ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

DYSKUSJA DZIAŁANIA ANALIZATORA ZE WZMACNIACZEM SELEKTYWNYM TYPU MOSTKA T

Streszczenie. W artykule rozpatrzono działanie analizatora ze wzmacniaczem selektywnym w zastosowaniu do pomiarów akustycznych widma przedstawialnego szeregiem Fouriera. Ponieważ stosowane są zasadniczo dwie metody: jedna statyczna, polegająca na ręcznym ustawianiu elementu regulowanego z odczekaniem na stan ustalony, i druga dynamiczna, gdy element strojony analizatora jest zmieniany w sposób ciągły automatycznie przy pomocy odpowiedniego urządzenia. Oczywiście w tym ostatnim przypadku nie można mówić o stanie ustalonym i to uwydatnia się w działaniu analizatora. Dla uwzględnienia tego wpływu ułożono i rozwiązano równania analizatora w obu przypadkach i porównano rozwiązania. Pozwala to wysnuć pewne wnioski dotyczące projektowania analizatora.

1. Wstęp

Jednym z elementów analizatorów, w szczególności akustycznych, jest tak zwana ruchoma bramka. Jest to układ o właściwościach filtru pasmowo przepustowego, w którym pasmo przepuszczania o niedużej szerokości jest przesuwane wzdłuż analizowanego widma przy pomocy regulacji ręcznej lub automatycznej.

Jedną z takich bramek otrzymujemy w postaci wzmacniacza selektywnego, to znaczy wzmacniacza liniowego o selektywnym sprzężeniu zwrotnym w postaci filtru pasmowo zaporowego. Takie sprzężenie zwrotne posiada bardzo duży opór w otoczeniu częstości charakterystycznej filtra, wskutek czego nie zwiera wzmacniacza i wskutek tego następuje przepuszczenie i wzmacnianie tych częstości. Inne częstości są zwierane przez układ sprzężenia zwrotnego. Regulacja ma za zadanie zmieniać częstość charakterystyczną filtra. Teorię przyrządu znajdujemy w [1, 2, 4], zasady projektowania w [4]. Tego rodzaju analizator buduje na przykład VEB Köpenick Funkwerk.

Częstość charakterystyczna filtra określona jest wzorem

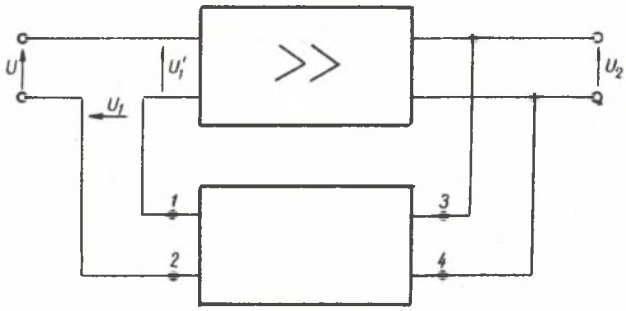
$$f_o = 1/2\pi R C \tag{1}$$

Połówkowa szerokość pasma wzmacnianego

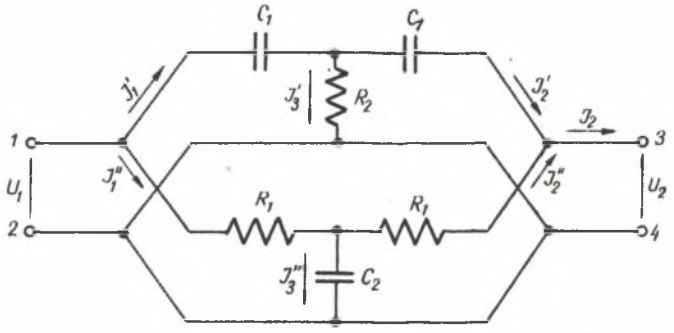
$$\Delta f/f_o = 1/150 \tag{2}$$

Ze względu na duże zalety tego rodzaju analizatora, autor zajął się przedyskutowaniem jego własności.

Zasadę wzmacniacza selektywnego przedstawia rysunek 1. Zasadę filtra pasmowo zaporowego rysunek 2.



Rys. 1. Zasada wzmacniacza selektywnego



Rys. 2. Zasada filtra pasmowo zaporowego typu mostka T

2. Teoria podwójnego mostka T z przestrajanymi oporami

Na rysunku 2 przedstawiono schemat filtru pasmowo zaporowego w postaci podwójnego mostka T. Częstość f_o jest w nim zmieniana przestrajaniem oporu.

