ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

BOHDAN MOCHNACKI
Katedra Matematyki D

O ILOŚCI ZDERZEŃ SPRĘŻYSTYCH PODCZAS MODERACJI NEUTRONÓW W OŚRODKU WODOROWYM

Streszczenie. Artykuł niniejszy zawiera analizę procesu moderacji neutronów w ośrodku wodorowym, która pozwoliła na podanie nowego sposobu obliczania najbardziej prawdopodobnej ilości zderzeń podczas spowalniania oraz ustalenie rozkładu prawdopodobieństw wystąpienia w czasie moderacji innej ich liczby. Otrzymane wyniki - w miejscach gdzie porównanie było możliwe, pokrywają się całkowicie ze znanymi faktami dotyczącymi spowalniania w wodorze.

1. Zjawisko moderacji neutronów polega na tym, że dyfundujący w reaktorze jądrowym neutron rozszczepieniowy o energii rzędu $2\cdot10^6$eV, poprzez zderzenia sprężyste z atomami ośrodka, stopniowo wytrąca swoją energię, aż do chwili osiągnięcia pasma energii termicznych ok. 0,025 eV, przy których może zajść w reakcję jądrową z atomami paliwa. Proces moderacji w ośrodku wodorowym wyróżnia się spośród innych, ponieważ neutron może zostać spowolniony do energii termicznych nawet w jednym zderzeniu, ze względu na równość mas jądra wodoru i neutronu. W literaturze [1],[2], podane są sposoby na obliczenie przeciętnej ilości zderzeń podczas moderacji w różnych ośrodkach; używa się do tego celu tzw. średniego logarytmicznego dekrementu energii, wielkości określającej średnią zmianę logarytmu energii neutronu na jedno zderzenie.

Spowalnianie neutronów jest prawie całkowicie spowodowane sprężystymi zderzeniami rozproszeniowymi między neutronami, a w zasadzie nieruchomymi jądrami moderatora. Stosując prawo zachowania pędu i energii można [1] i [2] jednoznacznie określić zależność między kątem rozproszenia a energią przed i po zderzeniu z jądrem.

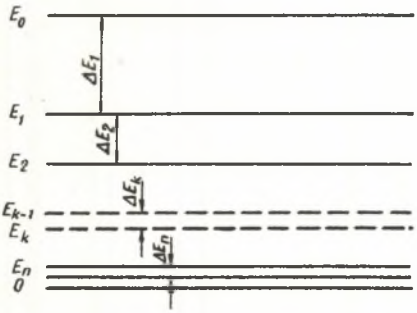
Wprowadzając empiryczne prawo rozproszenia [1], można uzyskać wielce użyteczne wyniki dotyczące ilości zderzeń w procesie moderacji. Doświadczenia wykazują, że rozproszenie neutronów o energiach rzędu od kilku MeV w dół, jest kulisto-symetryczne (izotropowe) w układzie środka mas. Korzystając z tak sformułowanego prawa, można dojść do bardzo prostej zależności określającej prawdopodobieństwo znalezienia się neutronu o energii E_o, w przedziale energetycznym ΔE - po zderzeniu sprężystym z jądrem wodoru, a mianowicie:

$$P_{E_o - E} = \frac{\Delta E}{E_o} \tag{1}$$

Wzór ten wyprowadzony m.in. w [2] wskazuje jeszcze na fakt, że prawdopodobieństwo $P_{E_o - E}$ nie zależy od tego w jakim paśmie energii znajduje się przedział ΔE, a jedynie od jego szerokości.

2. Stworzymy teraz pewien model spowalniania w wodorze. Pasmo energii od rozszczepieniowej E_o do termicznej E_{th} podzielimy na n części (rysunek 1) w ten sposób, że $E_k : E_{k+1} = \varepsilon$, $\varepsilon > 1$. Podział tego rodzaju jest najdogodniejszy, ponieważ neutron w zderzeniach z jądrami rozpraszającymi danego rodzaju, traci zawsze przeciętnie tą samą część energii [2], w związku z czym geometrycznie zagęszczająca się skala energii będzie odpowiednią do prześledzenia "losu" moderowanego neutronu.

