ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

JÓZEF WĄSOWSKI
Katedra Elektrotechniki Ogólnej A

METODA PRZEWIDYWANIA CAŁKI NIEJEDNORODNEGO LINIOWEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH

Dla pewnych funkcji jak na przykład: stałej, wykładniczej, sinusoidalnej, wielomianu i ich kombinacji, znana jest w literaturze "metoda przewidywania" pewnej całki szczególnej.

W pracy podano "metodę przewidywania" dla dowolnej ciągłej funkcji F, stojącej po prawej stronie liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach, przy czym znaleziona całka spełnia z góry zadane warunki początkowe. Stanowi ona modyfikację metody Lagrange'a lecz jest o wiele prostsza.

1. Niejednorodne liniowe r.r. o stałych współczynnikach i zerowych warunkach początkowych.

Niech będzie dane r.r.

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \, x^{(k)} = F \tag{1.1}$$

gdzie: A_k, $k = 0,1,\ldots n$, są to stałe współczynniki, $x = x(t)$ jest funkcją szukaną, a $F = F(t)$ jest daną funkcją ciągłą w dowolnym przedziale I.

W r.r. (1.1) zakładamy

$$A_n \neq 0 \tag{1.1a}$$

oraz warunki początkowe

$$x^{(p)}(t_0) = 0; \quad p = 0,1,\ldots,(n-1) \tag{1.2}$$

Szukając całki r.r. (1.1), spełniającej warunki początkowe (1.2), rozpatrzymy przypadek obejmujący wszystkie możliwe pierwiastki równania charakterystycznego

$$\sum_{k=0}^{n} A_k s^k = 0 \tag{1.3}$$

r.r (1.1), gdzie: A_k, $k = 0,1,\ldots, n$, jak w (1.1) i gdzie obowiązuje (1.1a).

Niech więc równanie charakterystyczne (1.3) posiada n_1-krotny pierwiastek s_1, n_2-krotny pierwiastek $s_2,\ldots$, n_v-krotny pierwiastek s_v, razem pierwiastków n, to znaczy $n_1 + n_2 +\ldots, + n_v = n$.

Jak wynika z [1], część pierwsza wzoru (4.4), szukać będziemy całki r.r. (1.1) spełniającej warunki początkowe (1.2), w postaci

$$X = \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \int_{t_0}^{t} K_{qr} \cdot F(\tau) \quad (t-\tau)^{r-1} e^{s_q(t-\tau)} d\tau \tag{1.4}$$

We wzorze tym stałe K_{qr}; $q = 1,2\ldots,v$; $r = 1,2,\ldots,n_q$, można wyznaczyć przy pomocy podanych tam wzorów [1]. Niejednokrotnie jednak, zwłaszcza przy pierwiastkach zespolonych równania charakterystycznego (1.3), będzie można szybciej wyznaczyć te stałe w inny sposób.

W tym celu różniczkujemy (n-1) razy (1.4) i zakładamy po każdym różniczkowaniu $x^{(p)}(t_0) = 0$; $p = 1,2,\ldots,(n-1)$, a po n-tym różniczkowaniu $x^{(n)}(t_0) = \frac{1}{A_n} F(t_0)$, jak to wynika z (1.1). Otrzymujemy wówczas układ równań gdy $F(t_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} K_{qr} \binom{p-1}{p-r} \cdot (r-1)!\, s_q^{p-r} = 0 \\ &\sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} K_{qr} \binom{n-1}{n-r} \cdot (r-1)!\, s_q^{n-r} = \frac{1}{A_n} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Rozwiązując go, dostajemy szukane stałe K_{qr}; $q = 1,2,\ldots,v$; $r = 1,2,\ldots, n_q$; a następnie z wzoru (1.4) szukaną całkę r.r. (1.1) spełniającą warunki początkowe (1.2).