Z praw Kirchhoffa otrzymujemy następujące związki:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= J_1' + J_1'' \\
J_2 &= J_2' + J_2'' \\
J_3' &= J_1' - J_2' \\
J_3'' &= J_1'' - J_2'' \\
U_1 &= (1/C_1)\int J_1'\,dt + R_2\,J_3' \\
U_1 &= R_1\,J_1'' + (1/C_2)\int J_3''\,dt \\
U_2 &= (1/C_1)\int J_2'\,dt - R_2\,J_3' \\
U_2 &= J_2''\,R_1 - (1/C_2)\int J_3''\,dt
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Przyjmując, jak to się zwykle czyni,

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_1/2 \\
C_2 &= 2\,C_1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

oraz przyjmując, że na wejściu filtra znajduje się generator o SEM. E(t) (napięcie analizowane) i oporze wewnętrznym R_w, na wyjściu zaś filtr jest zamknięty oporem R, więc

$$
\begin{aligned}
U_2 &= R\,J_2 \\
U_1 &= E(t) - R_w\,J_1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

otrzymujemy po elementarnych przekształceniach i wyeliminowaniu niektórych zmiennych układ równań przedstawiony następującym równaniem macierzowym

$$(A_1)dJ/dt + (A_2)\,J = dF/dt \tag{6}$$

gdzie: J oznacza wektor-kolumnę o elementach: J_1, J_2, J'_1, J'_2. F oznacza wektor-kolumnę o dwu elementach równych E(t) i dwu pozostałych równych zeru. Kwadratowe macierze czwartego rzędu (A_1), (A_2) posiadają następującą postać:

$$(A_1) = \begin{pmatrix} R_w & 0 & R_1/2, & -R_1/2 \\ R_w + R_1, & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & R & R_1/2, & -R_1/2 \\ 0 & R - R_1, & 0 & R_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$(A_2) = (1/2C_1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3. Teoria wzmacniacza z selektywnym sprzężeniem zwrotnym

Posługując się blokowym rysunkiem schematycznym tego wzmacniacza i robiąc o nim założenie, że jest to liniowy wzmacniacz napięciowy bez wstecznego oddziaływania obwodu anodowego na obwód siatki i bez prądów siatki, czyli

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U'_1 \\ J_a &= S\, U'_1 \\ U_2 &= J_a R_a \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie:

J_a - natężenie prądu anodowego wzmacniacza,
R_a - opór lampy,
S - nachylenie charakterystyki,

wprowadzamy w miejsce drugiego równania (5)

$$U_1 = E(t) - R_w J_1 - (R/S\, R_a)\, J_2 \tag{10}$$

Zmienia to tylko nieznacznie równanie (6), mianowicie w miejsce macierzy (A_1) otrzymujemy macierz, w której w drugiej kolumnie w dwu pierwszych wierszach występuje element $(R/S\ R_a)$ w miejsce zera. Jeżeli macierz tę oznaczymy przez (A'_1), wtedy równanie (6) z ewentualnym zastąpieniem macierzy (A_1) przez macierz (A'_1) opisuje zachowanie się analizatora przy statycznym pomiarze. Oznaczymy je przez (6').

4. Równania wzmacniacza w przypadku liniowo zmiennego oporu R_1

Zakładając

$$R_1 = R_o\ (1 + at) \tag{11}$$

przy czym

$$at \ll 1 \tag{12}$$

oraz wprowadzając oznaczenie

$$z = 1 + at \tag{13}$$

otrzymamy w miejsce równania (6) równanie podobnie zbudowane, w którym w miejsce macierzy (A'_1) wystąpi macierz (A''_1), powstała przez zastąpienie oporu R_1 przez R_o oraz pomnożenie tak zmodyfikowanej macierzy (A'_1) przez a (pochodzące z wprowadzenia w pochodnej w miejsce t zmiennej z). Macierz tę oznaczymy przez (A''_1). Macierz (A_2) nie ulega zmianie, wektor-kolumnę prawej strony przedstawiamy w postaci a $dF(z)/dz$. Oznaczymy to równanie przez (6").

