{D}\vartheta)(\bar{E}\vartheta)(\bar{F}\vartheta) = 0 \tag{5}$$

przy czym oznaczono

$$A\vartheta = \bar{A}\vartheta + (\bar{B}\Theta)(\bar{C}\vartheta) + (\bar{B}\vartheta)(\bar{C}\Theta) + (\bar{D}\Theta)(\bar{E}\Theta)(\bar{F}\vartheta) + (\bar{D}\Theta)(\bar{E}\vartheta)(\bar{F}\Theta) +$$

$$+ (\bar{D}\vartheta)(\bar{E}\Theta)(\bar{F}\Theta) \tag{6}$$

$$(B\vartheta)(C\vartheta) = (\bar{B}\vartheta)(\bar{C}\vartheta) + (\bar{D}\Theta)(\bar{E}\vartheta)(\bar{F}\vartheta) + (\bar{D}\vartheta)(\bar{E}\Theta)(\bar{F}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}\vartheta)(\bar{E}\vartheta)(\bar{F}\Theta) \tag{7}$$

Ostatnie równości należy rozumieć symbolicznie. Mianowicie na podstawie umowy w równaniu (2) w wyrazach nieliniowych napisano w miejsce sum tylko jeden z ich składników, podobnie w uzyskanych nowych sumach uwzględniono tylko po jednym składniku.

Na wyznaczenie wektora-kolumny Θ otrzymujemy równanie

$$\bar{A}\Theta + (\bar{B}\Theta)(\bar{C}\Theta) + (\bar{D}\Theta)(\bar{E}\Theta)(\bar{F}\Theta) = N \tag{8}$$

Jest to nieliniowe macierzowe równanie algebraiczne.

6. Rozwiązanie równania (8)

Ponieważ macierze A-F zawierają prócz elementów stałych, elementy stochastyczne zmienne, wielkości Θ, będące rozwiązaniami równania (8) posiadają następującą postać

$$\Theta = \Theta^{(1)} + \Theta^{(2)} \tag{9}$$

przy czym wektor-kolumna $\Theta^{(1)}$ posiada elementy stałe, zaś $\Theta^{(2)}$ elementy stochastycznie zmienne.

Podstawienie wielkości (9) do równania (8) i uwzględnienie tylko pierwszych potęg $\Theta^{(2)}$, pozwala wyprowadzić następujące równania

$$\bar{A}^{(1)}\,\Theta^{(1)} + (\bar{B}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) \cdot (\bar{F}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) = N \tag{10}$$

$$A_1\,\Theta^{(2)} = A_2 \tag{11}$$

przy czym

$$A_1\Theta^{(2)} = \bar{A}^{(1)}\,\Theta^{(2)} + (\bar{B}^{(1)}\,\Theta^{(2)})(\bar{C}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{B}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(1)}\,\Theta^{(2)}) + (\bar{D}^{(1)}\,\Theta^{(2)})(\bar{E}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\,\Theta^{(1)})$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\,\Theta^{(2)})(\bar{F}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\,\Theta^{(2)}) \tag{12}$$

$$A_2 = - \Big[(\bar{A}^{(2)}\,\Theta^{(1)}) + (\bar{B}^{(2)}\,\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{B}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(2)}\,\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(2)}\,\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(2)}\,\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\,\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\,\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(2)}\,\Theta^{(1)})\Big] \tag{13}$$

Równanie (10) jest nieliniowe ze względu na $\Theta^{(1)}$ typu równań (21), (27), (28), równanie (11) z powodu pominięcia wyrazów nieliniowych jest równaniem liniowym ze względu na $\Theta^{(2)}$. Przy założeniu, że macierz $\bar{A}_1$ jest nieosobliwa, można napisać rozwiązanie tego równania w następującej postaci

$$\Theta^{(2)} = \bar{A}_1^{-1}\,A_2 \tag{14}$$

Przy przejściu od równania (11) do równania (14) zmieniono oznaczenie macierzy (12). Macierz $\bar{A}_1$ powstaje z macierzy A_1 w ten sposób, że należy odpowiednie macierze diagonalne w macierzy (12) wymnożyć, następnie dodać i otrzymana tak macierz diagonalną zastąpić wektorem-kolumną. To samo należy uczynić dla każdego składnika sumy, o której była mowa na wstępie (równanie (6) i (7)) i następnie tak otrzymane wektory-kolumny dodać.