2. Niejednorodne liniowe r.r. o stałych współczynnikach i dowolnych warunkach początkowych.

Załóżmy w r.r. (1.1), następujące warunki początkowe

$$x^{(p)}(t_o) = x_{op}; \quad p = 0,1,\ldots,(n-1) \tag{2.1}$$

gdzie: nie wszystkie wartości x_{op}; $p = 0,1,\ldots,(n-1)$, są równe zeru.

Zamieńmy r.r. (1.1) o warunkach początkowych (2.1), na r.r. o zerowych warunkach początkowych. W tym celu podstawmy w (1.1)

$$x = \sum_{k=o}^{n-1} x_{ok} \cdot \frac{(t-t_o)^k}{k!} + y \tag{2.2}$$

Po uporządkowaniu otrzymamy równanie różniczkowe

$$\sum_{k=o}^{n} A_k\, y^{(k)} = \psi \tag{2.3}$$

gdzie

$$\psi = F - \sum_{k=o}^{n-1} C_k \cdot (t - t_o)^k \tag{2.3a}$$

$$C_k = \frac{1}{k!} \sum_{q=o}^{n-k-1} A_q\, X_{o(k+q)}; \; k = 0,1,\ldots,(n-1) \tag{2.3b}$$

o warunkach początkowych

$$y^{(p)}(t_o) = 0; \; p = 0,1,\ldots,(n-1) \tag{2,4}$$

Wobec zerowych warunków początkowych (2.4) całka r.r. (2.3), która ma spełniać te warunki - przy takich samych pierwiastkach równania charakterystycznego (1.3) jak w punkcie 1 - posiada postać

$$y = \sum_{q=1}^{v} \sum_{r=1}^{n_q} \int_{t_0}^{t} K_{qr}\, \psi(\tau) \cdot (t-\tau)^{r-1}\, e^{s_q(t-\tau)}\, d\tau \qquad (2.5)$$

Postępując z całką (2.5) jak z całką (1.4), to znaczy różniczkując (n-1) razy (2,5) i zakładając po każdym różniczkowaniu $x^{(p)}(t_0) = 0$, $p = 1,2,\ldots,(n-1)$, a po n-tym różniczkowaniu $y^{(n)}(t_0) = \frac{1}{A_n} \cdot \psi(t_0)$, otrzymujemy na wyznaczenie stałych K_{qr}; $q = 1,2,\ldots,v$; $r = 1,2,\ldots,n$ te same równania, które otrzymaliśmy poprzednio, tzn. (1.5).

Podstawiając teraz y z (2.5) do (2.2), otrzymujemy całkę r.r. (1.1) spełniającą warunki początkowe (2.1).

3. Przykłady

P r z y k ł a d 3.1

Znaleźć całkę r.r.

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = F$$

gdzie: $x = x(t)$ jest funkcją szukaną, a $F = F(t)$ jest daną funkcją ciągłą w dowolnym przedziale I, spełniającą warunki początkowe

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$$

Rozwiązanie:

Równanie charakterystyczne

$$s^3 - 2s^2 - s + 2 = 0$$

posiada pierwiastki

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = -1$$

Wobec tego przewidujemy całkę danego r.r. w postaci

$$x = K_1 e^t \int_0^t F(\tau) e^{-\tau} d\tau + K_2 e^{2t} \int_0^t F(\tau) e^{-2\tau} d\tau + K_3 e^{-t} \int_0^t F(\tau) e^{\tau} d\tau$$

Różniczkując powyższą całkę dwa razy i zakładając $x'(0) = 0$ i $x''(0) = 0$, a po trzecim różniczkowaniu $x'''(0) = F(0)$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= 0 \\ K_1 + 2K_2 - K_3 &= 0 \\ K_1 + 4K_2 + K_3 &= 1 \end{aligned}$$

Rozwiązując go, dostajemy

$$K_1 = -\frac{1}{2}, \quad K_2 = \frac{1}{3}, \quad K_3 = \frac{1}{6}$$

Wobec tego szukana całka spełniająca podane warunki początkowe posiada postać

$$x = -\frac{1}{2} e^t \int_0^t F(\tau) e^{-\tau} d\tau + \frac{1}{3} e^{2t} \int_0^t F(\tau) e^{-2\tau} d\tau + \frac{1}{6} e^{-t} \int_0^t F(\tau) e^{\tau} d\tau$$

