ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

ALBIN MASZTALERZ
Katedra Matematyki B.

O PEWNYM ZAGADNIENIU ASYMPTOTYCZNYM DLA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO N-GO RZĘDU

Streszczenie. W pracy wykazano istnienie i jednoznaczność rozwiązania $y(x)$ równania różniczkowego (1) w przedziale $\langle 0,\infty)$ spełniającego warunki: $y(0) = y_0 > 0$, $y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0$, $(n \geq 2)$ i takiego, że $y(x) > 0$ dla $x \geq 0$ oraz $y(x) \to 0$ przy $x \to \infty$

1. Wstęp

Weźmy równanie

$$y^{(n)}(x) = f(x,y)).g(x), \quad n \geq 2 \tag{1}$$

Szukamy rozwiązania $y(x)$ spełniającego warunki

$$y(0) = y_0 > 0, \; y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \tag{2}$$

Podobne zagadnienie dla $n=2$ omówione jest w [1], a przy $n > 2$ i $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$ w [2] i [3]. Niech γ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i niech

$$y(0) = y_0 > 0, \; y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, y^{(n-1)}(0) = \gamma. \tag{2'}$$

Odnośnie równania (1) zakładamy, że

1° $f(x,y)$ jest funkcją rzeczywistą ciągła dla $x \geq 0, -\infty < y < \infty$
$g(x)$ jest funkcją ciągłą dla $x \geq 0$,

2° dla każdego zbioru $\langle 0, a\rangle \times (-\infty,\infty)$, $(a > 0)$ istnieje stała $M(a) > 0$ taka że $|f(x,y)| \leq M(a)$,

3° istnieje tylko jedno rozwiązanie równania (1) spełniające (2') w $\langle 0,\infty)$,

4° $f(x,y)$ jest funkcją rosnącą względem y, dla $x \geqslant 0, -\infty<y<\infty$ oraz $f(x,0) = 0$ dla $x \geqslant 0$,

5° $\bigwedge_{c>0} \bigvee_{\lambda_c} \left\{ \inf_{\langle 0,\infty)} f(x,c) = \lambda_c > 0 \right\}$,

6° $g(x) > 0$ dla $x \geqslant 0$, i jeżeli $F(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-2} g(t)dt$, to $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$

Założenia 1° do 6° są niezbędne do dowodu istnienia rozwiązania zadania (1) (2). Założenie 3° nie wynika z pozostałych jak wskazuje następujący przykład

$$y''(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & x > 0, \ |y| < 1 \\ 2 - \frac{1}{y}, & x > 0 \quad y > 1 \\ -2 - \frac{1}{y}, & x > 0, \quad y < -1 \end{cases}$$

Założenia 1°, 2°, 4°, 5° i 6° są spełnione. Natomiast przy $|y|<1$ przez punkt $(x_o,0)$, $x_o > 0$ przechodzą dwa różne rozwiązania

$$y_1(x) = \frac{1}{6\sqrt{6}}(x - x_o)^3 \quad \text{i} \quad y_2(x) = 0 \text{ i takie, że } y_1'(x_o) = y_2'(x_o) = 0.$$

<u>Twierdzenie 1</u>. Jeżeli spełnione są założenia 1° i 2°, to istnieje rozwiązanie $y(x)$ zadania (1) (2') określone w $\langle 0,\infty)$.

Dowód. Z założenia 1° prawa strona (1) jest ciągła w $\langle 0,\infty)$, więc z twierdzenia Cauchyego wynika istnienie przynajmniej jednego rozwiązania zadania (1) (2') w pewnym przedziale $\langle 0, \bar{x})$. Niech α będzie kresem górnym tych wartości $\bar{x}$ dla których istnieje rozwiązanie zadania (1) (2') w $\langle 0, \bar{x})$. Gdyby $\alpha < \infty$, to z założenia 2° na podstawie znanego twierdzenia (p. [1], t.II, str. 95) wynika, że istnieją lewostronne granice

$$\lim_{x\to\alpha-0} y(x) \ 6 \ y(\alpha - 0), \quad \lim_{x\to\alpha-0} y^{(k)}(x) = y^{(k)}(\alpha - 0), \quad k=1,2,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Dlatego rozwiązanie $y(x)$ zadania (1) (2') można dodatkowo określić dla $x = \alpha$, a liczby (3) przyjąć za nowe warunki początkowe dla równania (1), tzn. niech

