

MICHAŁ KOBYLIŃSKI
Katedra Fizyki A

POWSTAWANIE FAL KAPILARNYCH NA POWIERZCHNI
CIEKŁYCH DIELEKTRYKÓW W PULSUJĄCYM ZEWNĘTRZNYM
JEDNORODNYM POLU ELEKTRYCZNYM

Streszczenie. W oparciu o zmodyfikowane prawo Laplace'a określające kierunek powierzchni menisku w danym punkcie w zależności od napięcia powierzchniowego i gęstości cieczy oraz o warunki graniczne wektora natężenia pola elektrycznego przeprowadzono analizę tego pola. Pole elektryczne zewnętrznie jednorodne przy przejściu przez zakrzywioną powierzchnię menisku przechodzi w niejednorodne. Kierunek gradientu tego pola jest taki, że działa ono na ciecz zawartą w menisku odpychająco od elektrod. Przy pulsującym przebiegu pola działanie to jest źródłem fali kapilarnych.

Stwierdzono powstawanie fal kapilarnych na powierzchni ciekłego dielektryka, znajdującego się między elektrodami, których kształt i ustawienie gwarantowały jednorodność pola między nimi. Pole miało kierunek poziomy i równoległy do płaskiej powierzchni swobodnej cieczy. W takim układzie jednorodność pola była zachowana. Powstające fale kapilarne świadczyły o istnieniu gradientu pola. Analiza zdjęć filmowych oraz analiza matematyczna pola przy przejściu przez powierzchnię cieczy zakrzywioną w pobliżu elektrod wykazała istnienie gradientu pola w meniskach przyelektrodowych. Kierunek zbieżności oraz pulsujący przebieg pola sprzyjały powstawaniu fal kapilarnych.

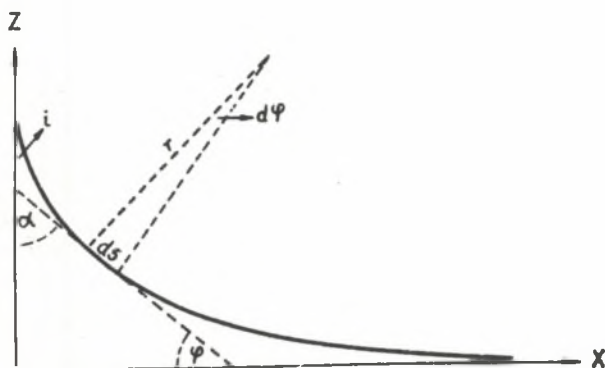
Podstawą analizy matematycznej omawianego zjawiska jest równanie Laplace'a (1).

$$\rho g Z = \frac{\sigma}{r} \quad (1)$$

ρ - gęstość, g - przyspieszenie ziemskie, Z - wysokość punktu menisku, mierzona od poziomu powierzchni płaskiej cieczy,

σ - napięcie powierzchniowe cieczy, r - promień krzywizny powierzchni w danym punkcie.

W równaniu tym można promień krzywizny wyrazić przez kąt (α) zawarty między styczną do powierzchni menisku i płaszczyzną pionową (ścianą elektrody) (rys. 1).



Rys. 1

Jest to zarazem kąt zawarty między normalną do powierzchni w danym punkcie a kierunkiem pola

$$\sin \alpha = \frac{2\sigma - \rho g z^2}{2\sigma} \quad (2)$$

Mając te kąty (nazwijmy je kątami padania) dla różnych wysokości menisku można obliczyć odpowiadające im kąty załamania linii sił pola na granicy dwóch ośrodków o względnych przenikalnościach elektrycznych ϵ_1 oraz ϵ_2 .