Podobnie należy postąpić w przypadku innych analogicznych równań liniowych na przykład równania charakterystycznego (17).

7. Przekształcenie równania (5)

W równaniu (5) wyrazy stochastyczne zmienne przenosimy na prawą stronę. Pozwala to napisać równanie w następującej postaci (po podstawieniu wyrażeń na Θ)

$$d\vartheta/dt + A^{(1)}\vartheta + \Phi_2(\vartheta) + \Phi_3(\vartheta) = - B(\vartheta) \tag{15}$$

przy czym

$$A^{(1)}\vartheta = \bar{A}^{(1)}\vartheta + (\bar{B}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(1)}\vartheta) + (\bar{B}^{(1)}\vartheta)(\bar{C}^{(1)}\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)})$$

$$\Phi_2(\vartheta) = (B^{(1)}\vartheta)(C^{(1)}\vartheta) = (\bar{B}^{(1)}\vartheta)(\bar{C}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}),$$

$$\Phi_3(\vartheta) = (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\vartheta),$$

$$B(\vartheta) = (A^{(2)}\vartheta) + (B^{(2)}\vartheta)(C^{(1)}\vartheta) + (B^{(1)}\vartheta)(C^{(2)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(2)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\vartheta) \cdot (\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(2)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(2)}\vartheta),$$

$$
\begin{aligned}
(A^{(2)}\vartheta) = {} & \bar{A}^{(2)}\vartheta + (\bar{B}^{(2)}\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(1)}\vartheta) + (\bar{B}^{(1)}\Theta^{(2)})(\bar{C}^{(1)}\vartheta) + \\
& + (\bar{B}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{C}^{(2)}\vartheta) + (\bar{B}^{(2)}\vartheta)(\bar{C}^{(1)}\Theta^{(1)}) + \\
& + (\bar{B}^{(1)}\vartheta)(C^{(2)}\Theta^{(1)}) + (B^{(1)}\vartheta)(\bar{C}^{(1)}\Theta^{(2)}) + \\
& + (\bar{D}^{(2)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(2)}) \,. \\
& \,. (\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(2)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + \\
& + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)}) \,. (\bar{E}^{(1)}\Theta^{(2)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + \\
& + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(2)}\vartheta) + (\bar{D}^{(2)}\Theta^{(1)}) \,. \\
& \,. (\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(2)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + \\
& + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)}) \,. (\bar{E}^{(2)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + \\
& + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(2)}\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)}) \,. \\
& \,. (\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(2)}) + (\bar{D}^{(2)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + \\
& + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(2)}\Theta^{(1)}) \,. (\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + \\
& + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(2)})(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)}) \,. \\
& \,. (\bar{F}^{(2)}\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(2)}),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$(B^{(2)}\vartheta)(C^{(1)}\vartheta) + (B^{(1)}\vartheta)(C^{(2)}\vartheta) = (\bar{B}^{(2)}\vartheta)(\bar{C}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{B}^{(1)}\vartheta)(\bar{C}^{(2)}\vartheta) + (\bar{D}^{(2)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(2)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)}) \,.$$

$$. (\bar{E}^{(2)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(2)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(2)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)}) \,.\, (\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(2)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(2)})(\bar{F}^{(1)}\vartheta) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\Theta^{(1)})(\bar{F}^{(2)}\vartheta) +$$

$$+ (\bar{D}^{(2)}\vartheta)(E^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta) \,.$$

$$. (\bar{E}^{(2)}\vartheta)(\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)}) + (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\vartheta)(\bar{F}^{(2)}\Theta^{(1)}) +$$

$$+ (\bar{D}^{(1)}\vartheta)(\bar{E}^{(1)}\vartheta) \,.\, (\bar{F}^{(1)}\Theta^{(1)})$$