$$y(\alpha - 0) = y(\alpha),\ y^{(k)}(\alpha - 0) = y^{(k)}(\alpha),\ k = 1,2,\dots,n-1 \qquad (2'')$$

i do równania (1) z warunkami (2'') ponownie stosować twierdzenie Cauchyego. Wtedy równanie (1) będzie posiadać rozwiązanie spełniające warunki (2') i określone w $\langle 0, \bar{\alpha})$, gdzie $\bar{\alpha} > \alpha$ co jest sprzeczne z określeniem liczby α, tzn. musi być $\alpha = \infty$ i twierdzenie jest udowodnione.

2. Istnienie rozwiązania zadania (1) (2)

Równanie (1) z warunkami (2') jest równoważne równaniu

$$y(x) = y_0 + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\gamma + \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-1} f(t,y(t))g(t)dt\right] \qquad (4)$$

stąd

$$y'(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\gamma + \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-2} f(t,y(t))g(t)dt\right] \qquad (5)$$

Rozwiązanie równania (1) spełniającego (2) można otrzymać z rozwiązania (1) spełniającego (2') o ile odpowiednio dobierze się liczbę γ. Niech $\gamma \geq 0$. Łatwo pokazać na podstawie założeń 1°, 4° i 6° w oparciu o wzory (4) i (5) i warunki (2'), że wtedy $y(x) \not\to 0$, przy $x \to \infty$. Dlatego rozwiązania zadania (1) (2) należy szukać przy $\gamma < 0$.

Załóżmy, że $\gamma < 0$ i oznaczmy rozwiązanie zadania (1) (2) przez $y(x,\gamma)$.

Niech $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Z założenia 6° wynika, że $G(x) > 0$ dla $x > 0$. Ponieważ dla $0 \leq t < x$ i $n \geq 2$ jest

$0 < \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-2} \leq 1$, to wobec 6° mamy dla $x > 0$ i $n \geq 2$:

$$\int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-2} g(t)\,dt \leq G(x) \qquad (6)$$

Lemat 1. Niech x_1 będzie ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią i niech

$$\gamma < -\frac{(n-1)!\cdot y_0}{x_1^{n-1}} - M(x_1)\cdot G(x_1) \tag{7}$$

Jeżeli spełnione są założenia 1^0, 2^0 i 4^0, to $y(x,\gamma)$ jest funkcją malejącą w $\langle 0,\infty)$ i zmieniającą znak w tym przedziale.

Dowód. Z (7) wynika, że $\gamma < 0$. Z (5), (6) i założenia 2^0 mamy w przedziale $(0, x_1\rangle$ dla $y'(x,\gamma)$ oszacowanie:

$$y'(x,\gamma) \leq \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\gamma + \int_0^x (1-\frac{t}{x})^{n-2}\left|f(t,y(t,\gamma))\right| g(t)dt\right] \leq$$

$$\leq \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\gamma + M(x_1)\int_0^x (1-\frac{t}{x})^{n-2} g(t)dt\right] \leq \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\gamma + M(x_1)G(x)\right] \tag{8}$$

Ponieważ z 6^0, $g(x) > 0$ dla $x \geq 0$, więc dla $0 < x \leq x_1$ mamy

$$G(x) \leq G(x_1) \tag{9}$$

Z (8) i (9) otrzymujemy

$$y'(x,\gamma) \leq \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\gamma + M(x_1)\, G(x_1)\right] \tag{10}$$

Z (7) i (10) mamy

$$y'(x,\gamma) < -\frac{(n-1)y_0}{x_1^{n-1}}\cdot x^{n-2} \quad \text{dla} \quad x \in (0,x_1\rangle \tag{11}$$

przy czym $y'(0,\gamma) = 0$ i $y(0,\gamma) = y_0 > 0$ na podstawie (2). (12)
Całkując (11) od 0 do $x \leq x_1$ otrzymujemy

$$y(x,\gamma) < y_0\left[1 - (\frac{x}{x_1})^{n-1}\right] \quad \text{dla } x \in (0, x_1\rangle \tag{13}$$

Dla $x = x_1$ z (13) mamy $y(x_1,\gamma) < 0$. (14)

