ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

STEFAN SEDLAK
Katedra Matematyki D

PEWNE TWIERDZENIE Z TEORII MACIERZY

W tej notce zostało sformułowane i udowodnione twierdzenie z teorii macierzy, posiadające zastosowanie w teorii obiektów geometrycznych.

<u>Twierdzenie</u>: Jeżeli w macierzy prostokątnej o wymiarach $(m+1) \times n$ i $m > n$, rzędu n:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & \ldots\ldots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & \ldots\ldots & a_n^1 \\ \hdashline \hdashline a_1^n & a_2^n & \ldots\ldots & a_n^n \\ \hdashline \hdashline a_1^m & a_2^m & \ldots\ldots & a_n^m \end{bmatrix}$$

podmacierz kwadratowa stopnia n (bez szkody dla ogólności):

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots\ldots & a_n^1 \\ \hdashline a_1^n & a_2^n & \ldots\ldots & a_n^n \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa:

$$\det \mathcal{T} \neq 0 \tag{1}$$

oraz, jeżeli każda podmacierz otrzymana z podmacierzy $\mathcal{T}$ przez zastąpienie i-tego jej wiersza $(i=1,2,\ldots n)$ przez wiersz o numerze 0 macierzy A – oznaczmy ją $\overset{i/o}{\mathcal{T}}$ – jest osobliwa:

$$\bigwedge_{i|_1^n} \det \overset{i/0}{\mathcal{A}} = \bigwedge_{i|_1^n} \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots\ldots & a_n^1 \\ = = = & = = = & = = = & = = = \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \ldots\ldots & a_n^{i-1} \\ a_1^0 & a_2^0 & \ldots\ldots & a_n^0 \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \ldots\ldots & a_n^{i+1} \\ = = = & = = = & = = = & = = = \\ a_1^n & a_2^n & \ldots\ldots & a_n^n \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

to wszystkie elementy wiersza o numerze 0, muszą znikać:

$$\bigwedge_{k|_1^n} a_k^0 = 0. \quad (3)$$

Dowód: Z zanegowania tezy, w sposób równoważny otrzymujemy istnienie przynajmniej jednego nie zerującego się elementu wiersza o numerze 0 macierzy A:

$$\Big(\bigwedge_{k|_1^n} a_k^0 = 0\Big)' \Longleftrightarrow \bigvee_{k \in [1,n]^{x)}} a_k \neq 0 \Longleftrightarrow \sum_{k/1}^{n} (a_k^0)^2 > 0 \quad (4)$$

Bez szkody dla ogólności, tym elementem niech będzie (przynajmniej):

$$a_1^0 \neq 0 \quad (5)$$

Dalej:

$$(2) \longrightarrow \det \overset{n/0}{\mathcal{A}} = 0, \quad (6)$$

$$(4)\ (5)\ (6) \longrightarrow \bigvee_{\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1} \in R} \ \bigwedge_{k \in [1,n]} a_k^0 = \lambda_\alpha a_k^\alpha \wedge \sum_{\alpha/1}^{n-1} (\lambda_\alpha)^2 > 0, \quad (7)^{xx)}$$

x) Symbol [1,n] oznacza zbiór liczb naturalnych od 1 do n, czyli tzw. segment całkowito-liczbowy.

xx) Konwencja Einsteina o sumowaniu stosowana jest tutaj tylko dla indeksów alfabetu greckiego.

$$(7)(2)\ i(i\neq n) \Longrightarrow \overset{i/o}{\mathscr{H}} \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ -- & -- & -- & -- \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \cdots\cdots & a_n^{i-1} \\ \lambda_\alpha a_1^\alpha & \lambda_\alpha a_2^\alpha & \cdots\cdots & \lambda_\alpha a_n^\alpha \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \cdots\cdots & a_n^{i+1} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_1^n & a_2^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{bmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Jeśli teraz elementy k-tego wiersza wyznacznika $\overset{i/o}{\pi}$ w zdaniu (8), dla k=1,...,i-1,i+1,...,n-1, pomnożymy przez $(-\lambda_k)$ i dodamy do równoimiennych elementów i-tego wiersza, to otrzymamy:

$$\bigwedge_{i|_1^{n-1}} \overset{i/o}{\mathscr{H}} = \bigwedge_{i|_1^{n-1}} \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ -- & -- & -- & -- \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \cdots\cdots & a_n^{i-1} \\ \lambda_i a_1^i & \lambda_i a_2^i & \cdots\cdots & \lambda_i a_n^i \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \cdots\cdots & a_n^{i+1} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_1^n & a_2^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{bmatrix} =$$

$$= \bigwedge_{i|_1^{n-1}} \lambda_i \cdot \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots\cdots & a_n^1 \\ -- & -- & -- & -- \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \cdots\cdots & a_n^{i-1} \\ a_1^i & a_2^{i+1} & \cdots\cdots & a_n \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \cdots\cdots & a_n^{i+1} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_1^n & a_2^n & \cdots\cdots & a_n^n \end{bmatrix} = \bigwedge_{i|_1^{n-1}} \lambda_i \pi = 0 \qquad (9)$$

$$(9)\ (1) \longrightarrow \bigwedge_{i|_1^{n-1}} \lambda_i = 0 \longrightarrow \sum_{i/1}^{n-1} (\lambda_i)^2 = 0, \qquad (10)$$

$$(10)\ (7) \longrightarrow (5)' \longrightarrow (3). \qquad \text{ond}$$

Wpłynęło do redakcji 18.IV.1967 r.

ОБ ОДНОМ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Р е з ю м е

В этом заметке мы сформулировали и доказали теорему теории матриц, которая применяется в теории геометрических обьектов.

ON CERTAIN THEOREM OF THE THEORY OF MATRICES

S u m m a r y

In this note has been formulated and proved a theorem of the theory of matrices, which is used in the theory of geometric objects.