5. Badanie przebiegów przedstawialnych szeregiem Fouriera

Rozpatrzymy rozwiązanie równania (6"), w przypadku, gdy analizowany przebieg jest przedstawialny szeregiem

$$E(z) = B_o + \sum_{k=1}^{n} B_k \cos\left((k\omega/a)(z - 1) + \psi_k\right) \tag{14}$$

gdzie: B_o, B_k wartości stałe.

Rozwiązanie równania (6") przyjmujemy w postaci

$$J(z) = \sum_{k=1}^{n} C_k(z) \cos\left[(k\omega/a)(z-1) + \psi_k\right] \tag{15}$$

$C_k(z) \cos\left[(k\omega/a)(z-1) + \varphi_k\right]$ oznacza wektor-kolumnę o elementach $C_{k,i}(z) \cos\left[(k\omega/a)(z-1) + \varphi_{k,i}\right]$, $i = 1,\ldots,4$.

Przyrównując do zera współczynniki przy poszczególnych funkcjach trygonometrycznych lub wyraz wolny od nich, otrzymujemy następujący układ równań na wyznaczenie niewiadomych funkcji $C_k(z)$

$$\begin{aligned}
(A_1'')\left[dC_{k,c}(z)/dz - (k\omega/a)C_{k,s}(z)\right] + (A_2)C_{k,c}(z) &= -(k\omega)B_{k,s} \\
(A_1'')\left[dC_{k,s}(z)/dz + (k\omega/a)C_{k,c}(z)\right] + (A_2)C_{k,s}(z) &= (k\omega)B_{k,c}
\end{aligned} \tag{16}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} C_{k,s} \\ C_{k,c} \end{matrix} &= C_k \begin{matrix} \sin(\varphi_k - k\omega/a) \\ \cos(\varphi_k - k\omega/a) \end{matrix} \\
\begin{matrix} B_{k,s} \\ B_{k,c} \end{matrix} &= B_k \begin{matrix} \sin(\varphi_k - k\omega/a) \\ \cos(\varphi_k - k\omega/a) \end{matrix}
\end{aligned} \tag{17}$$

Równania (17) mogą być ujęte w jedno równanie o macierzach ósmego rzędu

$$(A)dD_k(z)/dz + (G)D_k(z) = (k\omega)G_k \tag{18}$$

przy czym macierz (A) jest quasidiagonalna o elementach (A_1''), (A_1'') na głównej przekątnej, macierz (G) posiada na głównej przekątni macierze (A_2) oraz w pierwszym wierszu $-(k\omega/a)(A_1'')$, w drugim $(k\omega/a)(A_1'')$ jako elementy nie przekątne. Wektor-kolumna $D_k(z)$ jest zbudowana kolejno z elementów wektorów-kolumn

$C_{k,c}(z)$, $C_{k,s}(z)$, wektor-kolumna G_k jest zbudowana wektorów kolumn $-B_{k,s}$, $B_{k,c}$.

6. Przejście do równania (6) lub (6')

Celem przejścia od podanych wyżej równań do równań otrzymanych z równania (6) lub (6') należy zastąpić macierz (A''_1) przez (A'_1) lub (A_1), zmienną niezależną z przez t oraz z prawej strony przejść od $G_k(z)$ do $C_k(t)$.

7. Przekształcenie równania (18)

Równanie charakterystyczne przynależne od równania (18) posiada trochę nieprzejrzystą postać. Dlatego, ze względu na to że macierz $(A^1) + (A^2)$ jest nieosobliwa napiszemy równanie (18) w następującej postaci:

$$dD_k(z)/dz + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} (G)D_k(z) = \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} \left\{(k\omega)\, G_k - \right.$$

$$\left. - (z-1)(A^2)dD_k(z)/dz\right\} \qquad (19)$$

przy czym przez (A^1), (A^2) oznaczono macierze zbudowane z elementów macierzy (A), wolnych od z oraz stojących przy z. Macierz odwrotną można napisać następująco:

$$\left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} = \mathrm{ad}\left[(A^1)+(A^2)\right]/\det\left[(A^1)+(A^2)\right] \qquad (20)$$

gdzie:

$$\det\left[(A^1)+(A^2)\right] = M^2 \qquad (21)$$

$$M = R_o^2 \left\{2\, R_w\, R + (R_o^2/2)(R - R_w)\right\} - (R/S\, R_a)R_o^3/2 \qquad (22)$$

Po uproszczeniu licznika i mianownika przez M, otrzymujemy

$$\left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} = (\ ^{(\alpha)},\ _{(\alpha)})/M\ a \qquad (23)$$