Przykładowo dokonano obliczeń dla nitrobenzenu o temperaturze 20°C , w której napięcie powierzchniowe tej cieczy wynosi $\sigma = 0,043 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, gęstość $\rho = 1203 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a względna przenikalność elektryczna $\epsilon_2 = 37$. Wyniki obliczeń ujęte w poniższą tabelicę (tab. 1) wykazują różnicę kątów padania i załamania. Widoczny wzrost tej różnicy i rozbieżności linii natężeń w nitrobenzenie kierunku zbieżności (od powierzchni elektrod) pokrywa się

z kierunkiem działania pola na ciecz zawartą w menisku. Tłumaczy to mechanizm powstawania fal kapilarnych między elektrodami.

Należy zwrócić uwagę na zmianę kierunku zbieżności linii pola u szczytu menisku. Dla nitrobenzenu np. zachodzi to zjawisko przy kącie padania około 10° . Ten szczytowy gradient tłumaczy zjawisko pełzania dielektryka po powierzchni elektrody stwierdzone w czasie pomiarów.

Na powierzchni menisku zachodzi nie tylko zmiana kierunku pola, ale również zależy on od kąta padania a tym samym od wysokości menisku.

Tablica 1

| Lp. | Z cm | Kąt padania α | Kąt załamania β | $\alpha - \beta$ |
|-----|---------|-------------------------|--------------------------|------------------|
| 1 | 0,01 | 87°00' | 89°57' | 2°57' |
| 2 | 0,03 | 81°02' | 89°45' | 8°43' |
| 3 | 0,05 | 74°56' | 89°34' | 14°38' |
| 4 | 0,07 | 68°52' | 89°25' | 20°33' |
| 5 | 0,09 | 62°43' | 89°12' | 26°20' |
| 6 | 0,11 | 56°30' | 88°56' | 32°25' |
| 7 | 0,13 | 50°10' | 88°43' | 38°33' |
| 8 | 0,15 | 43°44' | 88°22' | 44°38' |
| 9 | 0,17 | 37°07' | 87°52' | 50°45' |
| 10 | 0,19 | 30°20' | 87°20' | 57°00' |
| 11 | 0,21 | 23°17' | 86°25' | 63°08' |
| 12 | 0,23 | 15°55' | 84°30' | 68°35' |
| 13 | 0,245 | 10°10' | 81°25' | 71°15' |
| 14 | 0,255 | 6°12' | 76°02' | 69°50' |
| 15 | 0,265 | 2°05' | 53°26' | 51°21' |
| 16 | 0,268 | 0°50' | 27°42' | 26°51' |

Podstawą do analizy tego zagadnienia jest więc równanie (2) oraz poniższe warunki brzegowe pola:

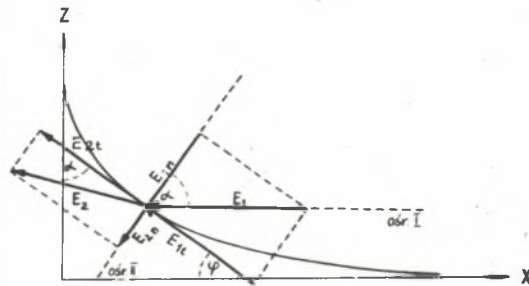
$$E_{t2} = E_{t1} \quad (3)$$

$$E_{n2} \varepsilon_2 = E_{n1} \varepsilon_1 \quad (3a)$$

gdzie: E_{t1} i E_{t2} składowe styczne wektora natężenia pola na granicy ośrodków, E_{n1} i E_{n2} składowe normalne do granicy ośrodków przy czym E_{n1} w ośr. pierwszym, E_{n2} drugim.

W tych warunkach najdogodniej będzie badać rozkład pola poprzez znalezienie składowych poziomych i pionowych natężenia pola elektrycznego. W tym celu przyjęto układ kartezjański, w którym jak na rys. 2 oś Z jest pionową leżącą na powierzchni elektrody. Oś X posiada kierunek poziomy, prostopadły do powierzchni elektrody i leży na swobodnej powierzchni cieczy. Oś Y równoległa do powierzchni płaskiej elektrody nie odgrywa w badanym zjawisku żadnej roli, gdyż w jej kierunku pole w rozpatrywanym obszarze nie ulega zmianie. Z powyższego wynika, że należy znaleźć składowe X -owe, jako składowe poziome oraz składowe Z -owe jako składowe pionowe.

