ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 12 Nr kol. 199

WŁODZIMIERZ TRZNADEL

O PEWNEJ RODZINIE PROSTYCH, KTÓREJ OBWIEDNIĄ JEST EPI- lub HIPOCYKLOIDA

Streszczenie: Celem niniejszej notatki jest podanie konstrukcji pewnej rodziny prostych, której obwiednią jest epicykloida lub hipocykloida. Wykazano kilka własności tej rodziny prostych oraz podano przybliżony sposób konstrukcji dowolnej z tych krzywych.

Przez K oznaczamy rodzinę prostych łączących dwa punkty na okręgu, poruszające się:

a) w kierunkach zgodnych,

b) w kierunkach przeciwnych,

z prędkościami kątowymi φ i $n\varphi$. Gdzie n jest stałą większą od 1, a kąt $\varphi \geqslant 0$. Przyjmuję, że dla $\varphi = 0$ prosta przechodzi przez środek okręgu.

Twierdzenie

Obwiednią rodziny prostych K, jest

a) epicykloida (przy ruchu w kierunkach zgodnych)

$$\left|\begin{array}{l} x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi \\ y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\frac{R+r}{r}\varphi \end{array}\right. \tag{1}$$

gdzie: $r = \frac{\varrho}{n+1}$; $R = \varrho\frac{n-1}{n+1}$

b) hipocykloida (przy ruchu w kierunkach przeciwnych)

$$\left|\begin{array}{l} x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\frac{R-r}{r}\varphi \\ y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\frac{R-r}{r}\varphi \end{array}\right. \tag{1'}$$

gdzie: $r = \frac{\varrho}{n-1}$; $R = \varrho\frac{n+1}{n-1}$

Dowód twierdzenia oprzemy na lemacie.

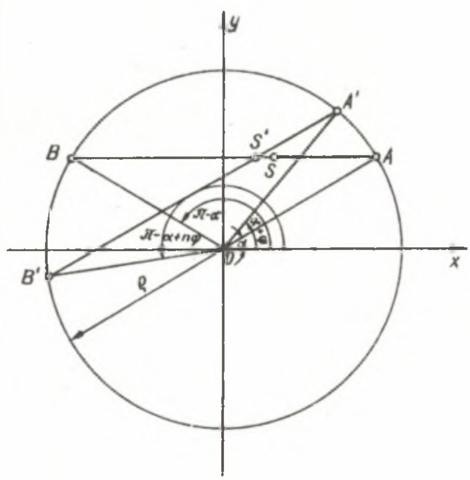
Lemat

Dana jest ustalona cięciwa i cięciwa powstała przez przesunięcie końców pierwszej cięciwy po okręgu koła, odpowiednio o φ i $n\varphi$. Jeżeli $\varphi \to 0$, to punkt przecięcia tych cięciw dąży do pewnego punktu S takiego, że

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} = \pm \frac{1}{n}$$

Dowód

Dany okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = \varrho^2$. Przyjmujemy cięciwę w położeniu równoległym do osi odciętych.



Rys. 1

Punkty A, A', B, B' mają współrzędne

A $\{\varrho\cos\alpha; \varrho\sin\alpha\}$
B $\{-\varrho\cos\alpha; \varrho\sin\alpha\}$
A' $\{\varrho\cos(\alpha+\varphi); \varrho\sin(\alpha+\varphi)\}$
B' $\{-\varrho\cos(\alpha\mp n\varphi); \varrho\sin(\alpha\mp n\varphi)\}$

Równania cięciw AB i $A'B'$ są następujące:

$$\begin{cases} y = \varrho \sin\alpha & (2) \\ \dfrac{y - \varrho\sin(\alpha+\varphi)}{x - \varrho\cos(\alpha+\varphi)} = \dfrac{\varrho\sin(\alpha+\varphi) - \varrho\sin(\alpha\mp n\varphi)}{\varrho\cos(\alpha+\varphi) + \varrho\cos(\alpha\mp n\varphi)} & (3) \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań (2), (3) otrzymujemy współrzędne punktu $S'\{x', y'\}$

$$\begin{cases} y' = \varrho\sin\alpha \\ x' = \varrho\left\{ \dfrac{[\sin\alpha - \sin(\alpha+\varphi)][\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha\mp n\varphi)]}{\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha\mp n\varphi)} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \cos(\alpha+\varphi)\right\} \end{cases}$$