Przykład 3.2

Znaleźć całkę r.r.

$$x''' - 6x'' + 12x' - 8x = F$$

gdzie x oraz F jak w przykładzie 3.1, spełniającą warunki początkowe

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$$

Rozwiązanie:

Równanie charakterystyczne

$$s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = 0$$

posiada jeden pierwiastek potrójny

$$s_0 = 2$$

Wobec tego przewidujemy całkę danego r.r. w postaci

$$x = \int_0^t F(\tau)\left[K_1 + (t-\tau)K_2 + (t-\tau)^2 K_3\right] e^{2(t-\tau)} d\tau$$

Różniczkując dwukrotnie i zakładając $x'(0) = 0$ i $x''(0) = 0$ widzimy od razu, że $K_1 = K_2 = 0$

W przypadku zatem jednego wielokrotnego pierwiastka s_0, równania charakterystycznego, wystarczy wziąć pod uwagę tylko ostatni wyraz. W naszym więc przypadku szukać będziemy całki w postaci

$$x = K\int_0^t F(\tau) \cdot (t-\tau)^2 \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau$$

Różniczkując trzykrotnie i zakładając za trzecim razem $x'''(0) = F(0)$, dostajemy

$$K = \frac{1}{2}$$

Wobec tego

$$X = \frac{1}{2}\int_0^t F(\tau)\cdot(t-\tau)^2 \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau$$

<u>P r z y k ł a d</u> 3.3

Znaleźć całkę r.r.

$$x''' - 2x'' + 4x' = F$$

gdzie: x oraz F jak w przykładzie 3.1, spełniają warunki początkowe $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

Rozwiązanie:

Równanie charakterystyczne

$$s^3 - 2s^2 + 4s = 0$$

posiada pierwiastki

$$s_1 = 1 + j, \quad s_2 = 1 - j, \quad s_3 = -2$$

Przewidujemy tu całkę w postaci

$$x = \int_0^t \left[K_1 \sin(t-\tau) + K_2 \cos(t-\tau)\right] . F(\ ) . e^{t-\tau} d\tau + K_3 e^{-2t} \int_0^t F(\tau)\ e^{-2\tau} d\tau$$

Różniczkując i podstawiając kolejno $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = F(0)$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} K_2 + K_3 &= 0 \\ K_1 + K_2 - 2K_3 &= 0 \\ 2K_1 + \quad + 4K_3 &= 1 \end{aligned}$$

Stąd, po rozwiązaniu

$$K_1 = \frac{3}{10}, \quad K_2 = -\frac{1}{10}, \quad K_3 = \frac{1}{10},$$

Wobec tego

$$X = \frac{1}{10} \int_0^t \left[3 \sin(t-\tau) - \cos(t-\tau)\right] . F(\tau) . e^{t-\tau} + \frac{1}{10} e^{-2t} \int_0^t F(\tau)\ e^{2\tau}\ d\tau$$

P r z y k ł a d 3.4

Znaleźć całkę r.r.

$$x^{(4)} - 8x''' + 42x'' - 108x' + 169x = F$$

gdzie x oraz F jak w przykładzie 3.1, spełniającą warunki początkowe

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$$

Rozwiązanie:

Równanie charakterystyczne

$$s^4 - 8s^3 + 42s^2 - 108s + 169 = 0$$

posiada dwa pierwiastki podwójne zespolone-sprzężone

$$s_1 = 2 - j3, \quad s_2 = 2 + j3,$$

W związku z tym, przewidujemy następującą całkę r.r.

$$x = \int_0^t F(\tau)\left\{\left[K_1+(t-\tau)K_2\right]\sin 3(t-\tau)+\left[K_3+(t-\tau)K_4\right]\cos 3(t-\tau)\right\} e^{2(t-\tau)}d\tau$$