Wykażę, że $y'(x,\gamma) < 0$ dla $x > x_1$ (15)

Przypuśćmy, że istnieje takie $\xi > x_1$ że $y'(\xi,\gamma) = 0$ (16)

i $y'(x,\gamma) < 0$ dla $x \in (x_1, \xi)$ (17)

Wobec (14) i (17) $y(x,\gamma) < 0$ dla $x \in \langle x_1, \xi\rangle$ (18)

Z (18) i założenia 4°, $f(x,y(x,\gamma)) < 0$ dla $x \in \langle x_1, \xi\rangle$ (19)

z (19) i 6°, $\int\limits_{x_1}^{\xi} (1 - \frac{t}{\xi})^{n-2} f(t,y(t,\gamma))g(t)dt < 0$ (20)

z (11) i tego, że $x_1 > 0$ w oparciu o wzór (5) mamy

$$\gamma + \int\limits_{0}^{x_1} (1 - \frac{t}{x_1})^{n-2} f(t,y(t,\gamma))g(t)dt < 0 \tag{21}$$

Weźmy różnicę

$$y'(\xi,\gamma) - y'(x_1,\gamma) = \frac{\xi^{n-2} - x_1^{n-2}}{(n-2)!}\left[\gamma + \int\limits_{0}^{x_1} (1 - \frac{t}{x_1})^{n-2} f(t,y(t,\gamma))g(t)dt\right]$$

$$+ \frac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \int\limits_{x_1}^{\xi} (1 - \frac{t}{\xi})^{n-2} f(t,y(t,\gamma))g(t)dt \tag{22}$$

Wobec (16), (20), (21) i tego że $\xi > x_1$ z (22) otrzymujemy $-y'(x_1,\gamma) < 0$, co jest sprzeczne z (11), tzn. zachodzi (15). Z (11) i (15) wynika, że $y(x,\gamma)$ jest funkcją malejącą w $\langle 0,\infty)$ i z uwagi na (12) i (14) zmieniającą znak w tym przedziale, cbdo.

<u>Lemat 2</u>. Jeżeli spełnione są założenia 1°, 2°, 3°, 4° i γ oznacza kres górnych tych γ dla których $y(x,\gamma)$ zmienia znak w $\langle 0,\infty)$, to $y(x,\bar{\gamma}) > 0$ dla $x \geqslant 0$.

Dowód. Z założenia 1° i 2° wynika istnienie rozwiązania $y(x,\bar{\gamma})$ zadania (1) (2') w $\langle 0,\infty)$. Z założenia 3° wynika (p. [4] str. 72, tw. 3.4), że dla każdego $\varepsilon > 0$ i $x_o > 0$ istnieje takie $h > 0$, że jeżeli

$$|\gamma - \bar{\gamma}| < h \tag{23}$$

to $|y(x,\gamma) - y(x,\bar{\gamma})| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in \langle 0, x_o\rangle$. (24)

Wobec lematu 1 możliwe są dwa przypadki:

1) $y(x,\bar{\gamma})$ zmienia znak w $\langle 0,\infty)$. Wtedy biorąc $0 > \gamma_1 > \bar{\gamma}$ spełniające (23) otrzymamy rozwiązanie $y(x, \gamma_1)$ zadania (1) (2) które wobec (24) też zmieniałoby znak w $\langle 0,\infty)$, co prowadzi do sprzeczności z określeniem liczby $\bar{\gamma}$,

2) pozostaje przypadek, że $y(x,\bar{\gamma})$ nie zmienia znaku w $\langle 0,\infty)$ Ponieważ $y(0,\bar{\gamma}) = y_0 > 0$, więc musi być $y(x,\bar{\gamma}) \geqslant 0$ w $\langle 0,\infty)$.

