ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

RYSZARD BARTŁOMIEJCZYK, STANISŁAW ŁANOWY
Katedra Matematyki A

OSZACOWANIE BŁĘDU W UOGÓLNIONEJ METODZIE NEWTONA ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ

Streszczenie. Celem niniejszej pracy jest podanie pewnych oszacowań błędu dla uogólnionej metody Newtona przybliżonego rozwiązywania równań. Wykazano, że wzory otrzymane w [3] można uzyskać przez zastosowanie metody Newtona do równania $f(x) = 0$ pomnożonego przez pewną funkcję, która jest stałego znaku w przedziale występowania pierwiastka równania. Na tej podstawie podano geometryczną interpretację rozważanych wzorów oraz rozpatrzono poszczególne przypadki praktycznego stosowania uogólnionej metody Newtona.

1. Zakładamy, że $f(x)$ jest funkcją klasy $C^{(n+1)}$ w przedziale $\langle a, b\rangle$ i $f'(x)$ jest stałego znaku w tym przedziale oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Wówczas równanie

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = \xi$ należące do przedziału $\langle a, b\rangle$.

W monografii [3] podano wzór

$$x^* = x - \frac{f(x)\begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!}f'' & f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)} & \frac{}{(n-2)!}f^{(n-2)} & \dots & f' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!}f'' & f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!}f^{(n)} & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)} & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)} & \dots & f' \end{vmatrix}}, \tag{2}$$

który jest uogólnieniem znanej metody Newtona przybliżonego rozwiązywania równań.

Wzór (2) został podany przez Hadamarda w pracy [2], jego dowód wynika z twierdzenia Königa [1] w teorii funkcji analitycznych.

Wyłączając z wyznaczników we wzorze (2) z każdego wiersza i każdej kolumny stałe czynniki (z i - tego wiersza $\frac{1}{i!}$, z k-tej kolumny (k-1)!) doprowadzamy wzór (2) do postaci

$$x^* = x - \frac{n\, f(x)\, u_n(x)}{u_{n+1}(x)}, \tag{3}$$

gdzie: $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = f'(x)$,

$$u_{k+1}(x) = \begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1}f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2}f^{(k-3)} & \dots & f \\ f^{(k)} & \binom{k}{1}f^{(k-1)} & \binom{k}{2}f^{(k-2)} & \dots & k\,f' \end{vmatrix} \tag{4}$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Wykażemy teraz 3 lematy i twierdzenie potrzebne do oszacowania błędu dla uogólnionej metody Newtona.

Lemat 1. Dla naturalnych $k \geqslant 2$ i r zachodzi równość

$$(r+1)\begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1} f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2} f^{(k-3)} & \dots & f \\ f^{(r)} & \binom{r}{1} f^{(r-1)} & \binom{r}{2} f^{(r-2)} & \dots & \binom{r}{k-1} f^{(r-k+1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2f' & f & 0 & \dots & 0 \\ 3f'' & 3f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kf^{(k-1)} & \binom{k}{2} f^{(k-2)} & \binom{k}{3} f^{(k-3)} & \dots & f \\ \binom{r+1}{1} f^{(r)} & \binom{r+1}{2} f^{(r-1)} & \binom{r+1}{3} f^{(r-2)} & \dots & \binom{r+1}{k} f^{(r-k+1)} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Dla $k = 2$ i dowolnej liczby naturalnej r równość (5) jest oczywista.

Rozwijając wyznacznik występujący po lewej stronie według ostatniej kolumny i stosując do otrzymanych podwyznaczników założenie indukcyjne otrzymujemy

$$(r+1)\binom{r}{k-1} f^{(r-k+1)} \begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1} f^{(k-2)} & \dots & \binom{k-1}{k-2} f' \end{vmatrix} -$$

$$-(r+1).f\begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(r)} & \binom{r}{1}f^{(r-1)} & \dots & \binom{r}{k-2}f^{(r-k+2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r+1}{k}\binom{r}{k-1}f^{(r-k+1)}\begin{vmatrix} 2f' & f & \dots & 0 \\ 3f'' & 3f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kf^{(k-1)} & \binom{k}{2}f^{(k-2)} & \dots & \binom{k}{k-1}f' \end{vmatrix} -$$