Przez $S\{x_0, y_0\}$ oznaczmy taki punkt, że $\lim\limits_{\varphi\to 0} S' = S$, zatem

$$y_0 = \lim_{\varphi\to 0} y' = \lim_{\varphi\to 0} \varrho\sin\alpha = \varrho\sin\alpha$$

$$x_0 = \lim_{\varphi\to 0} x' = \lim_{\varphi\to 0}\varrho\left\{ \frac{[\sin\alpha - \sin(\alpha+\varphi)][\cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha\mp n\varphi)]}{\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha\mp n\varphi)} + \right.$$

$$\left. + \cos(\alpha+\varphi)\right\} = \varrho\cos\alpha + 2\varrho\cos\alpha \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\alpha - \sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi) - \sin(\alpha\mp n\varphi)}$$

Stąd po zastosowaniu twierdzenia de L'Hospitala otrzymujemy

$$x_0 = \varrho\cos\alpha + 2\varrho\cos\alpha \lim_{\varphi\to 0}\frac{-\cos(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi) \pm n\cos(\alpha\mp n\varphi)} =$$

$$= \varrho\cos\alpha - 2\varrho\frac{\cos\alpha}{1\pm n} = \frac{n\mp 1}{n\pm 1}\varrho\cos\alpha$$

Szukany więc stosunek jest równy

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overleftarrow{BS}} = \frac{\varrho\cos\alpha - \frac{n\mp 1}{n\mp 1}\varrho\cos\alpha}{\varrho\cos\alpha + \frac{n\mp 1}{n\mp 1}\varrho\cos\alpha} = \pm\frac{1}{n}$$

Dowód twierdzenia

Znajdziemy obwiednię rodziny prostych K metodą punktów charakterystycznych (patrz [1]). Z lematu wynika, że wystarczy znaleźć w tym celu miejsce geometryczne punktów S, dla których

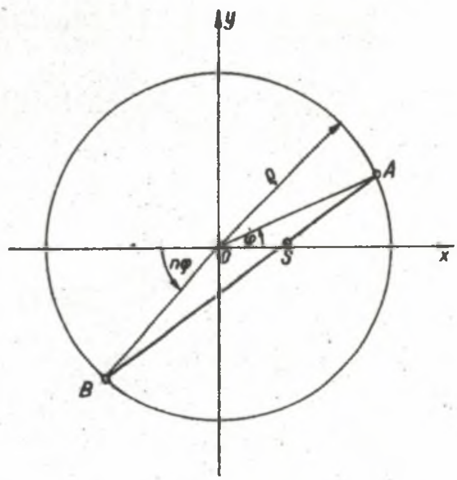
$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} = \pm\frac{1}{n}$$

gdzie: A, B są punktami przecięcia okręgu z prostą należącą do rodziny K.

Przyjmujemy początkowe położenie punktów A i B na osi Ox. Po przesunięciu punktów A i B o φ i $n\varphi$ mają one współrzędne

a) dla $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} = \frac{1}{n}$

$$A\left\{\varrho\cos\varphi;\ \varrho\sin\varphi\right\}$$
$$B\left\{\varrho\cos n\varphi;\ -\varrho\sin n\varphi\right\}$$



Rys. 2

Współrzędne punktu S są więc następujące

$$S\left\{\varrho\cos\varphi - \frac{\varrho}{n+1}\left[\cos\varphi + \cos n\varphi\right];\ \varrho\sin\varphi - \frac{\varrho}{n+1}\left[\sin\varphi + \sin n\varphi\right]\right\}$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy równania parametryczne obwiedni rodziny K.