Wykażę, że: i) nie może być $y(x,\bar{\gamma}) = 0$ od pewnego $x > 0$ począwszy. Przypuśćmy przeciwnie, że

$$y(x,\gamma) = 0 \quad \text{dla } x \geqslant \eta\,, \quad (\eta > 0) \tag{25}$$

Wtedy z (25) i założenia 4^0, $f(x,y(x,\bar{\gamma}) = f(x,0) = 0$ dla $x \geqslant \eta$ Z (26) dla $x \geqslant \eta$ otrzymamy

$$\int_0^x (1 - \frac{t}{x})^{n-1} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt =$$

$$= \int_0^\eta (1 - \frac{t}{\eta})^{n-1} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt \tag{27}$$

Ale $y(x,\bar{\gamma})$ spełnia w $\langle 0,\infty)$ równanie całkowe (5):

$$y(x,\bar{\gamma}) = y_0 + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\bar{\gamma} + \int_0^x (1 - \frac{t}{x})^{n-1} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt\right] \tag{28}$$

w szczególności dla $x \geqslant \eta$ otrzymamy z (28), uwzględniając (25), (27)

$$0 = y_0 + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[\bar{\gamma} + \int_0^\eta (1 - \frac{t}{\eta})^{n-1} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt\right] \tag{29}$$

Ale z (25) i (28) przy $x = \eta$ mamy

$$0 = y_0 + \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}\left[\bar{\gamma} + \int_0^\eta (1 - \frac{t}{\eta})^{n-1} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt\right] \tag{30}$$

stąd

$$\bar{\gamma} + \int_0^{\eta} (1 - \frac{t}{\eta})^{n-1} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt = -y_0 \frac{(n-1)!}{\eta^{n-1}} \quad (31)$$

Wstawiając (31) do (29) dostajemy

$$0 = y_0 \left[1 - (\frac{x}{\eta})^{n-1}\right] < 0 \text{ dla } x > \eta,$$

a więc sprzeczność, to kończy dowód przypadku i.
ii) nie może być $y(\eta_\nu, \bar{\gamma}) = 0$, gdzie $\{\eta_\nu\}$ jest ciągiem rosnącym liczby rzeczywistych dodatnich, ($\nu = 1,2,\ldots$), oraz

$$y(x,\bar{\gamma}) > 0 \quad \text{dla} \quad x \neq \eta_\nu \quad (32)$$

Weźmy, np. $y(\eta_1, \bar{\gamma}) = 0$. (33)

Jeżeli $\gamma < \bar{\gamma}$ spełnia (23) do na podstawie założenia 3° zachodzi (24) dla $x \in \langle 0, \eta_1 + r\rangle$, gdzie $0 < r < \eta_2 - \eta_1$, i ponieważ z lematu 1 wynika że $y(x,\gamma)$ jest funkcją malejącą w $\langle 0,\infty)$, to z (24) wynika że $y(x,\bar{\gamma})$ jest funkcją nierosnącą w $\langle 0, \eta_1 + r\rangle$ tzn. wobec (33) musi być $y(x,\bar{\gamma}) \leq 0$ dla $\eta_1 < x \leq \eta_1 + r$, co jest sprzeczne z (32).

Przypadki i) oraz ii) dowodzą że pozostaje tylko możliwość $y(x,\bar{\gamma}) > 0$ dla wszystkich $x \geq 0$, cbdo.

<u>Lemat 3</u>. Przy założeniach lematu 2, dla każdego $x \geq 0$ jest $y(x,\bar{\gamma}) \leq 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje $\zeta > 0$ takie, że

$$y'(\zeta,\bar{\gamma}) = \frac{\zeta^{n-2}}{(n-2)!}\left[\bar{\gamma} + \int_0^{\zeta} (1 - \frac{t}{\zeta})^{n-2} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt\right] > 0 \quad (34)$$

stąd

$$\bar{\gamma} + \int_0^{\zeta} (1 - \frac{t}{\zeta})^{n-2} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt > 0 \quad (35)$$

Dla $x > \zeta$ mamy

$$y'(x,\bar{\gamma})-y'(\zeta,\bar{\gamma}) = \frac{x^{n-2}-\zeta^{n-2}}{(n-2)!}\left[\bar{\gamma} + \int_0^{\zeta}\left(1-\frac{t}{\zeta}\right)^{n-2} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt\right] +$$

$$+ \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\int_{\zeta}^{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{n-2} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt > 0 \qquad (36)$$

(wobec $x > \zeta$, (35) i $f(x,y(x,\bar{\gamma})) > 0$ dla $x \geqslant 0$).