Wartości tych składowych obliczamy w oparciu o rys. 2.



Rys. 2

Jak wynika z tego rysunku składowa pozioma w ośrodku drugim (cieczy) wyraża się wzorem:

$$E_{x2} = E_{t2} \sin \alpha - E_{n2} \cos \alpha \quad (4)$$

Na podstawie wzoru (3) i rysunku 2

$$E_{t2} = E_{t1} = E_1 \sin \alpha \quad (5)$$

Na podstawie wzoru (3a) i rys. 2

$$E_{n2} = E_{n1} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = E_1 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos \alpha \quad (6)$$

Składowa pozioma na podstawie (5) oraz (6) i rys. 2 wyraża się wzorem

$$E_{x2} = E_1 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \right) \quad (7)$$

Po przekształceniach trygonometrycznych otrzymujemy wzór na składową poziomą natężenia pola elektrycznego na granicy menisku w ośrodku drugim:

$$E_{x2} = \frac{1}{2} E_1 \left[\left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) - \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \cos 2\alpha \right] \quad (8)$$

W dalszym ciągu w oparciu o rys. 2 oraz warunki graniczne pola (3) i (3a) obliczamy składową pionową

$$E_{z2} = E_{t1} \cos \alpha - E_{n2} \sin \alpha \quad (9)$$

Na podstawie (5) oraz (6) otrzymujemy:

$$E_{z2} = E_1 \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \sin \alpha \cos \alpha$$

a stąd ostatecznie

$$E_{z2} = \frac{1}{2} E_1 \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \sin 2\alpha \quad (10)$$

W oparciu o wzory (9) i (10) na składowe natężenia pola w kierunku osi X i Z możemy znaleźć dla każdej wysokości menisku wartość i kierunek natężenia pola w ośrodku drugim, jako wypadkowego obu składowych:

$$E_2 = E_1 \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} - \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right) \cos 2\alpha \right]} \quad (11)$$

Wartości natężeń pola elektrycznego dla nitrobenzenu i powietrza w stosunku do natężenia pola zewnętrznego obliczone przy pomocy powyższego wzoru dla różnych wysokości menisku zawarte są w tablicy 2 (tab. 2). Kąt α maleje ze wzrostem wysokości menisku do wartości kąta zetknięcia, którego wartość zależy od obu ośrodków oraz materiału elektrody.

W oparciu o poniższą tabelę naniesiono na profil menisku wykreślonego przy pomocy wzoru (2) wartości względne natężenia pola w nitrobenzenie w skali 50:1 (rys. 3).

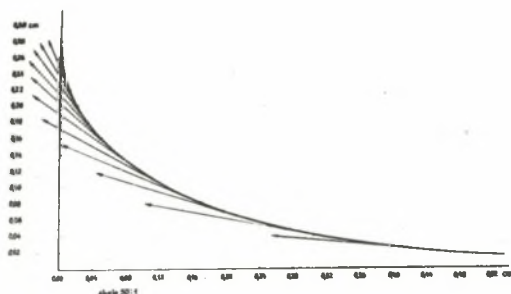
Na wykresie tym widoczny jest zasadniczy kierunek zbieżności linii sił pola. Informuje on o kierunku działania pola na dipole dielektryka. W wyniku tego działania ciecz zawarta między ściankami elektrod i krzywizną menisku zostaje odepchnięta od ścianek elektrod.