(α) - macierz kwadratowa 4 rzędu o następujących elementach

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,1} &= (R_o^2/2)\left\{(R/SR_a) + 3R - R_o\right\},\\
\alpha_{1,2} &= (R_o^2/2)\left\{-(R/SR_a) + R\right\},\\
\alpha_{1,3} &= -(R_o^2/2)\left\{3(R/SR_a)+(R - R_o)\right\},\\
\alpha_{1,4} &= (R_o^2/2)\left\{-(R/SR_a) + R\right\},\\
\alpha_{2,1} &= -(R_o^2/2)(R_w + R_o),\\
\alpha_{2,2} &= (R_o^2/2)\, R_w,\\
\alpha_{2,3} &= (R_o^2/2)(3\, R_w + R_o),\\
\alpha_{2,4} &= (R_o^2/2)\, R_w,\\
\alpha_{3,1} &= (R_o/2)(R_w + R_o)(3R - R_o),\\
\alpha_{3,2} &= -R_w\, R_o(3R - R_o)/2,\\
\alpha_{3,3} &= -(R_o^2/2)\left\{2(R/SR_a)+(R - R_o)\right\},\\
\alpha_{3,4} &= (R_o^2/2)(R/SR_a - R) - R_w\, R\, R_o/2,\\
\alpha_{4,1} &= (R_o/2)(R_w + R_o)(R - R_o),\\
\alpha_{4,2} &= -(R_o/2)R_w(R - R_o),\\
\alpha_{4,3} &= -(R_o/2)(R - R_o)(2R_w + R_o),\\
\alpha_{4,4} &= -(R_o^2/2)(R/SR_a) + RR_o((3/2)R_w + R_o/2)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

8. Rozwiązanie zagadnienia przy pomocy macierzowej funkcji wykładniczej

Równanie (18) lub (19) daje się rozwiązać metodą iteracji. Szczególnie nadaje się do tego metoda macierzowej funkcji wykładniczej, ponieważ daje wygodne kryterium zbieżności.

Oznaczając

$D_k(0)$ - wektor-kolumna wartości początkowych,

$$\begin{aligned} &\left[(A^1) + (A^2)\right]^{-1} (G) = (\gamma_{i,k}), \\ &\left[(A^1) + (A^2)\right]^{-1} (A^2) = (\beta_{i,k}), \\ &\left[(A^1) + (A^2)\right]^{-1} = (\alpha_{i,k}), \\ &(A) = (A^1) + (A^2) + (z-1)(A^2), \end{aligned} \tag{25}$$

(A^1) - macierz zbudowana z elementów, w których nie występuje z,
(A^2) - macierz współczynników przy z,
można napisać kolejne przybliżenia rozwiązania

$$D_{k,o}(z) = e^{-(\gamma_{i,k})z} D_k(0),$$

$$D_{k,1}(z) = e^{-(\gamma_{i,k})z}\left\{D_k(0) - \int_0^z e^{(\gamma_{i,k})\tau} \left[\left\{(\alpha_{i,k})(k\omega)G_k + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. +(\beta_{i,k})\, dD_{k,o}(\tau)/dz\right\} - (\beta_{i,k})\tau\, dD_{k,o}(\tau)/dz\right] d\tau\right\}$$

.....

.....

$$D_{k,n}(z) = e^{-(\gamma_{i,k})z}\left\{D_k(0) - \int_0^z e^{(\gamma_{i,k})\tau} \left[\left\{(\alpha_{i,k})(k\omega)G_k + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. +(\beta_{i,k})dD_{k,n-1}(\tau))dz\right\} - (\beta_{i,k})\tau\, dD_{k,n-1}(\tau)/dz\right] d\tau\right\} \tag{26}$$