Równanie (15) jest jednorodne w temperaturach ϑ. Jeżeli macierz $A^{(1)}$ jest nieosobliwa i równanie charakterystyczne

$$\det(A^{(1)} - \lambda I) = 0, \quad I \text{ - macierz jednostkowa} \tag{17}$$

posiada pierwiastki λ_k, $k = 1,\ldots,n$ pojedyncze, ujemne, rzeczywiste, istnieje takie nieosobliwe przekształcenie z kwadratową macierzą $\tilde{B}$ o elementach stałych)

$$Z = \tilde{B}\vartheta, \tag{18}$$

przy pomocy którego można równanie (15) doprowadzić do postaci

$$dZ/dt = \Lambda Z - \Phi_2^*(Z) - \Phi_3^*(Z) - B^*(Z), \tag{19}$$

gdzie gwiazdka oznacza, że za ϑ podstawiono Z przy pomocy transformacji

$$\vartheta = \tilde{B}^{-1} Z \tag{20}$$

Równanie (19) dopuszcza rozwiązanie metodą Dulaca, uogólnioną na równania macierzowe. Przy pomocy podstawienia (o współczynnikach nieoznaczonych)

$$H = Z + \psi_2(Z) + \psi_3(Z) + \psi^{(2)}(Z) \tag{21}$$

gdzie macierze $\psi_2(Z)$, $\psi_3(Z)$, $\psi^{(2)}(Z)$ są analogicznie zbudowane jak $-\Phi_2^*(Z)$, $-\Phi_3^*(Z)$, $-B^*(Z)$.
Wtedy równanie (19) przybiera następującą postać

$$dH/dt = (\Lambda)H \tag{22}$$

przy czym (Λ) macierz diagonalna o elementach $\lambda_1, \ldots\ldots \lambda_n$.
W funkcjach $\psi_2(Z)$, $\psi_3(Z)$, $\psi^{(2)}(Z)$ obieramy nieoznaczone współczynniki w ten sposób, by było spełnione równanie

$$(\Lambda)\left[\psi_2(Z) + \psi_3(Z) + \psi^{(2)}(Z)\right] - (d/dt)\left[\psi_2(Z) + \psi_3(Z) + \right.$$
$$\left. + \psi^{(2)}(Z)\right] = \Phi_2^*(Z) + \Phi^*_{(3)}(Z) + B(Z) \tag{23}$$

Rozwiązanie równania (22) posiada następującą postać

$$H = (C)\, e^{(\Lambda)t} \tag{24}$$

gdzie (Λ) zdefiniowano przy pomocy równania (22), zaś (C) macierz diagonalna o elementach $C_1, \ldots, C_n$, zaś $e^{(\Lambda)t}$ macierz diagonalna o elementach $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ wielkości λ_k są stałe.

Przy pomocy równania (21) można wyznaczyć Z na podstawie znajomości H. Związek ten posiada wyraz stochastyczny, poza tym jest nieliniowy. Przejście od Z do ϑ jest określone przy pomocy równania (20) o współczynnikach stałych. Jeżeli więc jako wyjściowe przyjmiemy nie stochastyczne rozwiązanie (24), temperatury ϑ będą posiadały wyraz stochastyczny. Także temperatura stanu ustalonego będzie posiadała na podstawie równania (14) składową stochastyczną.

Otrzymane rozwiązanie może być zinterpretowane geometrycznie podobnie jak w przypadkach, rozpatrzonych w poprzednich pracach autora.

8. Geometryczna i fizykalna interpretacja wyników

Poprzednie rozumowania przeprowadzono dla przypadku ogrzewania. W przypadku ostygania obliczenia przebiegają podobnie, z tą jedynie różnicą, że w analogicznych wyrażeniach występują inne współczynniki. Powoduje to inne wartości na stałe $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, pierwiastki równania charakterystycznego λ_i oraz związki między Z i H dla ogrzewania i ostygania.