Z (36) i (34) wynika, że $y(x,\bar{\gamma})$ rośnie dla $x > \zeta$. (37)

Ale z założenia 3°, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $h > 0$, że gdy $|\gamma_2 - \bar{\gamma}| < h$ i $\gamma_2 < \bar{\gamma} < 0$, to

$$|y(x,\gamma_2) - y(x,\bar{\gamma})| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, \zeta + 1\rangle \qquad (38)$$

Z lematu 1, $y(x, \gamma_2)$ jest funkcją malejącą w $\langle 0,\infty)$, więc z (38) wynika że $y(x,\bar{\gamma})$ jest funkcją nierosnącą w $\langle 0, \zeta + 1\rangle$, co jest sprzeczne z (37). Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu.

<u>Twierdzenie 2</u>. Jeżeli spełnione są założenia 1°, 2°, 3°, 4°, 5° i 6°, a $\bar{\gamma}$ jest liczbą zdefiniowaną w lemacie 2, to $y(x,\bar{\gamma})$ jest rozwiązaniem zadania (1) (2).

Dowód. Z założenia 1° i 2° wynika istnienie rozwiązania zadania (1) (2') w $\langle 0,\infty)$. Z lematu 3 wynika, że

$$y(x,\bar{\gamma}) \text{ jest funkcją nierosnącą w } \langle 0,\infty) \qquad (39)$$

Z lematu 2 i (39) wynika, że istnieje $\lim_{x\to\infty} y(x,\bar{\gamma}) = c \geqslant 0$.

Wykażemy, że $c = 0$. Przypuśćmy, że $c > 0$.

Z założenia 5° istnieje $\inf_{\langle 0,\infty)} f(x,c) = \lambda_c > 0$ (40)

Wobec (39) $\quad y(x,\bar{\gamma}) \geqslant c > 0.$ (41)

Z (40), (41) i założenia 4° mamy

$$f(x,y(x,\bar{\gamma})) \geqslant f(x,c) \geqslant \lambda_c \quad \text{dla } x \geqslant 0 \qquad (42)$$

Z (40), (42) i założenia 6° otrzymujemy

$$y'(x,\bar{\gamma}) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\bar{\gamma} + \int_0^x (1 - \frac{t}{x})^{n-2} f(t,y(t,\bar{\gamma}))g(t)dt\right] \geq$$

$$\geq \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\bar{\gamma} + \lambda_c \int_0^x (1 - \frac{t}{x})^{n-2} g(t)dt\right] \geq \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\bar{\gamma} + \lambda_o \cdot F(x)\right]$$

oraz

$$\lim_{x\to\infty} y'(x,\bar{\gamma}) \geq \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\left[\bar{\gamma} + \lambda_c \cdot F(x)\right] = +\infty,$$ co jest sprzeczne z lematem 3. Twierdzenie jest udowodnione.

3. Jednoznaczność rozwiązania zadania (1), (2)

Twierdzenie 3. Jeżeli przyjmiemy założenia 1°, 2°, 4°, 5°, 6° oraz 7° $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L(x)|y_1 - y_2|$, dla $x \geq 0$, y_1, $y_2 \in (-\infty,\infty)$, $L(x) > 0$ i ciągła w $\langle 0,\infty)$, to istnieje tylko jedno rozwiązanie równania (1) spełniające (2).

Dowód. 1) Można pokazać, że przy założeniach 1°, 2° i 7° zadanie Cauchyego (1) (2') posiada tylko jedno rozwiązanie przy ustalonym γ w $\langle 0,\infty)$, (p.np. [4], str. 30-31).

2) Jeżeli przyjmiemy $\gamma = \bar{\gamma} < 0$, gdzie $\bar{\gamma}$ jest zdefiniowane w lemacie 2, to przy założeniach 1°, 2°, 4°, 5°, 6° i 7°, $y(x,\bar{\gamma})$ spełnia (1) (2') oraz

$$\lim_{x\to\infty} y(x,\bar{\gamma}) = 0 \tag{43}$$

Aby wykazać jednoznaczność rozwiązania zadania (1) (2) wystarczy wykazać, że biorąc $\tilde{\gamma} \neq \bar{\gamma}$, nie może być

$$\lim_{x\to\infty} y(x,\tilde{\gamma}) = 0 \tag{44}$$

Przypuśćmy przeciwnie, że zachodzi (44) i niech

$$\bar{\gamma} < \tilde{\gamma} < 0 \tag{45}$$

i $y(x,\tilde{\gamma})$ spełnia (1) (2), a więc

$$y(0,\tilde{\gamma}) = y(0,\bar{\gamma}) = y_o > 0 \tag{46}$$

(przypadek $\tilde{\gamma}<\bar{\gamma}$ można pominąć, bo na podstawie lematu 1, $\lim_{x\to\infty} y(x,\tilde{\gamma}) < 0$).