$$-f\begin{vmatrix} 2f' & f & \dots & 0 \\ 3f'' & 3f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{r+1}{1}f^{(r)} & \binom{r+1}{2}f^{(r-1)} & \dots & \binom{r+1}{k-1}f^{(r-k+2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2f' & f & 0 & \dots & 0 \\ 3f'' & 3f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kf^{(k-1)} & \binom{k}{2}f^{(k-2)} & \binom{k}{3}f^{(k-3)} & \dots & f \\ \binom{r+1}{1}f^{(r)} & \binom{r+1}{2}f^{(r-1)} & \binom{r+1}{3}f^{(r-2)} & \dots & \binom{r+1}{k}f^{(r-k+1)} \end{vmatrix}$$

Lemat 2. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j = 1, 2, \ldots, k}$ będzie dowolnym wyznacznikiem k-tego stopnia. Jeżeli $A_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ oznacza wyznacznik, który został utworzony z wyznacznika A przez zastąpienie elementów w i - tym wierszu elementami

$$0, a_{i,1}, \ldots, a_{i,k-1}, \text{ to}$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k = 0.$$

Dowód indukcyjny. Niech $A_{ij} (i,j = 1,2,\ldots,k)$ oznacza dopełnienie j - tego elementu k - tej kolumny w wyznaczniku A_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Rozwijając wyznacznik A_i według k - tej kolumny otrzymujemy

$$A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} a_{jk} A_{ij} + a_{i,k-1} A_{ii}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Stąd

$$\sum_{i=1} A_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} a_{jk} A_{ij} + a_{i,k-1} A_{ii} \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(a_{jk} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} A_{ij} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} a_{i,k-1} A_{ii}.$$

Na podstawie założenia indukcyjnego mamy $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} A_{ij} = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$, zatem

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} a_{i,k-1} A_{ii} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k-1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k-1} & a_{k,k-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Lemat 3.

$$u'_{k+1}(x) = \begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1}f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2}f^{(k-3)} & \dots & f \\ f^{(k+1)} & \binom{k+1}{1}f^{(k)} & \binom{k+1}{2}f^{(k-1)} & \dots & \binom{k+1}{k-1}f'' \end{vmatrix}$$

dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Dowód. Wyznacznik $u_{k+1}(x)$ (wzór (4)) różniczkujemy według wierszy. Odejmując w $k-1$ pierwszych wyznacznikach od i-tego wiersza otrzymanego z różniczkowania $i+1$-szy wiersz i stosując lemat 2 otrzymujemy

$$-\begin{vmatrix} 0 & f' & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1}f^{(k-2)} & \dots & f \\ f^{(k)} & kf^{(k-1)} & \dots & kf' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ 0 & f'' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1}f^{(k-2)} & \dots & f \\ f^{(k)} & kf^{(k-1)} & \dots & kf' \end{vmatrix} -$$

$$\dots - \begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f^{(k-1)} & \dots & \binom{k-1}{k-2}f' \\ f^{(k)} & kf^{(k-1)} & \dots & kf' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1}f^{(k-2)} & \dots & f \\ f^{(k+1)} & kf^{(k)} & \dots & kf'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1} f^{(k-2)} & \dots & f \\ 0 & f^{(k)} & \dots & \binom{k}{k-2} f'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f' & f & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & \binom{k-1}{1} f^{(k-2)} & \dots & f \\ f^{(k+1)} & kf^{(k)} & \dots & kf'' \end{vmatrix}$$

Stąd już wynika łatwo lemat 3.

<u>Twierdzenie.</u> Dla $k = 1, 2, \dots, n$ zachodzi tożsamość

$$k\, u_k(x)\, u'_{k+1}(x) - (k+1)\, u'_k(x)\, u_{k+1}(x) = \left[f(x)\right]^{k-1} W_k(x), \quad (6)$$

gdzie:

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ f''' & 3f'' & 3f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)} & kf^{(k-1)} & \binom{k}{2} f^{(k-2)} & \dots & \binom{k}{k-1} f' \\ f^{(k+1)} & \binom{k+1}{1} f^{(k)} & \binom{k+1}{2} f^{(k-1)} & \dots & \binom{k+1}{k-1} f'' \end{vmatrix}$$