Otrzymanym wynikom nadajemy następującą interpretację geometryczną: układ osi H przyjmujemy prostokątny, kartezjuszowski. Relacje (21) definiują układ osi Z jako krzywoliniowy, na ogół nie prostokątny i ze względu na trzeci wyraz równania (21), stochastycznie zmieniający swe własności (położenie i kształt osi). Aby nie komplikować zagadnienia zakładamy, że powyższe wzory transformacyjne, jak też zależność wielkości prawej strony równania (23) od Z są funkcjami jednoznacznymi, co można uzyskać przez odpowiednie ogranicze-

nie przedziału zmienności poszczególnych wielkości i co znajduje uzasadnienie, jeżeli amplituda oscylacji będzie dostatecznie mała. Osi krzywoliniowe mają wtedy kształt zbliżony do parabolicznego. Przyporządkowanie układowi osi Z układu osi ϑ odbywa się przy pomocy równania (20). Jest ono liniowe. Wynika stąd że osi ϑ są w stosunku do układu H krzywoliniowe, przy czym układ osi ϑ jest sztywnie związany z układem Z i razem z nim deformuje się stochastycznie w stosunku do układu H.

Ze względu na odmienną postać macierzy opisujących proces ogrzewania i ostygania, otrzymujemy w tych przypadkach różne pierwiastki λ_i. Powoduje to różny przebieg parabol przedstawiających w przestrzeni H procesy ogrzewania i ostygania. Zakładamy, że w obu przypadkach pierwiastki λ_i są proste, rzeczywiste i ujemne.

9. Stan "ustalony" oscylacji

Jeżeli chodzi o rozpatrywanie właściwości stanu "ustalonego" to stosują się tu uwagi i rozumowania, podane w pracach [9-13].

Słowa "ustalony" używany w tym sensie, że obliczamy go czysto formalnie podobnie jak w poprzednich pracach, nie uwzględniając faktu, że występują tu wielkości stochastyczne. Podobnie jak w poprzednich pracach można sformułować równania, pozwalające na wyznaczenie stanu ustalonego

$$
\begin{aligned}
&(H_{k,o} - H_k^{**})/(H_{k,o} - H_k^{*}) = ((H_{1,o} - H_1^{**})/(H_{1,o} - H_1^{*}))^{\varkappa_k}, \\
&H_k^{*}/H_k^{**} = (H_1^{*}/H_1^{**})^{\varkappa'_k}, \qquad k = 2, \ldots\ldots n \\
&\vartheta_n^{*} = \vartheta_{n,o} \\
&\vartheta_n^{**} = \vartheta_{n,o} + \Delta\vartheta
\end{aligned}
\tag{25}
$$

W tym układzie równań dwa ostatnie równania posiadają charakter stochastyczny.

10. Uwagi dotyczące rozwiązania równań

10.1. Rozwiązanie równania (23)

Równanie (23) służy do wyznaczenia nieoznaczonych współczynników w równaniu (21). Zadanie to w przedstawieniu macierzowym nie jest jednoznaczne. Jednoznacznie daje się zagadnienie rozwiązać jeżeli od postaci (16) dla wyrazów nieliniowych przejdziemy do odpowiednich form kwadratowych czy trzeciego stopnia. Możemy więc napisać

$$\Phi_2^*(Z) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta^*_{i,k} Z_i Z_k \tag{26}$$

$$\Phi_3^*(Z) = \sum_{l,k,l=1}^{n} \beta^*_{i,k,l} Z_i Z_k Z_l \tag{27}$$

$$B^*(Z) = N^{(2)*} Z + \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{i,k}^{(2)*} Z_i Z_k + \sum_{i,k,l=1}^{n} \beta_{i,k,l}^{(2)*} Z_i Z_k Z_l \tag{28}$$

przy czym stałe $\beta^*_{i,k}$, $\beta^*_{i,k,l}$ otrzymano przez wykonanie działań znanych stałych macierzach, występujących w (16), $N^{(2)*}$, $\beta_{i,k}^{(2)*}$, $\beta_{i,k,l}^{(2)*}$ są współczynnikami stochastycznie zmiennymi, otrzymanymi również z (16).