Różniczkując powyższą całkę trzykrotnie i podstawiając zadane warunki początkowe, a następnie różniczkując po raz czwarty i podstawiając $x^{(4)}(0) = F(0)$, dostajemy układ równań

$$\begin{aligned} K_3 &= 0 \\ 3K_1 + K_4 &= 0 \\ K_2 &= 0 \\ 12K_1 - 14K_4 &= 0 \end{aligned}$$

stąd

$$K_1 = \frac{1}{54}, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = -\frac{1}{18},$$

Zatem

$$x = \int_0^t F(\tau)\left|\frac{1}{54}\sin 3(t-\tau) - \frac{1}{18}(t-\tau)\cos 3(t-\tau)\right| \cdot e^{2(t-\tau)}d\tau$$

<u>P r z y k ł a d</u> 3.5

Znaleźć całkę r.r.

$$x''' - 2x'' - x' + 2x = F$$

gdzie: x oraz F jak w przykładzie 3.1 spełniającą warunki początkowe

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 1,$$

Rozwiązanie:

Przez podstawienie

$$x = \frac{1}{2} t^2 + 2t + 1 + y$$

sprowadzamy dane r.r. o niezerowych warunkach początkowych, do r.r.

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \psi$$

gdzie:

$$\psi = F + t^2 + 3t - 2$$

o zerowych warunkach początkowych

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s^3 - 2s^2 - s + 2 = 0$$

posiada pierwiastki

$$s_0 = 1, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = -1,$$

W związku z tym przewidujemy całkę r.r. o zerowych warunkach początkowych w postaci

$$y = K_1 e^t \int_0^t \psi(\tau) e^{-\tau} d\tau + K_2 e^{2t} \int_0^t \psi(\tau) e^{-2\tau} d\tau + K_3 e^{-t} \int_0^t \psi(\tau) e^{\tau} d\tau$$

Różniczkując powyższą całkę dwukrotnie i podstawiając $y'(0) = 0$ i $y''(0) = 0$, a następnie różniczkując po raz trzeci i podstawiając $y'''(0) = \psi(0)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= 0 \\ K_1 + 2K_2 - K_3 &= 0 \\ K_1 + 4K_2 + K_3 &= 1 \end{aligned}$$

stąd

$$K_1 = -\frac{1}{2},\ K_2 = \frac{1}{3},\quad K_3 = \frac{1}{6},$$

Wobec tego

$$y = -\frac{1}{2}e^{t}\int_0^t \psi(\tau)e^{-\tau}d\tau + \frac{1}{3}e^{2t}\int_0^t \psi(\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t \psi(\tau)\ e^{\tau}\ d\tau$$

Ale

$$\psi = F - (t^2 + 3t - 2)$$

Zatem

$$y = -\frac{1}{2}e^{t}\int_0^t F(\tau)e^{-\tau}d\tau + \frac{1}{3}e^{2t}\int_0^t F(\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t F(\tau)\ e^{\tau}d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}e^{t}\int_0^t (\tau^2+3\tau-2)e^{-\tau}d\tau - \frac{1}{3}e^{2t}\int_0^t (\tau^2+3\tau-2)e^{-2\tau}d\tau - \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t (\tau^2+3\tau-2)e^{\tau}d$$

Po wykonaniu

$$y = -\frac{1}{2}e^{t}\int_0^t F(\tau)\ e^{-\tau}d\tau + \frac{1}{3}e^{2t}\int_0^t F(\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t F(\tau)e^{\tau}d\tau +$$

$$+ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 2t - 1$$

Ponieważ

$$x = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 1 + y$$

zatem

$$X = -\frac{1}{2}e^{t}\int_0^t F(\tau)e^{-\tau}d\tau + \frac{1}{3}e^{2t}\int_0^t F(\tau)e^{-2\tau}d\tau + \frac{1}{6}e^{-t}\int_0^t F(\tau)e^{\tau}d\tau + \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

<u>P r z y k ł a d</u> 3.6

Znaleźć całkę równania różniczkowego

$$x^{(4)} + x''' - 7x'' - x' + 6x = F$$

gdzie x i F jak w przykładzie 3.1, spełniającą warunki początkowe $x(0) = 2$, $x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

Rozwiązanie:

Przez podstawienie

$$x = 2 + y$$

sprowadzamy dane r.r. do r.r.