Tablica 2

| Lp. | Z cm | Kąt padania | E_{x2} | E_{z2} |
|-----|---------|----------------|----------|----------|
| 1 | 0,02 | 87°00' | 0,9899 | 0,1011 |
| 2 | 0,04 | 78°00' | 0,9585 | 0,1978 |
| 3 | 0,06 | 71°54' | 0,9068 | 0,2882 |
| 4 | 0,08 | 65°50' | 0,8376 | 0,3634 |
| 5 | 0,10 | 59°38' | 0,7524 | 0,4227 |
| 6 | 0,12 | 53°20' | 0,6536 | 0,4668 |
| 7 | 0,14 | 47°00' | 0,5301 | 0,4853 |
| 8 | 0,16 | 40°30' | 0,4379 | 0,4805 |
| 9 | 0,18 | 33°44' | 0,3278 | 0,4494 |
| 10 | 0,20 | 26°50' | 0,2259 | 0,3919 |
| 11 | 0,22 | 19°43' | 0,1373 | 0,3089 |
| 12 | 0,245 | 10°10' | 0,0580 | 0,1690 |
| 13 | 0,25 | 8°10' | 0,0472 | 0,1368 |
| 14 | 0,255 | 6°12' | 0,0390 | 0,1030 |
| 15 | 0,26 | 4°10' | 0,0327 | 0,0704 |
| 16 | 0,265 | 2°05' | 0,0289 | 0,0353 |
| 17 | 0,268 | 0°51' | 0,0285 | 0,0144 |

Działanie to powoduje spłaszczenie menisku wskutek czego maleje gradient pola, co powoduje zmniejszenie działania pola na dipole cieczy. Przy Stałym polu dochodzi do równowagi sił pola i sił międzycząsteczkowych przy spłaszczonym menisku widocznym na rys. 4.

W naszym przypadku pole ma przebieg pulsujący, którego impulsy działając na ciecz zawartą w menisku wzbudzają fale powierzchniowe kapilarne.



Rys. 3

Siła przesuująca działająca na dipol jest proporcjonalna do wartości bezwzględnej jego momentu dipolowego oraz gradientu bezwzględnej wartości natężenia pola w danym punkcie. Wyraża się ona wzorem:

$$F = - |\mu| \cos\theta \nabla |E| \quad (11)$$

gdzie:

- μ - moment elektryczny dipola, θ - kąt równy $180^\circ - \alpha$
- α - kąt jaki tworzy moment dipola z kierunkiem pola,
- $|E|$ - jest wartością bezwzględną natężenia pola,
- $\nabla|E|$ - gradient wartości natężenia pola.

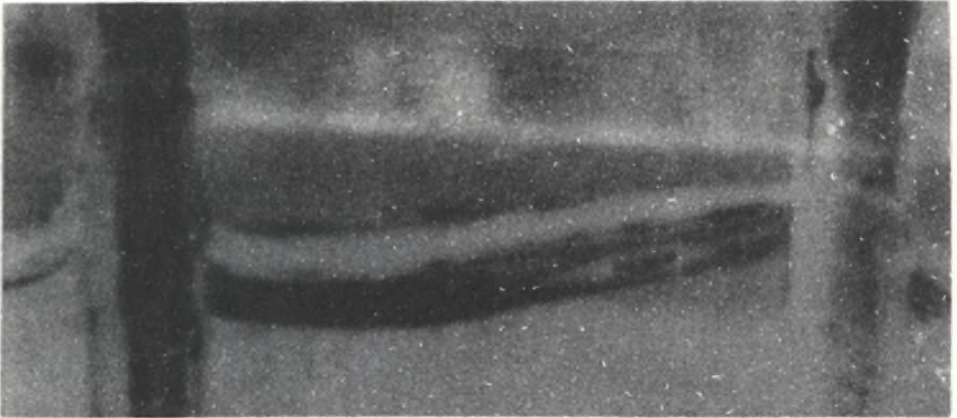
Ze względu na zależność natężenia pola w cieczy w obszarze menisku od kąta padania związanego z kształtem menisku pochodna wartości natężenia pola względem tego kąta informuje o niejednorodności tego pola.