Podobnie piszemy niewiadome wyrażenia równania (21)

$$\Psi_2(Z) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{i,k} Z_i Z_k \tag{29}$$

$$\Psi_3(Z) = \sum_{i,k,l=1}^{n} \alpha_{i,k,l} Z_i Z_k Z_l \tag{30}$$

$$\Psi^{(2)}(Z) = N^{(2)} Z + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{i,k}^{(2)} Z_i Z_k +$$

$$+ \sum_{i,k,l=1}^{n} \alpha_{i,k,l}^{(2)} Z_i Z_k Z_l \tag{31}$$

przy czym współczynniki $\alpha_{i,k}$, $\alpha_{i,k,l}$ są stałe, $N^{(2)}$, $\alpha_{i,k}^{(2)}$, $\alpha_{i,k,l}^{(2)}$ są stochastycznie zmienne.

Podstawienie powyższych wyrażeń do równania (19), które w tym wypadku przybiera następującą postać

$$dZ/dt = (\Lambda)Z - \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{i,k}^{*} Z_i Z_k - \sum_{i,k,l}^{n} \beta_{k,k,l}^{*} Z_i Z_k Z_l -$$

$$- \Big[N^{(2)*} Z + \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{i,k}^{(2)} Z_i Z_k +$$

$$+ \sum_{i,k,l=1}^{n} \beta_{i,k,l}^{(2)} Z_i Z_k Z_l \Big] \tag{32}$$

prowadzi do równania, które musi być spełnione dla dowolnych Z.

Z tego powodu muszą być spełnione następujące równania:

$$\sum_{i,k=1}^{n} Z_i Z_k \left[(\Lambda)\alpha_{i,k} - \lambda_i \alpha_{i,k} - \lambda_k \alpha_{i,k}\right] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \beta^*_{i,k} Z_i Z_k \tag{33}$$

$$\sum_{i,k,l=1}^{n} Z_i Z_k Z_l \left[(\Lambda)\alpha_{i,k,l} + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,s} \beta^*_{i,l,s} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,s} \beta^*_{i,l,k} = -\alpha_{i,k,l} (\lambda_i + \lambda_l + \lambda_k)\right] =$$

$$= \sum_{i,k,l=1}^{n} \beta_{i,k,l} Z_i Z_k Z_l \tag{34}$$

$$D\, dN^{(2)*}/dt = -N^{(2)*} \tag{35}$$

$$\sum_{i,k=1}^{n} Z_i Z_k \left[(\Lambda)\alpha_{i,k}^{(2)} - d\alpha_{i,k}^{(2)}/dt + \right.$$

$$+ N^{(2)} \beta^*_{i,k} - \alpha_{i,k}^{(2)} \lambda_i - \alpha_{i,k}^{(2)} \lambda_k +$$

$$+\sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,s}\,\beta_{s,i}^{(2)*} + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,s}\,\beta_{s,i}^{(2)*}\Big] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{i,k}^{(2)*}\, Z_i\, Z_k \tag{36}$$

$$\sum_{i,k,l=1}^{n} Z_i\, Z_k\, Z_l \Big[(\Lambda)\alpha_{i,k,l}^{(2)} - d\alpha_{i,k,l}^{(2)}/dt +$$

$$+ N^{(2)}\beta^{*}_{i,k,l} - \sum_{s=1}^{n} \alpha_{s,k}^{(2)}\beta^{*}_{i,l,s} + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{s,k}^{(2)}\beta^{*}_{i,l,s} -$$

$$- \alpha_{i,k,l}\lambda_i - \alpha_{i,k,l}\lambda_k - \alpha_{i,k,l}\lambda_l - \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,s}\,\beta_{s,i,l}^{(2)*} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,s}\,\beta_{k,i,l}^{(2)*} + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,l,s}\,\beta_{s,i}^{(2)*} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,l,s}\,\beta_{s,i}^{(2)*} + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{k,l,s}\,\beta_{s,i}^{(2)*}\Big] =$$