Dowód. Przekształcając lewą stronę tożsamości (6) i stosując lemat 3 otrzymujemy

$$k\, u_k(x)\, u'_{k+1}(x) - (k+1) u'_k(x) u_{k+1}(x) =$$

$$= k u_k(x) \begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & (k-1)\, f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2} f^{(k-3)} & \dots & f \\ f^{(k+1)} & (k+1)\, f^{(k)} & \binom{k+1}{2} f^{(k-1)} & \dots & \binom{k+1}{k-1} f'' \end{vmatrix} -$$

$$-(k+1)u_k'(x)\begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & (k-1)f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2}f^{(k-3)} & \dots & f \\ f^{(k)} & kf^{(k-1)} & \binom{k}{2}f^{(k-2)} & \dots & kf' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} f' & f & 0 & \dots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k-1)} & (k-1)f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2}f^{(k-3)} & \dots & f \\ v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_{k-1} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

gdzie:

$$v_i = \binom{k+1}{i}f^{(k-i+1)}\, k\, u_k - \binom{k}{i}f^{(k-i)}(k+1)u_k'$$

dla $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Ostatnią równość na podstawie lematów 1 i 3 można zapisać w postaci

$$v_i = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 0 & 2f' & f & \dots & 0 \\ 0 & 3f'' & 3f' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{k}{i}f^{(k-i)} & kf^{(k-1)} & \binom{k}{2}f^{(k-2)} & \dots & \binom{k}{k-1}f' \\ \binom{k+1}{i}f^{(k-i+1)} & (k+1)f^{(k)} & \binom{k+1}{2}f^{(k-1)} & \dots & \binom{k+1}{k-1}f'' \end{vmatrix} \quad (8)$$

dla $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Oznaczamy przez $\Delta_j (j = 1, 2, \ldots, k-2)$ dopełnienia algebraiczne kolejnych zer występujących w pierwszej kolumnie wyznacznika (8). Dodając do k-tego wiersza wyznacznika (7) kombinację liniową k-2 środkowych wierszy o współczynnikach $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{k-2}$ otrzymamy w ostatnim wierszu elementy $w_{k,o}, w_{k,1}, \ldots, w_{k,k-1}$, które można napisać w postaci:

$$w_{ki} = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \binom{2}{i} f^{(2-i)} & 2f' & f & \ldots & 0 \\ \binom{3}{i} f^{(3-i)} & 3f'' & 3f' & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{k}{i} f^{(k-i)} & kf^{(k-1)} & \binom{k}{2} f^{(k-2)} & \ldots & \binom{k}{k-1} f' \\ \binom{k+1}{i} f^{(k-i+1)} & (k+1) f^{(k)} & \binom{k+1}{2} f^{(k-1)} & \ldots & \binom{k+1}{k-1} f'' \end{vmatrix}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, k-1$, gdzie $\binom{s}{i} f^{(s-i)} = 0$ dla $s-i < 0$.

Łatwo zauważyć, że $w_{ki} = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Wobec tego

$$k\, u_k(x) u'_{k+1}(x) - (k+1) u'_k(x) u_{k+1}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} f' & f & 0 & \ldots & 0 \\ f'' & 2f' & f & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^{(k-1)} & (k-1) f^{(k-2)} & \binom{k-1}{2} f^{(k-3)} & \ldots & f \\ w_{k,o} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = [f(x)]^{k-1} \cdot (-1)^{k+1} \cdot w_{k,o}(x).$$

Ponieważ $(-1)^{k+1} w_{k,o}(x) = W_k(x)$, więc z ostatniej równości otrzymujemy (6).

3. Niech x^* będzie wartością przybliżoną nieznanego pierwiastka ξ równania (1).
Ponieważ $f(\xi) = 0$, więc na podstawie (3)

$$x^* - \xi = \left(x - \frac{n\, f(x)\, u_n(x)}{u_{n+1}(x)}\right) - \left(\xi - \frac{n\, f(\xi)\, u_n(\xi)}{u_{n+1}(\xi)}\right).$$