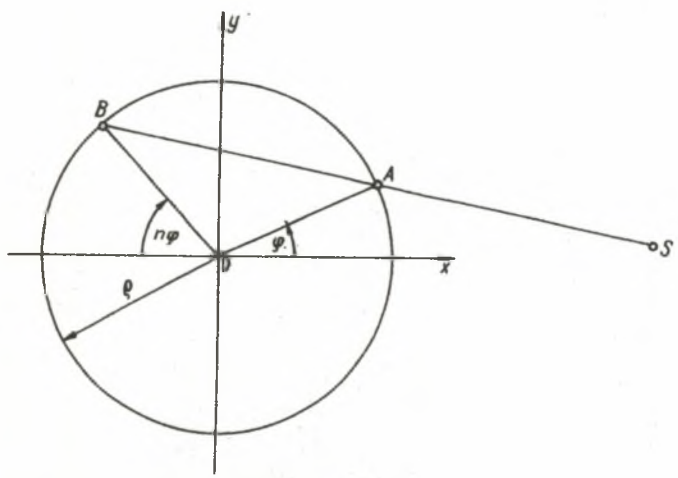
$$\begin{cases} x = \frac{\varrho n}{n+1}\cos\varphi - \frac{\varrho}{n+1}\cos n\varphi \\ y = \frac{\varrho n}{n+1}\sin\varphi - \frac{\varrho}{n+1}\sin n\varphi \end{cases} \tag{4}$$

gdzie φ jest parametrem

b) dla $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} = -\frac{1}{n}$

$$A\{\varrho\cos\varphi;\ \varrho\sin\varphi\}$$

$$B\{-\varrho\cos n\varphi;\ \varrho\sin n\varphi\}$$



Rys. 3

Współrzędne punktu S są więc następujące

$$S\{\varrho\cos\varphi + \frac{\varrho}{n-1}[\cos\varphi + \cos n\varphi];$$

$$\varrho\sin\varphi - \frac{\varrho}{n-1}[-\sin\varphi + \sin n\varphi]\}$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy równania parametryczne obwiedni rodziny K.

$$\begin{cases} x = \frac{\varrho n}{n-1} \cos\varphi + \frac{\varrho}{n-1} \cos n\varphi \\ y = \frac{\varrho n}{n-1} \sin\varphi - \frac{\varrho}{n-1} \sin n\varphi \end{cases} \tag{4'}$$

gdzie: φ jest parametrem

Łatwo stwierdzić, że otrzymane równania są równaniami

a) epicykloidy

b) hipocykloidy

Wystarczy bowiem przyjąć

a) $r = \frac{\varrho}{n+1}$; $R = \varrho\frac{n-1}{n+1}$

b) $r = \frac{\varrho}{n-1}$; $R = \varrho\frac{n+1}{n-1}$

Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Jeżeli mamy daną

a) epicykloidę o równaniach (1)

b) hipocykloidę o równaniach (1')

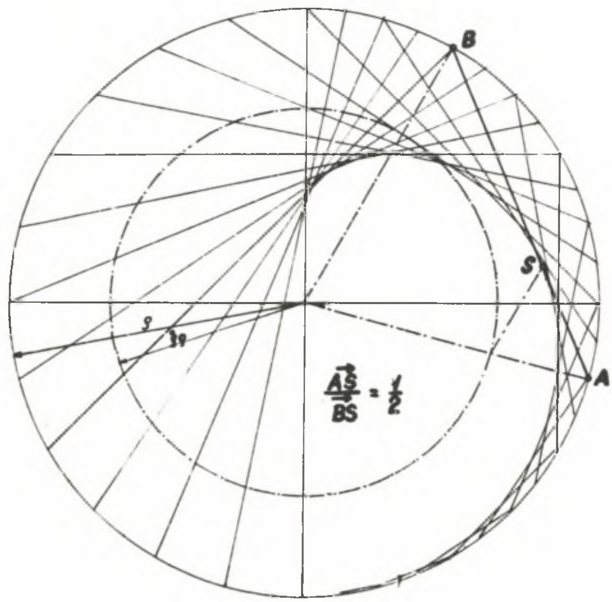
to przyjmując

a) $n = \frac{R+r}{r}$; $\varrho = R + 2r$ (5)

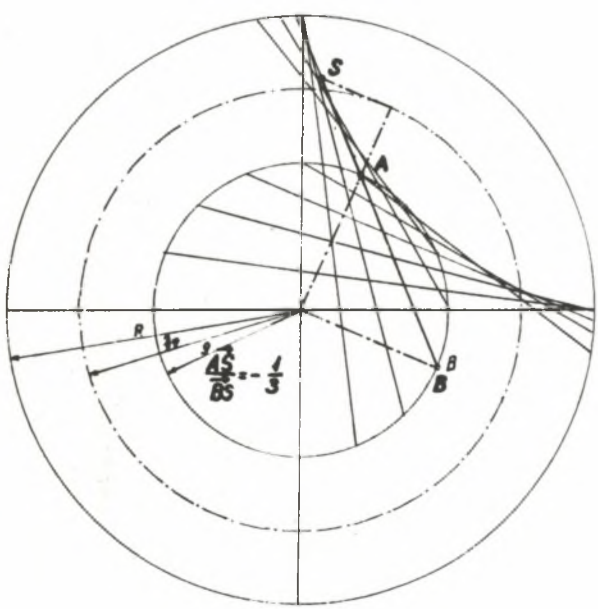
b) $n = \frac{R-r}{r}$; $\varrho = R - 2r$ (5')

możemy zbudować rodzinę prostych, których obwiednią są wyżej wymienione krzywe.