Macierz $(\gamma_{i,k})$ z (25) posiada następującą postać:

$$(\gamma_{i,k}) = (1/a\ M^2)\begin{pmatrix}(\bar{\beta}), & -(k\omega)M\ E \\ (k\omega)M\ E, & (\bar{\beta})\end{pmatrix} \tag{27}$$

przy czym

$$(\bar{\beta}) = (\alpha)(A_2) = \begin{pmatrix}\bar{\beta}_{1,1}, & -\bar{\beta}_{1,1}, & \bar{\beta}_{1,3}, & \bar{\beta}_{1,3} \\ \bar{\beta}_{2,1}, & -\bar{\beta}_{2,1}, & \bar{\beta}_{2,3}, & \bar{\beta}_{2,3} \\ \bar{\beta}_{3,1}, & -\bar{\beta}_{3,1}, & \bar{\beta}_{3,3}, & \bar{\beta}_{3,4} \\ \bar{\beta}_{4,1}, & -\bar{\beta}_{4,1}, & \bar{\beta}_{4,3}, & \bar{\beta}_{4,4}\end{pmatrix} \tag{28}$$

gdzie:

$$\bar{\beta}_{1,1} = (R_o^2/2\ C_1)(-R/SR_a + R),$$

$$\bar{\beta}_{1,3} = (1/C_1)(R_o^2/2)(2R/SR_a + 2R - R_o),$$

$$\bar{\beta}_{2,1} = (R_w/C_1)(R_o^2/2),$$

$$\bar{\beta}_{2,3} = -(1/C_1)(R_o^2/2)(2\ R_w + R_o),$$

$$\bar{\beta}_{3,1} = (1/4\ C_1)\left\{R_w\ R_o\ (2R - R_o) + R_o^2\ (R/SR_a - R)\right\},$$

$$\bar{\beta}_{3,3} = (3/4\ C_1)(R_o\ R_w + 2\ R_o^2)(3R - R_o) - (R_o/4\ C_1)\left[R(R/SR_a) - R) - R_w\ R\right]$$

$$\bar{\beta}_{3,4} = -(R_w\ R_o/4\ C_1)(3\ R - R_o) + (R_o^2/2C_1)\left\{2(R/SR_a) + (R - R_o)\right\} + (R_o/4C_1)\left[R_o(R/SR_a - R) - R_w\ R\right],$$

$$\bar{\beta}_{4,1} = -(R_o/4C_1)\left[R_w(R - R_o) - (3R_w + R_o)R + R_o(R/SR_a)\right],$$

$$\bar{\beta}_{4,3} = (R_o/4C_1)(R - R_o)(3R_w + 2R_o) + (R_o/4C_1)\left[R_o\ R/SR_a - 3R_w\ R - R_o^2\right],$$

$$\bar{\beta}_{4,4} = R_o/4C_1)(R - R_o)(3R_w + 2R_o) - (R_o/4C_1)\left[R_o(R/SR_a) - R(3R_w + R_o)\right], \tag{29}$$

Macierz zaś $(\beta_{i,k})$

$$(\beta_{i,k}) = (R_o/M^2) \begin{pmatrix} \alpha', & 0 \\ 0, & \alpha' \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2}, & -\alpha_{1,4}, & & \\ \alpha_{2,2}, & -\alpha_{2,4}, & & \\ \alpha_{3,2}, & -\alpha_{3,4}, & \alpha_{3,1}/2 - \alpha_{3,2} + \alpha_{3,3}/2, & -\alpha_{3,1}/2 - \alpha_{3,3}/2 + \alpha_{3,4} \\ \alpha_{4,2}, & -\alpha_{4,4}, & \alpha_{4,1}/2 - \alpha_{4,2} + \alpha_{4,3}/2, & -\alpha_{4,1}/2 - \alpha_{4,3}/2 + \alpha_{4,4} \end{pmatrix} \tag{31}$$

9. Dyskusja zbieżności otrzymanych rozwiązań

Wprowadzając oszacowanie

$$|\gamma_{i,k}| \leq \Gamma, \quad |\beta_{i,k}| \leq B, \quad |\alpha_{i,k}| \leq A \tag{32}$$

$$i,k = 1,2,\ldots\ldots n$$

gdzie:

Γ, B, A	- stałe dodatnie,
$\gamma > 0$	- moduł największej wartości początkowej,
$G > 0$	- moduł największego elementu wektora-kolumny G_k,
E	- macierz jednostkowa n rzędu,
I	- kwadratowa macierz, zbudowana z jedynek, o n wierszach,
$D_o(1)$, $G_o(1)$	- wektor-kolumna, zbudowana z n jedynek,
z_1	- wartość maksymalna argumentu

oraz oznaczając

$$Q_2 = \left[(n-1)/n + n\, e^{\Gamma n\, z_1}\right] A(k\omega) z_1\, G\, G_o(1)$$