W myśl twierdzenia o wartości średniej mamy

$$x^* - \xi = \frac{f(\eta)\left[n\, u_n(\eta)\, u'_{n+1}(\eta) - (n+1)\, u'_n(\eta)\, u_{n+1}(\eta)\right]}{u^2_{n+1}(\eta)}(x - \xi),$$

gdzie: $\eta = \xi + \theta(x - \xi)$, $\quad 0 < \theta < 1$.
Stąd, wobec (6)

$$x^* - \xi = \frac{\left[f(\eta)\right]^n W_n(\eta)}{u^2_{n+1}(\eta)}(x - \xi). \tag{9}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$m = \min_{a \le x \le b} |f'(x)|, \qquad M = \max_{a \le x \le b} |f'(x)|,$$
$$M_n = \max_{a \le x \le b} |W_n(x)|, \qquad m_n = \min_{a \le x \le b} |u_{n+1}(x)| \tag{10}$$

z równości (9) otrzymamy oszacowanie

$$|x^* - \xi| \le \frac{\left[f(\eta)\right]^n M_n}{m_n^2}\, |x - \xi|. \tag{11}$$

Nadto

$$f(x) - f(\xi) = f'(\mu)(x - \xi) \quad (\xi < \mu < x \quad \text{lub} \quad x < \mu < \xi)$$

więc

$$|x - \xi| \le \frac{|f(x)|}{m} \tag{12}$$

lub

$$|f(x)| \leq M|x - \xi|. \tag{13}$$

Po podstawieniu (13) do (11) otrzymujemy oszacowanie

$$|x^* - \xi| \leq \frac{M^n \cdot M_n}{m_n^2} |x - \xi|^{n+1}. \tag{14}$$

4. Przyjmijmy

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt[n]{u_n(x)}} \tag{15}$$

nadto załóżmy, że $u_n(x)$ i $u_{n+1}(x)$ są stałego znaku w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Jeżeli n jest parzyste i $u_n(x) < o$, to w (1) i (3) za $f(x)$ przyjmujemy funkcję $-f(x)$, wtedy na podstawie (4) $u_n(x)$ zmieni znak na przeciwny.

Równanie

$$F(x) = 0 \tag{16}$$

posiada ten sam pierwiastek $x = \xi$ co równanie (1) w przedziale $\langle a, b\rangle$. Obliczając pochodne:

$$F'(x) = \frac{u_{n+1}(x)}{n\, u_n(x) \sqrt[n]{u_n(x)}},$$

$$F''(x) = \frac{n\, u_n(x) u'_{n+1}(x) - (n+1) u'_n(x) u_{n+1}(x)}{n^2\, u_n^2(x) \sqrt[n]{u_n(x)}}, \tag{17}$$

i stosując wzór Newtona do równania (16) otrzymujemy

$$x^* = x - \frac{n\, f(x)\, u_n(x)}{u_{n+1}(x)}, \tag{18}$$

gdzie: x jest początkowym przybliżeniem, a x^* następnym przybliżeniem pierwiastka ξ.

W związku z tym rozpatrzymy geometryczną interpretację wzoru (2) (lub (3)).

Z wzorów (6), (15) i (17) otrzymujemy

$$F''(x) = \frac{[f(x)]^{n-1}\, W_n(x)}{n^2\, u_n^2(x)\, \sqrt[n]{u_n(x)}} = \frac{[f(x)]^{n-2}\, F(x) \cdot W_n(x)}{n^2\, u_n^2(x)} \tag{19}$$

Jeżeli n jest liczbą parzystą i $W_n(x) \neq 0$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, to z (19) wynika, że funkcja $F(x)$ posiada punkt przegięcia dla $x = \xi$.

A_1. Liczba n jest parzysta, a funkcja $W_n(x) > 0$ w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Z (19) wynika, że w tym przypadku $F(x) \cdot F''(x) \geqslant 0$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, a więc funkcja $F(x)$ jest wypukła poniżej osi Ox, a wklęsła powyżej osi Ox (rys. 1).

Stosując wzór (18) do równania (16) przyjmujemy $x = \frac{a+b}{2}$. Łatwo zauważyć, że jeżeli $x^* < \frac{a+b}{2}$, to $a < \xi < x^*$, jeżeli natomiast $x^* > \frac{a+b}{2}$, to $x^* < \xi < b$, (jeśli $x^* = \frac{a+b}{2}$, to oczywiście $\xi = \frac{a+b}{2}$).