Będzie więc:



Rys. 1. Podział pasma energii moderacji na przedziały ΔE_k

$$\begin{aligned} E_o &= E_o \\ E_1 &= E_o/\varepsilon \\ E_2 &= E_o/\varepsilon^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ E_k &= E_o/\varepsilon^k \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= E_o/\varepsilon^n \end{aligned} \tag{2}$$

oraz

$$\Delta E_1 = E_o - E_1 = E_o - \frac{E_o}{\varepsilon} = E_o \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$\Delta E_2 = E_1 - E_2 = \frac{E_o}{\varepsilon} - \frac{E_o}{\varepsilon^2} = E_o \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

$$\Delta E_k = E_{k-1} - E_k = E_o \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta E_n = E_{n-1} - E_n = E_o \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^n}$$

$$\Delta E_{th} = E_n = E_o \frac{1}{\varepsilon^n}$$

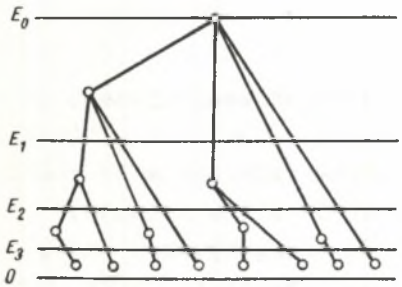
Prześledźmy teraz moderację neutronu rozszczepieniowego o energii E_o.

Po pierwszym zderzeniu, (pomijamy tu tzw. zderzenia "z poślizgiem" przy których energia neutronu nie ulega zmianie) neutron znajdzie się w pewnym przedziale energetycznym ΔE_α, gdzie będzie przebywał do chwili drugiego zderzenia, które "strąci" go do innego przedziału ΔE_β, $E_\alpha > E_\beta$. Mechanizm ten będzie się powtarzał do momentu osiągnięcia przez neutron energii termicznych. Należy podkreślić, że w dalszej części pracy będziemy rozpatrywać tylko te zderzenia, przy których energia zmieni się na tyle, aby neutron opuścił zajmowany poprzednio przedział energetyczny. Przy dostatecznie dużym n (ε bliskie 1), możemy rejestrować dowolnie małe zmiany energii przy zderzeniu. Rysunek 2 przedstawia wszystkie możliwe drogi moderacji, które moglibyśmy zaobserwować przy podziale na trzy części pasma energii $E_o - E_{th}$.

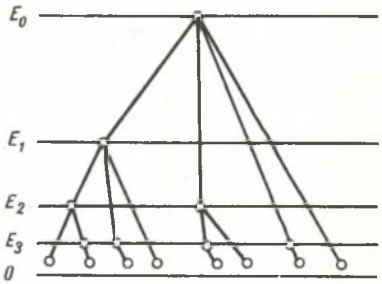
Zauważmy, że wszystkie charakterystyki energetyczne, którymi może przejść podczas spowalniania neutron, tworzą "drzewko" - tym bardziej rozgałęzione, im bliższą jedności wartość przejmiemy dla ε. Gałęzie prowadzące od energii E_o do prze-

działu energii termicznych tworzą drogi, którymi może zostać spowolniony neutron. W dalszej części artykułu zajmiemy się rozkładem prawdopodobieństw przebiegu moderacji po poszczególnych gałęziach drzewka.

3. Każda z możliwych dróg moderacji, pokazanych dla n = 3 na rysunku 2, składa się z odcinków przedstawiających sobą zmianę energii podczas pojedynczego zderzenia. Na wstępie obliczymy - posługując się zależnością [1] prawdopodobieństwa dla tych odcinków. Musimy przyjąć tu jednak pewne założenia upraszczające (wpływ jego na wynik obliczeń będzie się zresztą zmniejszał ze wzrostem n). Zauważmy, że wszystkie zderzenia, za wyjątkiem pierwszego, mają charakter przejścia od przedzia-



Rys. 2. Drogi moderacji zaobserwowane dla n=3



Rys. 3. Zmodyfikowany model spawalniania dla n = 3

łu energetycznego w paśmie energii wyższych, do przedziału energetycznego w paśmie energii niższych, a nie od energii do przedziału. Aby opis matematyczny przyjętego modelu moderacji był możliwy, przyporządkujemy dla obliczenia prawdopodobieństw przejścia neutronów np. z przedziału ΔE_α do przedziału ΔE_β, wszystkim neutronom znajdującym się w przedziale ΔE_α, energię będącą dolnym jego ograniczeniem - czyli energię E_α. Zmodyfikowane w tem sposób "drzewko" przedstawia rysunek 3.

Będzie więc:

a) dla przejść typu $E_o - \Delta E_k$

$$P_{E_o-\Delta E_1} = \frac{\Delta E_1}{E_o} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$P_{E_o-\Delta E_2} = \frac{\Delta E_2}{E_o} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2} \qquad (4)$$

.....