$$X = \Gamma n(D_{ko}) + \Gamma n\, Q_1 + A\, n\, (k\omega)\, G\, G_o(1)$$

$$Y = |D_{ko}| + Q_1$$

$$P = \left[(n-1)/n + n\, e^{\Gamma n\, z_1}\right] B\, a^2 t_1^2$$

$$Q_1 = \left[(n-1)/n + e^{\Gamma n\, z_1}\right] \gamma D_o(1),$$

mamy

$$\left| e^{\pm(\gamma_{i,k})z} \right| \leq E(n-1)/n + (1/n) e^{\Gamma n\, z_1} \quad I$$

$$\left| D_{k,o}(z) \right| \leq Q_1 \tag{33}$$

$$\left| d\, D_{k,o}(z)/dz \right| \leq \Gamma n\, Q_1$$

$$\left| d\, D_{k,m}(z)/dz \right| \leq X\left[1 - (\Gamma P\, n^2 + \sqrt{P}\, n)^m\right] / \left[1 - (\Gamma P\, n^2 + \sqrt{P}\, n)\right] +$$
$$+ (\Gamma P\, n^2 + \sqrt{P}\, n)^m \left| d\, D_{k,o}(z)/dz \right| \tag{34}$$

$$\left| D_{k,1}(z) \right| \leq Y + P\, n\, d \left| D_{k,o}(z)/dz \right|,$$

$$\left| D_{k,m}(z) \right| \leq Y + P\, n \left[B\left[1 - (\Gamma P\, n^2 + \sqrt{P}\, n)^{m-1}\right] / \left[1 - (\Gamma P\, n^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{P}\, n)\right] + (\Gamma P\, n^2 + \sqrt{P}\, n)^{m-1} \left| dD_{k,o}(z)/dz \right|\right] \tag{35}$$

Jeżeli

$$\Gamma P\, n^2 + \sqrt{P}\, n < 1 \tag{36}$$

a to można osiągnąć przez odpowiedni dobór a t_1, szereg prawej strony jest zbieżny jednostajnie, więc ciąg iteracji jest również bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.
k jest indeksem kolejnej składowej badanego widma. Ponieważ ze względów fizykalnych każde widmo dyskretne posiada skończoną liczbę składowych, otrzymano w ten sposób oszacowanie dla dowolnej składowej, przepuszczonej przez wzmacniacz.

Nierówność (36) ma praktyczne zastosowanie. Jeżeli mianowicie podstawimy w niej $t = T$, gdzie T czas analizy, otrzymujemy oszacowanie na niezbędną szybkość analizy a.

10. Przekształcenie rozwiązania (26)

Rozwiązanie (26), w którym występuje macierzowa funkcja wykładnicza, wymaga pewnego przekształcenia, gdy chodzi o zastosowanie jego do praktycznych celów.

Można skorzystać z definicji macierzowej funkcji wykładniczej w postaci macierzowego szeregu potęgowego, zbudowanego podobnie jak w przypadku skalarnej funkcji wykładniczej. Daje to praktycznie wielomian macierzy $(\gamma_{i,k})$ o stopniu równym rzędowi macierzy i jej równania charakterystycznego (jak to wynika z twierdzenia Cayley'a Sylwestra). Postać ta nie jest wygodna do celów praktycznych.

Drugi sposób polega na zastąpieniu macierzowej funkcji wykładniczej wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Ponieważ to wymaga obliczenia wartości własnych macierzy czyli rozwiązania równania charakterystycznego,

$$\det\left[E\,s + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}(G)\right] = 0 \tag{37}$$

dlatego wygodniej jest rozwiązać równanie (18) lub (19) przy pomocy transformacji Laplace'a.

11. Rozwiązanie równania (19) przy pomocy transformacji Laplace'a

Wprowadzając podobne oznaczenia, jak poprzednio, można napisać następującą transformatę rozwiązania równania (19)

$$D_k(s) = \left\{s\,E + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}(G)\right\}^{-1}\left\langle\left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}((k\omega)G_k/s + D_k(0)) - I\left\{(z-1)(A^2)d\,D_k(z)/dz\right\}\right\rangle \tag{38}$$

Jeżeli zastosujemy twierdzenie o splocie funkcji, możemy napisać funkcję czasową w następującej postaci

$$D_k(t) = L^{-1}\left\langle\left\{s\,E + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}(G)\right\}^{-1}\left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}((k\omega)\cdot G_k/s + D_k(0)) - \int_0^t L^{-1}\left\{s\,E + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}(G)\right]^{-1}\Big|_{t-\tau}\cdot \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}(z(\tau)-1)(A^2)dD_k(z(\tau)))dz\,d\tau\right. \tag{39}$$