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = F - 12 = \psi$$

o zerowych warunkach początkowych

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s^4 - 8s^3 + 42s^2 - 108s + 169 = 0$$

posiada cztery pierwiastki różne

$$s_1 = +1, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = +2, \quad s_4 = -3$$

Wobec tego przewidujemy całkę

$$y = K_1 e^{t}\int_0^t \psi(\tau)e^{-\tau}d\tau + K_2 e^{-t}\int_0^t \psi(\tau)\, e^{\tau}d\tau + K_3 e^{2t}\int_0^t \psi(\tau)e^{-2\tau}d\tau + K_4\, e^{-3t}\int_0^t \psi(\tau)e^{3\tau}\, d\tau$$

Różniczkując powyższą całkę trzykrotnie i podstawiając $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, a następnie różniczkując po raz czwarty i podstawiając $y^{(4)}(0) = \psi(0)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
K_1 + K_2 + K_3 + K_4 &= 0\\
K_1 - K_2 + 2K_3 - 3K_4 &= 0\\
K_1 + K_2 + 4K_3 + 9K_4 &= 0\\
K_1 - K_2 + 8K_3 - 27K_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Stąd po rozwiązaniu

$$K_1 = -\frac{1}{8},\ K_2 = \frac{1}{12},\ K_3 = \frac{1}{15},\ K_4 = -\frac{1}{40}$$

Wobec tego

$$y = -\frac{1}{8}e^{t}\int_0^t \left[F(\tau)-12\right]e^{-\tau}d\tau + \frac{1}{12}e^{-t}\int_0^t \left[F(\tau)-12\right]e^{\tau}\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{15}e^{2t}\int_0^t \left[F(\tau)-12\right]e^{-2\tau}\,d\tau - \frac{1}{40}e^{-3t}\int_0^t \left[F(\tau)-12\right]e^{3\tau}\,d\tau$$

Zatem

$$x = -\frac{1}{8}e^{t}\int_0^t F(\tau)e^{-\tau}d\tau + \frac{1}{12}e^{-t}\int_0^t F(\tau)e^{\tau}d\tau + \frac{1}{15}e^{2t}\int_0^t F(\tau)\,e^{-2\tau}d\tau -$$

$$-\frac{1}{40}e^{-3t}\int_0^t F(\tau)e^{3\tau}d\tau + \frac{3}{2}e^{t} + e^{-t} - \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{1}{10}e^{-3t}$$

LITERATURA

[1] Wąsowski J.: O pewnym sposobie rozwiązywania liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Matematyka - Fizyka Zeszyt 2, 1963 r.

МЕТОД ПРЕДСКАЗЫВАНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИЯЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р е з ю м е

В литературе известен метод предсказывания частного интеграла для некоторых функций: постоянной, экспоненциальной, синусоидальной, многочлена и их комбинаций.

В работе предложен метод предсказывания для любой непрерывной функции F, выступающей по правой стороне линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, причем найденный интеграл удовлетворяет данным начальным условиям. Указанная задача сводится к решению простой системы алгебраических уравнений.

A METHOD OF PRESUMING THE INTEGRAL OF A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

S u m m a r y

For certain functions, as for instance the constant, exponential, sinusoidal and polynomial functions and their combinations, there is known in literature a "method of presuming" some particular integral. This paper presents the "method of presumption", applied to an arbitrary continuous function F, situated on the right-hand side of a linear differential equation with constant coefficients, in which the determined integral meets the initial conditions that have been given. The matter of the whole problem is to solve a simple system of algebraic equations.