Podane postępowanie można stosować wielokrotnie. Długość przedziału, w którym występuje pierwiastek $x = \xi$ pozwala wnioskować bezpośrednio o dokładności osiągniętego przybliżenia.

W przypadku tym można również kolejno stosować wzór (18), biorąc za początkowe przybliżenie liczby ξ dowolny punkt x_0 z przedziału $\langle a, b\rangle$. Otrzymujemy wtedy

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < \xi$$

lub

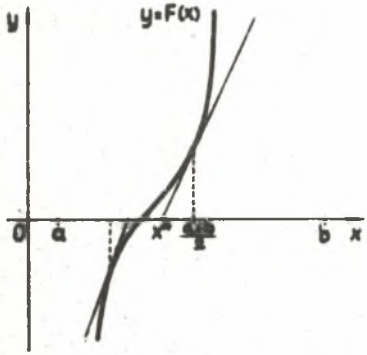
$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_i > x_{i+1} > \dots > \xi,$$

gdzie:

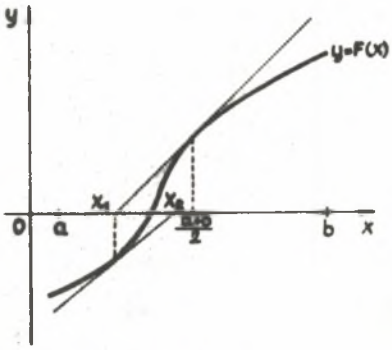
$$x_{i+1} = x_i - \frac{n\, f(x_i)\, u_n(x_i)}{u_{n+1}(x_i)} \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Z metody Newtona wynika, że $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \xi$.

Kolejne przybliżenia zaokrąglamy zawsze w stronę pierwiastka, gdy któreś z przybliżeń przekroczy pierwiastek, to łatwo zauważyć, że następne przybliżenie zbliży się do pierwiastka z drugiej strony.



Rys. 1



Rys, 2

A_2. Liczba n jest parzysta, a funkcja $W_n(x) < 0$ w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Z (19) wynika, że w tym przypadku $F(x) \cdot F''(x) \leq 0$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, a więc funkcja $F(x)$ jest wklęsła poniżej osi Ox, a wypukła powyżej osi Ox (rys. 2).

Przyjmując $x_0 = \frac{a+b}{2}$ i stosując dwukrotnie wzór (20), zauważamy, że jeżeli $x_1 \in \langle a, b\rangle$, to pierwiastek $x = \xi$ równania (16) leży w przedziale $x_1 < \xi < \min(x_2, \frac{a+b}{2})$ lub w przedziale $\max(x_2, \frac{a+b}{2}) < \xi < x_1$.

Jeśli $x_1 < a$, to przyjmujemy we wzorze (20) $x_0 = a$ i obliczamy następne przybliżenie x_1', wtedy $a < \xi < \min(x_1', \frac{a+b}{2})$. Podobnie postępujemy, gdy $x_1 > b$.

Postępowanie to prowadzi zawsze do zmniejszenia długości przedziału, w którym występuje pierwiastek przynajmniej o połowę[x)].

B. Liczba n jest nieparzysta, a funkcja $W_n(x) \neq 0$ w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Z (19) wynika, że funkcja $F(x)$ jest wypukła lub wklęsła w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ ($F''(x) \leq 0$ lub $F''(x) \geq 0$).

W przypadku tym stosujemy wzór (20) przyjmując $x_0 = a$, jeżeli $f(a) \cdot W_n(a) > 0$ lub $x_0 = b$, jeżeli $f(b) \cdot W_n(b) > 0$. Z metody Newtona wynika, że otrzymany ciąg przybliżeń $\{x_i\}$ jest monotonicznie zbieżny do liczby ξ.

Różnicę $|x_i - \xi|$ szacujemy na podstawie wzoru (11) lub (14).

5. Z (4) i (6) otrzymujemy

$$u_2(x) = f'(x), \quad u_3(x) = 2\left[f'(x)\right]^2 - f(x) \cdot f''(x),$$

$$W_2(x) = 3\left[f''(x)\right]^2 - 2\, f'(x) f'''(x).$$

Dla $n = 2$ wzór (20) ma więc postać

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2\, f(x_i) \cdot f'(x_i)}{2\left[f'(x_i)\right]^2 - f(x_i)\, f''(x_i)} \tag{21}$$

dla $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Przykład. Stosując wzór (21) obliczymy pierwiastek równania

$$f(x) = x \log x - 1 = 0 \tag{22}$$

z dokładnością do 10^{-7}.