Podzielmy okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = \varrho^2$ na p równych części i oznaczmy punkty podziału $P_1, P_2 \ldots P_i \ldots P_k \ldots P_p$. Łącząc punkty P_1 i P_k, P_2 i $P_{k+n} \ldots$ P_i i $P_{k+(i-1)n}$ otrzymujemy i stycznych do epi- lub hipocykloidy. Dobierając odpowiednio duże p możemy z dowolnie dużą dokładnością aproksymować te krzywe łamaną opisaną.


B
S
A
ρ
3ρ
$\frac{\vec{AS}}{\vec{BS}} = \frac{1}{2}$

Rys. 4


S
A
R
3ρ
ρ
B
B
$\frac{\vec{AS}}{\vec{BS}} = -\frac{1}{3}$

Rys. 5

Przykłady

W oparciu o twierdzenie zbudujemy rodzinę prostych K, dla kardioidy i asteroidy.

a) dla kardioidy (rys. 4) mamy R = r. Podstawiając więc do wzorów (5) otrzymujemy

$$n = 2 \quad i \quad \varrho = 3R$$

b) dla asteroidy (rys. 5) mamy R = 4r. Podstawiając więc do wzorów (5′) otrzymujemy

$$n = 3 \quad i \quad \varrho = \frac{R}{2}$$

Z lematu wynika, że możemy znaleźć punkty izolowane S, dla których w przypadku

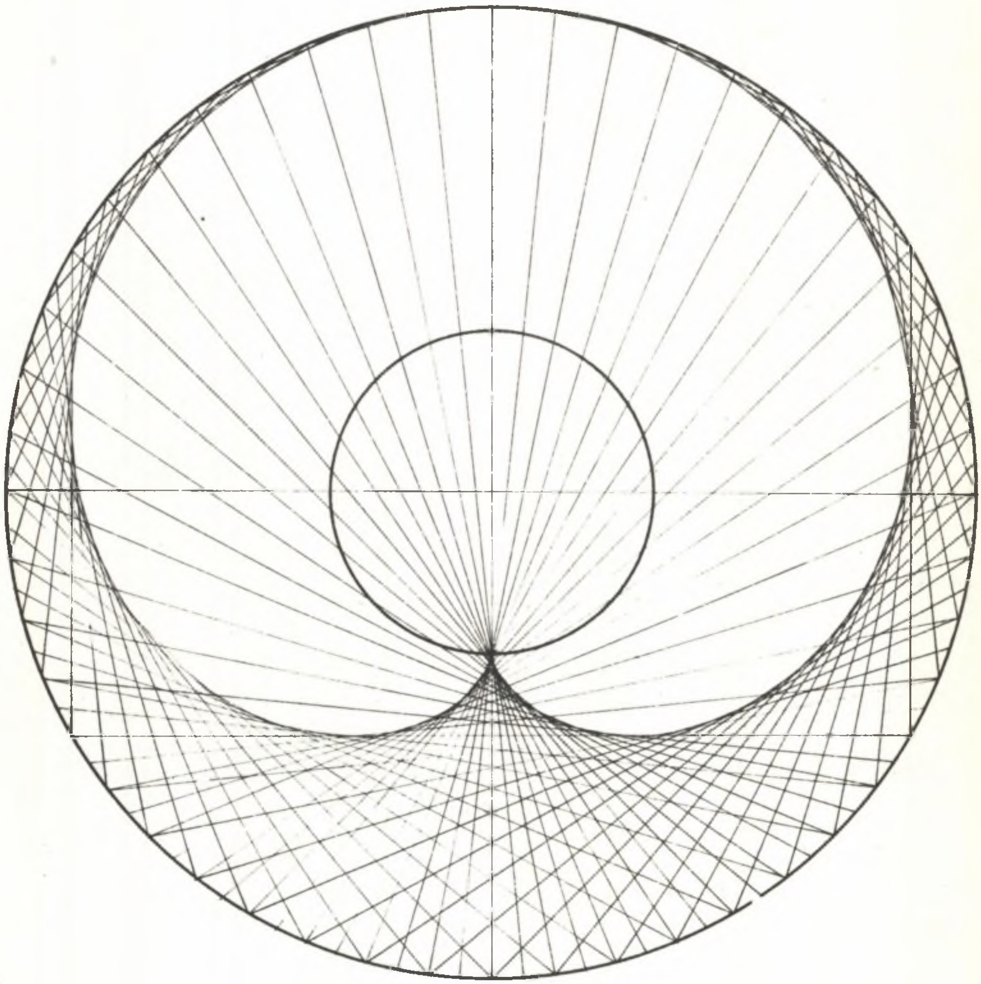
a) kardioidy mamy $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} = \frac{1}{2}$