Jest to równanie całkowe. Można je rozwiązać metodą iteracji w następującej postaci:

$$D_k(t) = D_{k,o}(t) + D_{k,1}(t) + \dots \tag{40}$$

$$D_{k,o}(t) = L^{-1} \left\langle \left\{ s\,E + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} (G) \right\}^{-1} \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left((k\omega)\, G_k/s + D_k(0)\right) \right\rangle \tag{41}$$

$$D_{k,m}(t) = -\int_0^t L^{-1} \left\{ s\,E + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} (G) \right\}^{-1} \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot\, (z(\tau)-1)(A^2)\, d\, D_{k,m-1}(z(\tau))/dz \;\; d\tau \tag{42}$$

dla $m = 1, 2, \dots$

Obliczenie pierwszej odwrotnej transformaty pod znakiem całki wymaga rozwiązania równania charakterystycznego (37). Ponieważ z postaci tego równania nie jest widoczne, jakie są wartości charakterystyczne macierzy, można tu wykorzystać fakt, że w punkcie 9 udowodniliśmy ograniczoność rozwiązań przy pomocy macierzowej funkcji wykładniczej. Ponieważ problem, jak to się udowadnia w teorii równań różniczkowych, posiada jednoznaczne rozwiązanie, więc to rozwiązanie jako ograniczone jest stateczne. Stąd wynika, że wartości charakterystyczne macierzy są albo rzeczywiste ujemne albo zespolone o części rzeczywistej ujemnej.

Zbieżność metody iteracyjnej (40) do (42) można udowodnić podobnie jak w punkcie 9, wykazując istnienie zbieżnej majoranty rozwiązania.

12. Interpretacja fizykalna rozwiązania

Funkcja czasowa, odpowiadająca macierzy $\left\{sE + \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1}(G)\right\}^{-1}$ daje się napisać w przypadku pojedynczych wartości własnych macierzy, co dla prostoty zakładamy (uogólnienie na przypadek wartości wielokrotnych nie przedstawia większej trudności), w następującej postaci

$$\sum_{k=1}^{n} H_k \, e^{s_k t}, \tag{43}$$

gdzie: H_k macierze współczynników wyliczanych przy pomocy teoremu Heaviside'a.

Wyrażenie zerowego przybliżenia składa się z dwu części: stałej H_0, odpowiadającej wartości własnej $s = 0$ oraz z części

$$\sum_{k=1}^{n} H'_k \, e^{s_k t} \tag{44}$$

przy czym przecinek oznacza, że macierze współczynników są w tym przypadku różne od (43) ze względu na występowanie w liczniku transformaty pewnego wyrażenia częściowo zależnego od s. Fizykalnie przybliżenie to przedstawia stan nieustalony powstały przy załączeniu filtra i bez zmiany częstości filtra. Wyraz stały H_0 przedstawia stan ustalony w analogicznym przypadku. Przejście do przypadku stałej częstości wymaga ściśle rzecz biorąc zmiany elementów macierzy (i ich oznaczeń) przez przejście do granicy $z = 1$. W metodzie statycznej dochodzi do głosu tylko wyrażenie H_0, które jako stałe nie powoduje żadnych zniekształceń w analizie widma. Efekt liniowej zmiany częstości filtra wyraża się poza wpływem na poprzednio omówione dwa wyrażenia, głównie w wyrażeniu $D_{k,1}(t) + D_{k,2}(t) + \ldots$, przy czym

$$D_{k,m}(t) = -\int_0^t \sum_{k=1}^{n} H_k \, e^{s_k(t-\tau)} \left[(A^1)+(A^2)\right]^{-1} \cdot a\tau \cdot (A^2) \cdot$$
$$\cdot \left[dD_{k,m-1}(z(\tau))/dz\right] d\tau \tag{45}$$