$$= \sum_{i,k,l=1}^{n} \beta_{i,k,l}^{(2)*}\, Z_i\, Z_k\, Z_l \tag{37}$$

Wyrazy zawierające więcej niż trzy czynniki Z nie znajdują odpowiednika po drugiej stronie, więc powinny być tak małe, by można było je pominąć. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony można w równaniu (21) uwzględnić wyrazy wyższego stopnia i w ten sposób rozwiązać zmodyfikowane dokładniejsze równania (23). Dulac udowodnił zbieżność otrzymanych w ten sposób szeregów w pewnym otoczeniu początka układu. W przypadkach praktycznie ważnych sprawdzianem użyteczności metody będzie, czy wyrazy wypisane niżej można pominąć.

Występujące w pominiętych wyrazach współczynniki są pewnymi funkcjami elementów macierzy problemu. O dokładności równania (21) decydują więc własności tych macierzy. Pominięte wyrazy w naszym przypadku są czwartego i piątego stopnia i posiadają następującą postać

$$\sum_{s,k=1}^{n} \alpha_{s,k}^{(2)} Z_k \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_{i,u,v,s}^{*} Z_i Z_u Z_v +$$

$$+ \sum_{s,k=1}^{n} \alpha_{s,k}^{(2)} Z_s \cdot \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_{i,u,v,k}^{*} Z_i Z_u Z_v +$$

$$+ \sum_{s,k,l=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_k Z_l \cdot \sum_{i,u=1}^{n} \beta_{i,u,s}^{*} Z_i Z_u +$$

$$+ \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_{i,u,v,s}^{*} Z_i Z_u Z_v) + \sum_{s,k,l=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_s Z_l \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i,u=1}^{n} \beta_{i,u,k} Z_i Z_u + \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta_{i,u,v,k}^{*} Z_i Z_u Z_v \right) +$$

$$+\sum_{s,k,l=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_k Z_s \cdot \Big(\sum_{i,u=1}^{n} \beta^*_{i,u,l} Z_i Z_u +$$

$$+\sum_{i,u,v=1}^{n} \beta^*_{i,u,v,l} Z_i Z_u Z_v\Big) + \sum_{k,l,s=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_k Z_s \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{i,u=1}^{n} \beta^*_{i,u,l} Z_i Z_u + \sum_{i,u,v=1}^{n} \beta^*_{i,u,v,l} Z_i Z_u Z_v\Big) -$$

$$-\sum_{k,l,s=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_k Z_s \cdot \sum_{p,u=1}^{n} \beta_{l,u,p}^{(2)*} Z_p Z_u +$$

$$+\sum_{p,u,v=1}^{n} \beta_{l,u,v,p}^{(2)*} Z_p Z_u Z_v\Big) +$$

$$+\sum_{k,l,s=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_s Z_l \Big(\sum_{i,u=1}^{n} \beta^*_{i,u,k} Z_i Z_u +$$

$$+\sum_{i,u,v=1}^{n} \beta^*_{i,u,v,k} Z_i Z_u Z_v\Big)$$

$$-\sum_{k,l,s=1}^{n} \alpha_{k,l,s} Z_s Z_l \Big(\sum_{p,u=1}^{n} \beta_{k,u,p}^{(2)*} Z_p Z_u +$$

$$+\sum_{p,u,v=1}^{n} \beta_{k,u,v,p}^{(2)*} \cdot Z_p Z_u Z_v\Big) \tag{38}$$

10.2. Równania (33) do (37)

Przechodząc do równań (33) do (37) widzimy, że dwa pierwsze są równaniami liniowymi, które przy założeniu, że między pierwiastkami równania charakterystycznego nie zachodzą związki w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i = 0 \tag{39}$$

gdzie k_i stałe, nierówne równocześnie zeru, dadzą się rozwiązać. Pozostałe równania są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu na niewiadome współczynniki. Są one również całkowalne, jeżeli funkcje stochastycznie zmienne są bezwzględnie całkowalne.