.....

$$P_{E_o-\Delta E_n} = \frac{\Delta E_n}{E_o} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^n}$$

$$P_{E_o-\Delta E_{th}} = \frac{\Delta E_n}{E_o} = \frac{1}{\varepsilon^n}$$

b) dla przejść typu $E_1 - \Delta E_k$, $k > 1$

$$P_{E_1-\Delta E_2} = \frac{\Delta E_2}{E_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$P_{E_1-\Delta E_3} = \frac{\Delta E_3}{E_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2}$$

..... (5)

$$P_{E_1-\Delta E_k} = \frac{\Delta E_k}{E_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{k-1}}$$

$$P_{E_1-\Delta E_{k+1}} = \frac{\Delta E_{k+1}}{E_i} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^k}$$

.....

$$P_{E_1-\Delta E_n} = \frac{\Delta E_n}{E_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{n-1}}$$

$$P_{E_1-\Delta E_{th}} = \frac{E_n}{E_1} = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$$

c) podobnie dla przejść $E_i - \Delta E_k$, $k > i$

$$P_{E_i-\Delta E_{i+1}} = \frac{\Delta E_{i+1}}{E_i} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$P_{E_i-\Delta E_{i+2}} = \frac{\Delta E_{i+2}}{E_i} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^2}$$

.....

$$P_{E_i-\Delta E_k} = \frac{\Delta E_k}{E_i} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{k-i}} \tag{6}$$

.....

$$P_{E_i-\Delta E_n} = \frac{\Delta E_n}{E_i} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{n-1}}$$

$$P_{E_i-\Delta E_{th}} = \frac{E_n}{E_i} = \frac{1}{\varepsilon^{n-i}}$$

Zauważmy jeszcze że:

$$P_{E_n-\Delta E_{th}} = \frac{E_n}{E_n} = 1 \tag{7}$$

Dla tak określonych prawdopodobieństw musi oczywiście zachodzić związek:

$$\sum_{k=i+1}^{n} P_{E_i-\Delta E_k} + P_{E_i-\Delta E_{th}} = 1 \tag{8}$$

czyli suma prawdopodobieństw przejść z przedziału ΔE_i (energii E_i) do wszystkich niższych przedziałów musi dać 1 - ponieważ nie ma innych możliwych przejść. Zależność tę sprawdzimy łatwo, gdyż suma w wyrażeniu (8) przedstawia postęp geometryczny o (n - i) członach, ilorazie $q = 1/\varepsilon$, pierwszy wyraz postępu $a_1 \left[\varepsilon = -1/\varepsilon\right]$.

Będzie więc:

$$\sum_{k=i+1}^{n} P_{E_i-\Delta E_k} + P_{E_i-\Delta E_{th}} =$$

$$= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \quad \frac{1 - (1/\varepsilon)^{n-1}}{1 - 1/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^{n-i}} = 1 \qquad (8a)$$

Jak powiedziano poprzednio, neutron może być spowolniony po każdej prowadzącej od E_o do ΔE_{th} drodze moderacji (gałęzi "drzewka").

Prawdopodobieństwo po danej drodze jest iloczynem [3] prawdopodobieństw przejścia po odcinkach tworzących wybraną drogę.

$$P_{E_o-\Delta E_\alpha-\Delta E_\beta \ldots \Delta E_\omega - \Delta E_{th}} =$$

$$= P_{E_o-\Delta E_\alpha} \cdot P_{E_\alpha-\Delta E_\beta} \cdots P_{E_\omega-\Delta E_{th}} \qquad (9)$$

czyli:

$$P_{E_o \ldots E_{th}} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{\alpha}} \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon^{\beta-\alpha}} \cdots \frac{1}{\varepsilon^{n-\omega}} = \frac{(\varepsilon - 1)^{x-1}}{\varepsilon^{n}} \qquad (10)$$

Zauważmy, że w liczniku wystąpi $(\varepsilon - 1)$ w potędze o jeden niższej niż ilość członów w iloczynie (9), zaś w mianowniku wykładnik liczby ε będzie sumą poszczególnych wykładników i wyniesie n (wszystkie liczby, oprócz n, wystąpią w sumie dwukrotnie z przeciwnym znakiem). Jak łatwo sprawdzić zależność (10) nie ulegnie zmianie dla szczególnego przypadku, gdy neutron zostanie spowolniony do przedziału ΔE_n, a następnie z prawdopodobieństwem równym 1 (7), po kolejnym zderzeniu znajdzie się w przedziale ΔE_{th}.