Różniczkując obustronnie równanie (11) otrzymujemy:

$$E_2 dE_2 = -\frac{1}{2} E_1^2 \left(1 - \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2}\right) \sin 2\alpha d\alpha$$

stąd

$$\frac{dE_2}{d\alpha} = - \frac{E_1 \left(1 - \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2}\right) \sin 2\alpha}{\sqrt{2 \left[1 + \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} - \left(1 - \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2}\right) \cos^2 \alpha\right]}} \quad (13)$$



Rys. 4

Analiza powyższego równania wykazuje, że maksymalną niejednorodność osiąga pole przy kącie padania 45° tj. około połowy wysokości menisku. Wzór ten tłumaczy również dużą zależność amplitudy wzbudzonych fal (stwierdzoną doświadczalnie) od polarności cieczy.

Praca ta, jako zasadnicza część pracy doktorskiej została wykonana w Katedrze Fizyki Śląskiej Akademii Medycznej pod kierunkiem profesora dra M. Puchalika kierownika tej katedry, za co składam Mu głębokie wyrazy wdzięczności. Profesorowi dr K. Gostkowskiemu dziękuję za cenne wskazówki oraz ułatwienie mi warunków tej pracy.

LITERATURA

- [1] Schultze H.: Methode der Erzeugung von Kapillarwellen auf dielektrischen Flussigkeiten und zur Messung der Frequenz hochgespannten Wechselstrom. Zeitschrift fur Instrumentenkunde 1906. 1. 150.
- [2] Katalinic M.: Zur Frage der durch Wechselspannung erzeugten Kapillarwellen an dielektrischen Flüssigkeiten und ihrer Anwendbarkeit zur Frequenzmessung. Zeitschrift f. Physik. 67. 1931. 10. (533-555).
- [3] Adamson A.W.: Chemia fizyczna powierzchni PWN 1963 r. Rozdz. IV i V
- [4] Roth A.: Hochspannungstechnik. IV A. Wien 1959.
- [5] Lesch G.: Lehrbuch der Hochspannungstechnik. Berlin 1959.
- [6] Hakim S.S.: Mechanical forces in dielectrics: Proc. Inst. Electr. Engrs. 1962. C. 109. Nr 15.
- [7] Swinkels D.A.J. and Sullivan E.P.A.: The movement of molecules in non-uniform electric fields. The Australian Journal of chemistry. 1951. 14. Nr 4. (487-492).
- [8] Zahn W.: Die Elektrostriktion in Dipolflüssigkeiten. Zeitschrift fur Physik B. 166. 275-288 (1962).
- [9] Buff F.P.: The Theory of Capillarity Simple solution of Laplace. Handbuch der Physik B. X. S. 299.
- [10] Jaeger G.: Theoretische Physik. B. I. Hydrodynamik.
- [11] Whittenbury C.G. Huber E.A. and Newell G.S.: Instrument for Measuring Water Waves. The Review of Scientific Instruments. V. 30. Nr 8 1959.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКИХ
ДИЭЛЕКТРИКОВ В ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ВНЕШНЕМ ОДНОРОДНОМ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Р е з ю м е

Опираясь на видоизменённый закон Лапласа, определяющий направление поверхности мениска в данной точке в зависимости от поверхностного натяжения и плотности, а также на граничные условия вектора напряжённости электрического поля, проведён анализ этого поля. Электрическое поле, снаружи однородное, проходя через искривлённую поверхность мениска, переходит в неоднородное электрическое поле. Направление градиента этого поля таково, что действует оно на жидкость, имеющуюся в мениске, отталкивая её от электродов.

При пульсирующемся поле это действие является источником капиллярных волн.

FORMATION OF CAPILLARY WAVES ON THE SURFACE
OF LIQUID DIELECTRICS IN THE PULSATING EXTERNAL
HOMOGENEOUS ELECTRIC FIELD

S u m m a r y

On the ground of the modified Laplace's law, that determines the direction of meniscus surface in the given point, depending on the surface tension and density of a liquid, as well as the boundary conditions of the electric field intensity vector - the analysis of this field has been carried out. The electric field externally homogeneous, passing through the curved meniscus surface, becomes a heterogeneous one. The gradient direction of this field is such that it causes a repulsion of a liquid contained in the meniscus, from the electrodes. This operation is a source of capillary waves within the pulsating field course.