b) asteroidy mamy $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} = -\frac{1}{3}$

Konstrukcje tych punktów uwidocznione są na rys. 4 i 5.

LITERATURA

[1] Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy, t. 1.



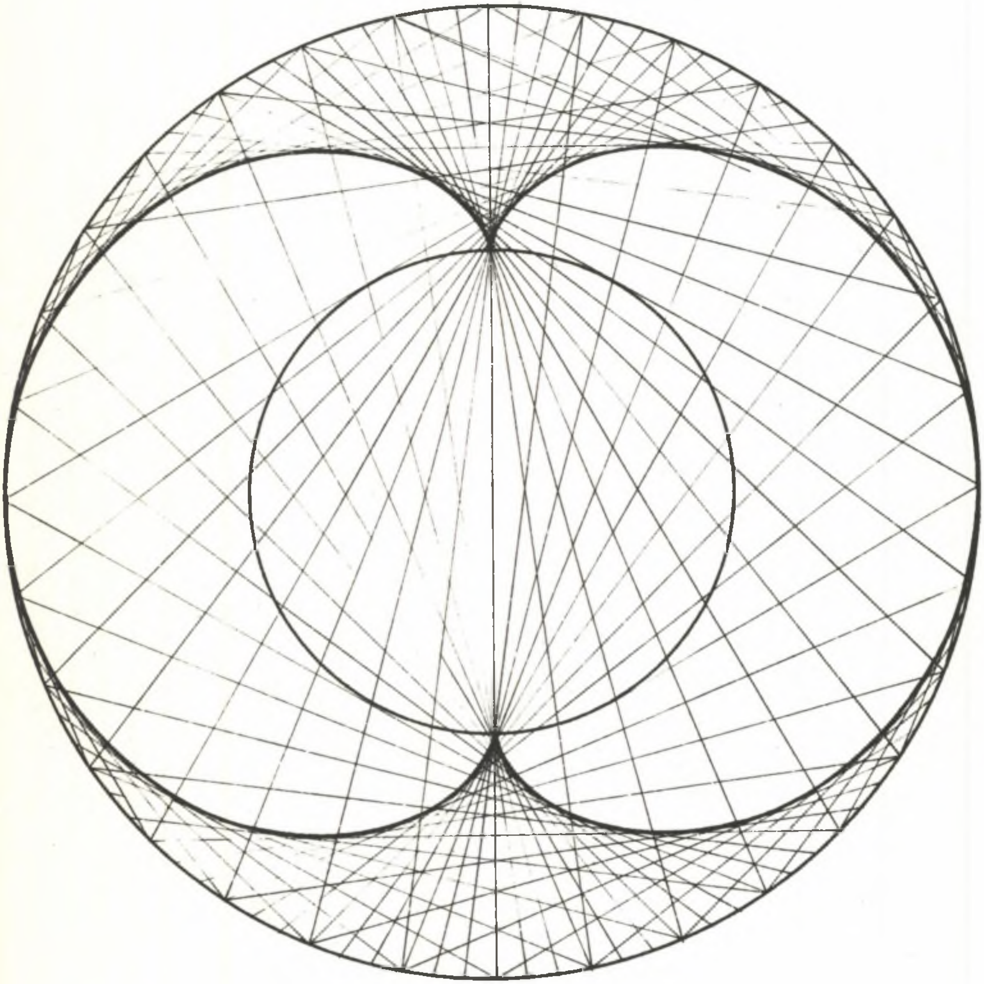
$$\varrho = 9$$

$$n = 2$$

$$r = \frac{\varrho}{n+1} = \frac{9}{2+1} = 3$$

$$R = \varrho\frac{n-1}{n+1} = 9\frac{2-1}{2+1} = 3$$

Rys. 6



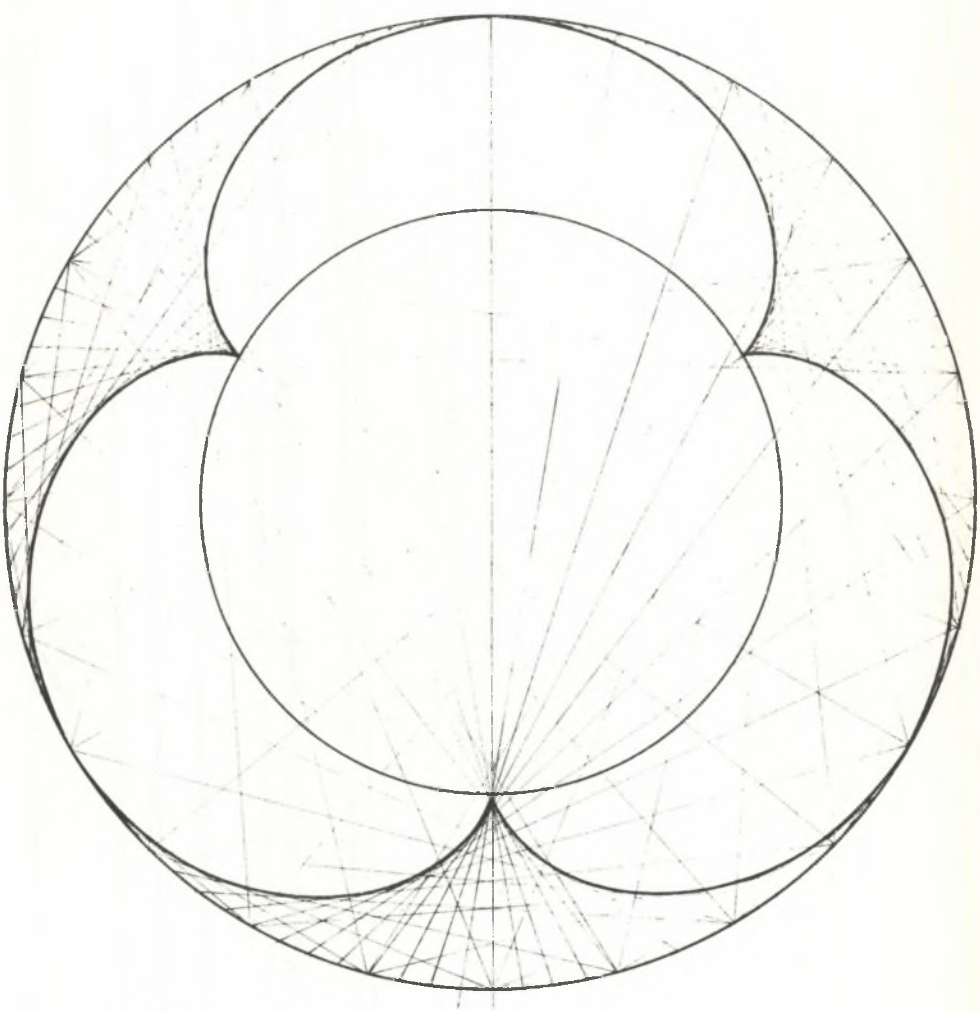
$\varrho = 9$

$n = 3$

$r = \frac{\varrho}{n+1} = \frac{9}{3+1} = \frac{9}{4}$