Mamy

$$f'(x) = \log x + \log e, \quad f''(x) = \frac{\log e}{x}, \quad f'''(x) = -\frac{\log e}{x^2}.$$

---

x) Ze wzorów (11), (14) wynika, że zmniejszenie tylko o połowę przedziału, w którym występuje pierwiastek może nastąpić co najwyżej w przypadku, gdy przedział ten jest dość duży.

Stąd

$$u_2(x) = \log x + \log e, \quad u_3(x) = 2 \log^2 x + 3 \log e \log x + 2 \log^2 e + \frac{\log e}{x},$$

$$W_2(x) = \frac{\log e(2 \log x + 5 \log e)}{x^2}.$$

Wobec $f(2) = -0{,}39 \ldots < 0$, $f(3) = 0{,}43 \ldots > 0$. a $f'(x) > 0$ w przedziale $\langle 2, 3\rangle$, równanie (22) posiada w tym przedziale dokładnie jeden pierwiastek.
$W_2(x) > 0$ w przedziale $\langle 2, 3\rangle$, więc mamy przypadek A_1.
Wobec (10) łatwo otrzymujemy

$$m = 0{,}7, \; M = 1, \; m_2 = 1, \; M_2 = 0{,}34.$$

Biorąc $x_0 = 2{,}5$ mamy

$$f(2{,}5) = -0{,}00514998,$$

stąd na podstawie (12)

$$|x_0 - \xi| = |2{,}5 - \xi| < \frac{0{,}00514998}{0{,}7} < 0{,}008.$$

Z (11) otrzymujemy

$$|x_1 - \xi| < \frac{0{,}0052^2 \cdot 0{,}34}{1^2} \cdot 0{,}008 < 0{,}\ 00\ 000\ 008.$$

Ponieważ

$$\log 2{,}5 = 0{,}39\ 794\ 001, \quad \log e = 0{,}43\ 429\ 448,$$
$$u_2(2{,}5) = 0{,}83\ 223\ 449, \quad u_3(2{,}5) = 1{,}38\ 612\ 314,$$

więc

$$x_1 = 2{,}5 + \frac{0{,}00\ 857\ 198}{1{,}38\ 612\ 314} = 2{,}50\ 618\ 414.$$

Stąd

$$2{,}50\ 618\ 414 < \xi < 2{,}50\ 618\ 422,$$

a więc

$$\xi = 2{,}50\ 618\ 418 \pm 0{,}00\ 000\ 004$$

Wpłynęło do Redakcji 17.IV.1967 r.

LITERATURA

[1] König J.: Über eine Eigenschaft der Potenzreihen, Math. Ann., 23 (1884) str. 447-449.

[2] Hadamard J.: Essai sur l'étude des fonctions données par leur dereloppement de Taylor, J. Math. (4), 8, (1892) str. 101-186.

[3] Hauseholder A.S.: Principles of numerical analysis, New York, Toronto - London, 1953.

[4] Encyklopedia elementarnej matematyki, Algebra II, Moskwa--Leningrad, 1951, str. 363,

ОЦЕНКА ОШИБКИ В ОБОБЩАЮЩЕМ МЕТОДЕ НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В работе представлены некоторые оценки ошибки (неравенства (11) и (14)) в обобщающем методе Ньютона, который определяют формулы (3) и (4). Эти формулы можно получить путём применения метода Ньютона к уравнении

$$\frac{f(x)}{\sqrt[n]{u_n(x)}} = 0.$$

Дана геометрическая интерпретация рассуждаемых формул.

ESTIMATION OF AN ERROR IN GENERALIZED NEWTON'S METHOD OF EQUATION SOLVING

S u m m a r y

In the work some estimation of an error (inequalities (11) and (14)) was given. These formulas can be obtained by the use of Newton's method in the equation

$$\frac{f(x)}{\sqrt[n]{u_n(x)}} = 0.$$

Geometrical explanation of the given formulas was introduced.