Analiza równania (10) wykazuje, że prawdopodobieństwo moderacji podług pewnej charakterystyki, jest przy ustalonym n funkcją ilości zderzeń x (ilość członów w równaniu (10) jest oczywiście równa ilości zderzeń dla danego przypadku modera-

cji), natomiast nie zależy od położenia przedziałów energetycznych, w których następowały zderzenia, co pokrywałoby się z wnioskami wynikającymi z zależności (i). Nie ma zatem potrzeby odróżnienia od siebie dróg o tej samej ilości zderzeń, ale następujących w różnych przedziałach energetycznych, bo prawdopodobieństwo ich wystąpienia jest takie samo, określone zależnością (10). W związku z tym wprowadzimy od tej chwili nową wielkość P_x, będącą iloczynem prawdopodobieństwa przejścia po drodze o x zderzeniach i ilości dróg X, przy których taka ilość zderzeń nastąpi. P_x będzie więc prawdopodobieństwem moderacji w x zderzeniach.

$$P_x = P_{E_o-\Delta E_\alpha-\Delta E_\beta \ldots \Delta E_\omega-\Delta E_{th}} \cdot X \qquad (11)$$

x zderzeń

Ponieważ jest łatwo sprawdzić:

$$X = \binom{n}{x-1} \qquad (12)$$

więc:

$$P_x = \frac{(\varepsilon - 1)^{x-1}}{\varepsilon^n} \binom{n}{x-1} \qquad (13)$$

Do otrzymanej zależności wprowadzimy jeszcze związek między ε a n.

Mamy:

$$\frac{E_o}{E_n} = \varepsilon^n = \frac{2x10^6}{0,025} \qquad (14)$$

dla przyjętych w ten sposób energii rozszczepienia i energii termicznej. Wobec tego:

$$n \ln\varepsilon = \ln \frac{2x10^6}{0,025} = 18,2 \qquad (14a)$$

czyli

$$\varepsilon = e^{\frac{18,2}{n}} \tag{15}$$

Wzór (13) przyjmie więc postać:

$$P_x = \frac{\left[e^{\frac{18,2}{n}} - 1\right]^{x-1}}{e^{18,2}} \binom{n}{x-1} \tag{16}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób równanie określające prawdopodobieństwo moderacji neutronu w x zderzeniach.

W zależności (16) występuje parametr n - zależny od "gęstości" przyjętego podziału pasma energii moderacji. Wydawać by się mogło, że zmiany ε będą mieć istotny wpływ na otrzymany rozkład prawdopodobieństw moderacji. Okazuje się jednak, że dla dostatecznie dużych n krzywa rozkładu prawdopodobieństw zmienia się nieznacznie ze zmianą ε.

I tak dla $\varepsilon = 2$, ($n = 28$) otrzymamy maksimum dla $n = 14$, a w przypadku granicznym $n \to \infty$, maksimum prawdopodobieństwa wystąpi dla $n = 18$.

W celu otrzymania jednoznacznego rozkładu prawdopodobieństw moderacji w funkcji ilości zderzeń zbadamy przypadek podziału nieskończenie gęstego, gdy $n \to \infty$, Będzie wtedy:

$$P_x = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[e^{\frac{18,2}{n}} - 1\right]^{x-1}}{e^{18,2}} \cdot \binom{n}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{e^{18,2}} \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{18,2}{n}} - 1\right)^{x-1} \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)!\,e^{18,2}} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{\frac{18,2}{n}} - 1}{\frac{18,2}{n}}\right]^{x-1} \cdot \left(\frac{18,2}{n}\right)^{x-1} \cdot$$

$$\cdot\, n^{x-1} (1 - 1/n)(1 - 2/n) \ldots (1 - (x-2)/n) \tag{17}$$

czyli:

$$P_x = \frac{18,2^{x-1}}{e^{18,2}(x-1)!} \tag{18}$$

Otrzymane równanie określa jednoznacznie zależność między prawdopodobieństwem a ilością zderzeń w procesie moderacji. Dla prawdopodobieństw P_x musi być spełniony związek:

$$\sum_{x=1}^{\infty} P_x = 1 \tag{19}$$

Rzeczywiście:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{18,2^{x-1}}{e^{18,2}(x-1)!} =$$

$$= \frac{1}{e^{18,2}} \left(1 + \frac{18,2}{1} + \frac{18,2}{2} + \ldots\right) = 1 \tag{20}$$

ponieważ wyrażenie w nawiasie stanowi rozwinięcie w szereg funkcji $e^{18,2}$.