$R = \varrho \frac{n-1}{n+1} = 9 \frac{3-1}{3+1} = \frac{9}{2}$

Rys. 7



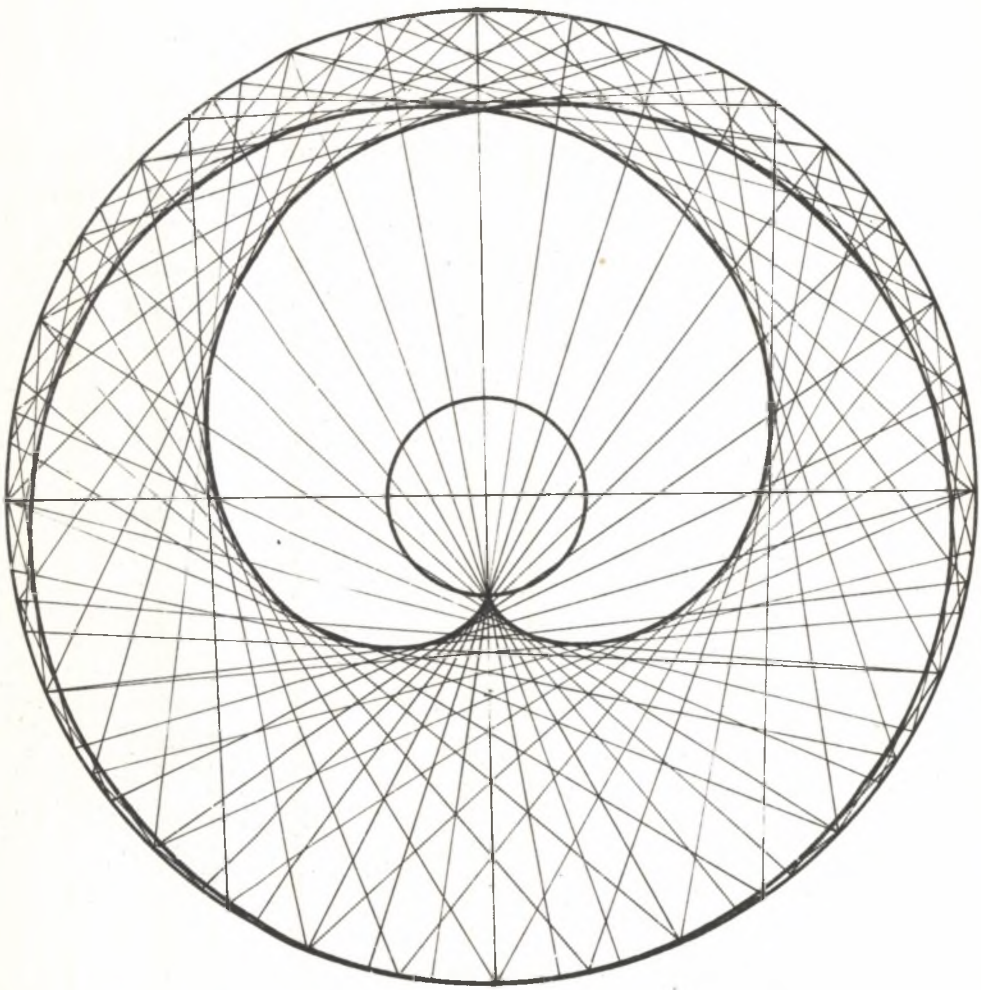
$\rho = 9$

$n = 4$

$r = \frac{\rho}{n+1} = \frac{9}{4+1} = \frac{9}{5}$

$R = \rho\frac{n-1}{n+1} = 9\frac{4-1}{4+1} = \frac{27}{5}$

Rys. 8



$\rho = 9$

$n = 1{,}5$

$r = \frac{\rho}{n+1} = \frac{9}{1+1{,}5} = \frac{18}{5}$

$R = \rho\frac{n-1}{n+1} = 9\frac{1{,}5-1}{1{,}5+1} = \frac{9}{5}$

Rys. 9

О НЕКОТОРОМ СЕМЕЙСТВЕ ПРЯМЫХ, ОГИБАЮЩЕЙ КОТОРОГО ЯВЛЯЕТСЯ ЭПИ ИЛИ ГИПОЦИКЛОИДА

Р е з ю м а

Настоящая статья имеет целью приведение построения некоторого семейства прямых, огибающей которого является эпи или гипоциклоида.

Доказано несколько свойств этого семейства прямых а также приведено приближённый способ построения произвольной из этих кривых.

A FAMILY OF STRAIGHTS THE ENVELOPE WHICH IS THE EPICYCLOID OR HYPOCYCLOID

S u m m a r y

The aim of this note is to give teh construction of a family of straights, the envelope of which is the epicycloid or hypocycloid.

Some properties of the family have been shown as well as the approximate way of any of those curves.