10.3. Równanie (21)

Pozostają do omówienia nieliniowe algebraiczne równania macierzowe. Wszystkie są one tego samego typu. Możemy je więc rozwiązać tą samą metodą. Możemy np. stosować metodę iteracji [1]. Omówimy to na przykładzie równania (21). Możemy je napisać w następującej postaci

$$Z = H - \Psi_2(Z) - \Psi_3(Z) - \Psi^{(2)}(Z) \tag{40}$$

ogólnie w postaci

$$Z = \Xi(Z, H) \tag{41}$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie oznacza funkcję od Z i H.

O stosowalności metody decyduje spełnienie założenia, pod którym ciąg iteracji jest zbieżny. Jeżeli normę wektora określimy jako sumę modułów jego elementów, powinny normy pochod-

nych pierwszych wektora, utworzonego z prawych stron równań (42) ze względu na Z_k, $k = 1,\ldots n$ być mniejsze od pewnej liczby dodatniej mniejszej od jedności. Wtedy można utworzyć następujące iteracje

$$Z_o = H \tag{42}$$

$$Z_n = H - \Psi_2(Z_{n-1}) - \Psi_3(Z_{n-1}) - \Psi^{(2)}(Z_{n-1}),\ n = 1,2,\ldots\ldots \tag{43}$$

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = Z \tag{44}$$

Można również zastosować któryś ze sposobów odwracania szeregów.

Podobne uwagi jak do równania (21) stosują się również do nieliniowych równań pozwalających wyznaczyć stan "ustalony".

10.4. Równania na wyznaczenie stałych całkowania

Ważną cechą zastosowanej metody jest to, że rozwiązanie stanu "ustalonego" jest niezależne od historii procesu (brak pamięci). Dwa pierwsze równania układu (25) są w stałych C_k jednorodne, więc stałe te na kształt krzywych nie wpływają. W pozostałych równaniach występuje kombinacja $(C)\, e^{(\Lambda)t}$. Jeżeli rozwiązujemy równania (21) w postaci (45) i ograniczymy się do trzecich potęg włącznie, możemy napisać w przypadku ogrzewania

$$\vartheta = \Theta + D_1(C)\, e^{(\Lambda)t} + (D_2(C)e^{(\Lambda)t})(D_3(C)e^{(\Lambda)t}) +$$

$$+ (D_4(C)e^{(\Lambda)t})(D_5(C)e^{(\Lambda)t})(D_6(C)e^{(\Lambda)t}) \tag{45}$$

w przypadku ostygania

$$\vartheta = \vartheta_o + \bar{D}_1(\bar{C})e^{(\Lambda)t} + (\bar{D}_2(\bar{C})e^{(\Lambda)t})(\bar{D}_3(\bar{C})e^{(\Lambda)t}) +$$

$$+ (\bar{D}_4(\bar{C})e^{(\Lambda)t})(\bar{D}_5(\bar{C})e^{(\Lambda)t})(\bar{D}_6(\bar{C})e^{(\Lambda)t}) \tag{46}$$

przy czym macierze $D_1, \ldots\ldots D_6$, $\bar{D}_1, \ldots\ldots \bar{D}_6$ oraz wektory Θ, ϑ_o posiadają elementy będące sumą składowej stałej i składowej stochastycznej. W chwili początkowej jest

$$\vartheta(0) = \Theta + D_1(C) + (D_2(C))(D_3(C)) +$$

$$+ (D_4(C))(D_5(C))(D_6(C)) \tag{47}$$

lub

$$\vartheta(0) = \vartheta_o + \bar{D}_1(\bar{C}) + (\bar{D}_2(\bar{C}))(\bar{D}_3(\bar{C})) +$$

$$+ (\bar{D}_4(\bar{C}))(\bar{D}_5(\bar{C}))(\bar{D}_6(\bar{C})) \tag{48}$$

Są to równania nieliniowe na wyznaczenie stałych, typu równania (21).

Maszynopis złożono w Redakcji dnia 15.IV.1966 r.