Z (2'), (45) i ciągłości $y^{(n-1)}(x,\tilde{\gamma})$ i $y^{(n-1)}(x,\bar{\gamma})$ w $\langle 0,\infty)$ wynika, że istnieje $s>0$, takie, że

$$y^{(n-1)}(x,\tilde{\gamma}) > y^{(n-1)}(x,\bar{\gamma}) \quad \text{w} \quad \langle 0,s) \tag{47}$$

Z (2'), (46), (47) otrzymujemy, że

$$y(x,\tilde{\gamma}) > y(x,\bar{\gamma}) \quad \text{w} \quad (0,s) \tag{48}$$

Wykażemy, że $s=+\infty$. Przypuśćmy, że $s<\infty$ i niech

$$y(x,\tilde{\gamma}) = y(s,\bar{\gamma}) \tag{49}$$

Stosując twierdzenie Rolle'a do funkcji $y(x,\tilde{\gamma}) - y(x,\bar{\gamma})$ w przedziale $\langle 0, s\rangle$ stwierdzamy, wobec (46), (48), (49), że istnieje takie $\mu\in(0,s)$, że

$$y'(\mu,\tilde{\gamma}) - y'(\mu,\bar{\gamma}) = 0 \tag{50}$$

Ale z (45), (48) i założenia 4° wynika, że

$$y'(\mu,\tilde{\gamma}) - y'(\mu,\bar{\gamma}) =$$

$$= \frac{\mu^{n-2}}{(n-2)!}\left[(\tilde{\gamma}-\bar{\gamma}) + \int_0^{\mu}\left(1-\frac{t}{\mu}\right)^{n-2}\left[f(t,y(t,\tilde{\gamma}))-f(t,y(t,\bar{\gamma}))\right]g(t)dt\right]>0$$

co jest sprzeczne z (50), tzn. $s=+\infty$

Z (45), (48) i założenia 4° mamy dalej

$$y(x,\tilde{\gamma}) - y(x,\bar{\gamma}) =$$

$$= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left[(\tilde{\gamma}-\bar{\gamma}) + \int_0^{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{n-1}\left[f(t,y(t,\tilde{\gamma}))-f(t,y(t,\bar{\gamma}))\right]g(t)dt\right]>0,$$

i jak widać $\lim_{x\to\infty}\left[y(x,\tilde{\gamma}) - y(x,\bar{\gamma})\right] = +\infty$, co jest sprzeczne z (43) i (44). Ta sprzeczność kończy dowód.

LITERATURA

[1] Sansone G.: Obyknowiennyje differencjalnyje urawnienija. Tom II. Moskwa 1954 r.

[2] Hofman I.J.: Ob odnoj asymptoticzeskoj zadaczi. Izwiestia Wyższych Uczebnych Zawiedienij. Nr 5,1959, str. 99-103.

[3] Dłotko T.: O pewnym zagadnieniu asymptotycznym dla równania różniczkowego n-go rzędu. Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach Nr 4, 1966.

[4] Coddington E., Lewinson N.: Teoria obyknowiennych differencjonalnych urawnienij. Moskwa, 1958.

Wpłynęło do redakcji 27.IV.1967 r.

О АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В работе доказано существование и единственность решения дифференциального уравнения $y^{(n)}(x) = f(x, y(x))\, g(x)$, $n \geqslant 2$ удовлетворящего условиям: $y(o) = y > 0$, $y(o) = y\ (o) = \ldots = y^{(n-2)}(o) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

ON THE CERTAIN ASYMPTOTIC PROBLEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS N-TH ORDER

S u m m a r y

In this paper we prooved, existence and uniqueness the solution $y(x)$ of the differential equnation $y^{(n)}(x) = f(x,y(x)) \cdot g(x)$ satisfying the conditions: $y(o) = y_o > 0$, $y'(o) = y''(o) = y^{(n-2)}(o) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.