4. Otrzymane powyżej zależności pozwalają na zbadanie rozkładu prawdopodobieństw moderacji w x zderzeniach. Poszczególne wartości prawdopodobieństw tworzą ciąg liczbowy, który osiągnie maksimum dla $P_{x+1} : P_x = 1$, będzie malał w zakresach $P_{x+1} : P_x < 1$, a rósł dla $P_{x+1} : P_x > 1$. Korzystając z tych zależności można łatwo wykreślić rozkład prawdopodobieństw w funkcji ilości zderzeń, ponieważ:

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{18,2}{x} \tag{21}$$

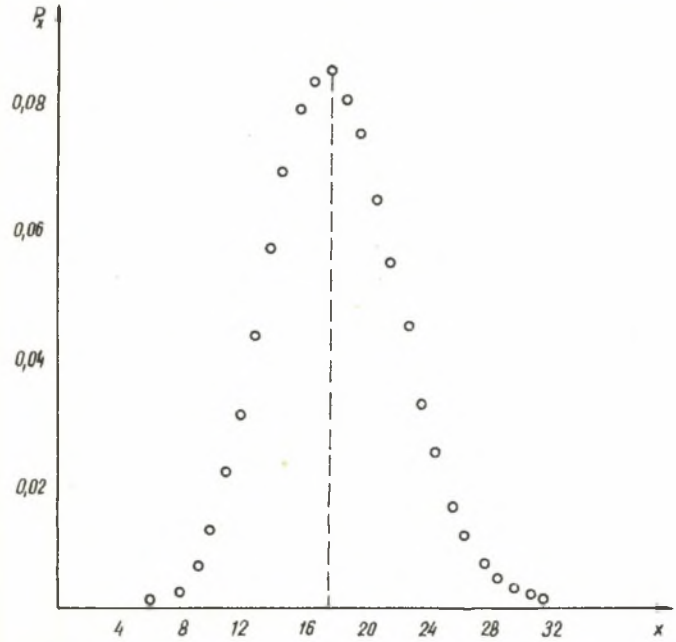
czyli:

$$P_{x+1} = \frac{18,2\ P_x}{x} \tag{22}$$

Obliczając z (18) P_1 możemy korzystać z (22) i "łańcuszkowo" obliczyć pozostałe prawdopodobieństwa.

Na zakończenie zajmiemy się najbardziej prawdopodobną ilością zderzeń.

Ze wzoru (21) widać, że najbardziej prawdopodobną będzie moderacja w 18 zderzeniach. Wartość ta podawana jest w literaturze [1], [2], jako przeciętna ilość zderzeń neutronu podczas moderacji w ośrodku wodorowym. Dla autora istotną jest zgodność otrzymanego wyniku z podawaną w książkach wartością, wykazuje bowiem ona, przydatność tego rodzaju modelu do bada-



Rys. 4. Rozkład prawdopodobieństw moderacji w funkcji ilości zderzeń $P_x = f(x)$

nia moderacji neutronów. Podany na rysunku 4 rozkład prawdopodobieństw moderacji w wodorze, stanowi rozszerzenie informacji o tym zjawisku, ponieważ podręczniki podają metody pozwalające na obliczenie tylko wartości maksymalnej tego rozkładu.

Rękopis złożono w Redakcji 15.I.1967 r.

LITERATURA

[1] DAVISON D.: Neutron Transport Theory Oxford 1958 r.

[2] GLEASTON-EDLUND: Teoria reaktorów jądrowych 1958 r.

[3] FELLER: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa 1960 r.

О ЧИСЛЕ ЭЛАСТИЧЕСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ВО ВРЕМЯ МОДЕРАЦИИ НЕЙТРОНОВ В ВОДОРОДНОЙ СРЕДЕ

Р е з ю м е

В статье производится анализ процесса модерации нейтронов в водородной среде, в следствии которого получается возможность предложения нового способа вычисления самого вероятного числа столкновений, и распределения вероятностей выступления во время модерации другого их числа.

QUANTITY OF ELASTIC COLLISIONS DURING THE NEUTRONS MODERATION IN THE HYDROGEN MEDIUM

S u m m a r y

The paper contains an analyzis of neutrons moderation time in the hydrogen medium, that allowed to put forward a new way of computing the most probable quantity of collisions during the slowing down, as well as the establishment of probability distribution concerning the appearance of theirs (i.e. collisions) different number during the moderation.