LITERATURA

[1] Encykłopedia elem. matematyki, II, Ałgebra, Gos. Izd. T.T. Lit. 1951.

[2] Jerszow B.A.: Metod ocenok pri issledowanii ustojcziwosti nieliniejnych regulirujemych sistiem, Uczonyje zapiski ŁGU Nr 217, 1957, ser. mat. nauk, wyp. 31, str. 22.

[3] Niemyckij W.W., Stepanow W.W.: Kaczestwiennaja teoria differencialnych urawnienij, Gos. Izd. T.T. Lit. 1949.

[4] Pipes L.: Journ. Appl. Phys. Vol. 23, 1952, p. 625.

[5] Pipes L.: Journ. Appl. Phys. Vol. 23, 1952, p. 818.

[6] Pipes L.: Journ. Appl. Phys. Vol. 23, 1952, p. 1278, 1279.

[7] Pipes L.: Journ. Appl. Phys. Vol. 23, 1952, p. 1358.

[8] Pipes L.: Applied Matematics for engineers&physicists, Mc Graw N.Y. 1946.

[9] Szpilecki J.: Stan ustalony oscylacji relaksacyjnych w układach opisanych równaniami nieliniowymi, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Matem. Fiz. Nr 6 1964, 105.

[10] Szpilecki J.: Oscylacje relaksacyjne w układach liniowych, opisanych przez parametry, które są wielkościami stochastycznymi, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Matem. Fiz. Nr 6, 1964, 73.

[11] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe typu relaksacyjnego, rozpr. dokt. Wydz. Mech. - En. 1959.

[12] Szpilecki J.: Projektowanie układów aperiodycznie statecznych, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Energetyka, Nr 11, 1963, 9.

[13] Szpilecki J.: Oscylacje temperaturowe w układzie liniowym o dwu stopniach swobody, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Energetyka, Nr 11 1963, 23.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ОПИСАННЫХ ПРИ ПОМОЩИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Р е з ю м е

В работе рассматривается система n нелинейных дифференциальных уравнений первого ранга, которые могут быть написаны в виде (2), где матрицы A-F - это суммы двух матриц: одной постоянной и другой стохастической, имеющей нулевую временную среднюю величину, с начальными условиями $t = 0$, $\vartheta_k = \vartheta_{k,o}$, $k = 1,2,\ldots n$ и постоянным вектором - столбом N и ϑ_o. Проблема релаксационных колебаний решается подобным образом в конфигурационном пространстве, как в предыдущих работах автора. Используется слово "установившие" колебания из-за подобного способа его определения.

RELAXATION OSCILLATIONS IN NONLINEAR SYSTEMS, DESCRIBED BY STOCHASTIC PARAMETERS

S u m m a r y

In the paper is a system of n nonlinear differential equations of first order discussed, representable in the form (2), where the matrices A-F have the sum form with two component matrices: one of deterministic and the other of stochastic form with zero time average, with initial conditions $t = 0$, $\vartheta_k = \vartheta_{k,o}$, $k = 1,\ldots\ldots n$ and constant vector-column N and ϑ_o. The influence of stochastic component on the onset and offset moment of time is also considered. The stochastic components were so small assumed in comparison with the deterministic ones, that only their first powers were taken into acount.

The oscillation "steady state" solution can be obtained similarly as in [9-13], for the case when in determined moments of time the vector N is non continuously varied between two constant quantities.

The method used is a generalisation of Dulac [3] method for matrix equations of the form (2) with coefficients variable in time and time variable component small in comparison with constant terms of the first order.

The homogenisation of equations and separation of stochastic terms, gives the equation system (15). It is assumed that the matrix $A^{(1)}$ has real, negative and simple divisors. With small effort of work can be the method generalised for a system with multiple divisors. The divisors can be also of complex form with negative real part.

The geometric interpretation of the Z and ϑ variable spaces and other features of the problem can be similarly given as in former author's papers [9-13]. The transformation formula from the Z axis to ϑ axis system is of stochastic character.