W obu wyrażeniach decydujących o stanie nieustalonym (43) i (44) występują funkcje wykładnicze o wykładnikach s_k, będących pierwiastkami równania (37). Wyznaczenie liczb s_k wymaga rozwiązania równania (37) oraz przedyskutowania własności tych rozwiązań. W liczbach ogólnych analiza ta nie daje się przeprowadzić ze względu na złożoność zagadnienia. Można jedynie

określić pewne parametry decydujące o małych stanach przejściowych. Możemy mianowicie podać następujące oszacowanie

$$\sum_{k=1}^{n} |H_k| \, e^{s_k t} \leq n \cdot H \, e^{-\mathrm{Re}\, s_m t}$$
$$\sum_{k=1}^{n} |H_k| \, e^{s_k t} \leq n \cdot H \, e^{-\mathrm{Re}\, s_m t} \tag{46}$$

gdzie: H (H') największy z modułów H_k (H'_k), zaś $\mathrm{Re}\, s_m$ najmniejsza bezwzględnie część rzeczywista pierwiastka równania (37). W podręcznikach algebry [5] podaje się metody oszacowania granic, między którymi mieszczą się pierwiastki równania algebraicznego

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \; a_0 > 0 \tag{47}$$

o współczynnikach rzeczywistych i zespolonych w postaci

$$K = 1 + A/|a_0| \tag{48}$$

gdzie: K oznacza górną granicę dodatnich pierwiastków rzeczywistych (modułów pierwiastków zespolonych)

$$A = \max\left(|a_1|, \ldots, |a_n|\right) \tag{49}$$

Przejście do zmiennej

$$y = 1/x \tag{50}$$

pozwala określić dolną granicę, przejścia do

$$z = -x \tag{51}$$

pozwala określić w podobny sposób granice dla pierwiastków rzeczywistych ujemnych.

Szczegółowe przeprowadzenie powyższych obliczeń wymaga wyznaczenia współczynników równania co jest zagadnieniem dosyć skomplikowanym w liczbach ogólnych. Można by również zagadnienie przedyskutować rozwiązując równanie charakterystyczne dla

szeregu zespołów wartości parametrów i obierając rozwiązanie optymalne. Oba zagadnienia mogą być rozwiązane jedynie przy pomocy maszyny matematycznej.

Z przeprowadzonej dyskusji wynika, że przy projektowaniu analizatora należy wziąć pod uwagę następujące parametry: H, H′ oraz Re s_m. H.H′ powinny być możliwie jak najmniejsze, Re s_m możliwie bezwzględnie największe. Do powyższych warunków dochodzi warunek określający szybkość analizy a (35).

W każdym konkretnym przypadku, w którym wielkości te są pewnymi liczbami, określonymi parametrami układu, i dającymi się wyznaczyć metodami przybliżonymi. Liczby te mogą służyć jako wytyczne dla konstruktora.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 10.I.1967 r.

LITERATURA

[1] Asiejew B.P.: Osnowy radiotiechniki, Swiaz izdat, M.1947.

[2] Bosyj N.D.: Elektriczeskije filtry, Gos. Tech. Izd., Kijew 1957.

[3] Laning H.H., Battin R.H.: Random processes in automatic control, Mc Graw Hill N. York 1956.

[4] Łapiński M.: Urządzenia pomiarowe teleelektryki, Wyd. Kom. W-wa 1958.

[5] Okuniew L.Ja.: Wyzszaja ałgebra, Gos. Izd. T.T. Lit., M. 1949.

РАССМАТРИВАНИЕ РАБОТЫ АНАЛИЗАТОРА С СЕЛЕКТИВНЫМ УСИЛИТЕЛЕМ

Р е з ю м е

В статье рассматривается работа анализатора частоты с селективным усилителем для измерений акустического спектра, в виде ряда Фурье. Имеются два способа измерения:

1. Статический с ручным управлением и
2. Динамический, когда управляемый элемент устанавливается автоматически. Он работает в неустановившемся состоянии и это влияет на работу анализатора.

Для сравнения решены уравнения анализатора в этих случаях и некоторые данные, полезные для конструкции анализатора, полученные из этого сравнения.

DISCUSSION OF THE ANALYSER'S OPERATION WITH A SELECTIVE AMPLIFIER OF THE T BRIDGE TYPE

S u m m a r y

In the paper is the operation of frequency analyser with a selective amplifier adapted for acoustic spectrum measurements, representable by Fourier series discussed. There exist two measurement methods:

1. the static one with manual setting and
2. the dynamic one, when the controlled element is set automatically for continuous working. It works with the non steady state and this finds its expression in the analyser's working.

For discussion of this effect were equations of the problem solved and from the comparison of them some conclusions concerning the analyser's construction have been drawn.