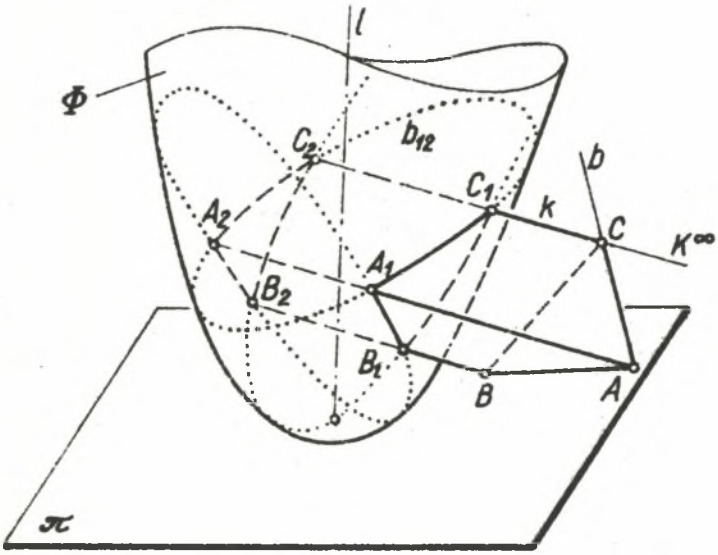
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA-FIZYKA z. 13 Nr kol. 204

MARIAN PALEJ
Katedra Geometrii Wykreślnej

ZWIĄZEK AKOLINEACJI OSIOWO-RÓWNOLEGŁEJ

1. Rozważmy związek łączący dowolną figurę płaską z jej rzutem równoległym na powierzchnię stopnia drugiego. Dla uproszczenia rozważań weźmy pod uwagę dowolny trójkąt ABC i powierzchnię paraboloidy obrotowej Φ o osi prostopadłej do rzutni π (rys. 1). Przyjmijmy dwowolny kierunek $k \measuredangle \pi$. Rzutując w kierunku k trójkąt ABC otrzymujemy na powierzchni Φ dwa



Rys. 1

trójkąty sferyczne $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$. Dowolnemu wierzchołkowi trójkąta płaskiego A odpowiada para jego rzutów A_1 i A_2. Są to punkty przebicia powierzchni Φ prostą rzucającą AK^{∞}

gdzie $K^{\infty} \in k$. Punkty te mogą być rzeczywiste i różne od siebie, rzeczywiste i zjednoczone bądź też wreszcie urojone.

Dowolnej prostej b układu trójkąta odpowie stożkowa b_{12} jako przekrój powierzchni Φ płaszczyzną rzucającą $\varrho = bK^{\infty}$. Przy szczególnym położeniu prostej b stożkowa b_{12} może mieć postać zdegenerowaną lub urojoną.

Odpowiedniość wiążącą elementy układu trójkąta z ich rzutami na powierzchnię Φ nazwijmy akolineacją osiowo-równoległą i oznaczmy symbolem (R). Proste łączące trójki odpowiadających sobie punktów (A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 ...) nazywać będziemy promieniami akolineacji, a ich wspólny kierunek $k \perp \pi$ - kierunkiem akolineacji osiowo-równoległej.

Z pary rzutów F_1 i F_2 dowolnego punktu F incydentnego z powierzchnią Φ co najmniej jeden jednoczy się z oryginałem, tj. zachodzi: $F_1 = F$ lub $F_2 = F$ lub $F_1 = F_2 = F$ gdy $F \in \Phi$ Zbiór punktów wspólnych rozważanego układu płaskiego (układu trójkąta ABC) z powierzchnią Φ ma więc własność szczególną. Zbiór ten stanowiący pewną stożkową t nazywać będziemy osią akolineacji (R).

Zauważmy, że związek (R) można rozpatrywać jako pewną analogię związku akolineacji środkowo-osiowej (A) [1], w którym środek akolineacji W stał się punktem niewłaściwym i nie leży na powierzchni Φ.

Dokonajmy rzutu prostokątnego na płaszczyznę π trójkąta ABC i przyporządkowanych mu akolineacyjnie w związku (R) trójkątów sferycznych $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ (rys. 2). Ponieważ rzuty elips leżących na powierzchni paraboloidy Φ będą okręgami, a rzuty parabol przynależnych do Φ - prostymi - w wyniku otrzymamy dwa trójkąty"sferyczne" $A'_1B'_1C'_1$ i $A'_2B'_2C'_2$ o bokach w postaci łuków okręgów bądź odcinków prostych oraz trójkąt zwykły $A'B'C'$.

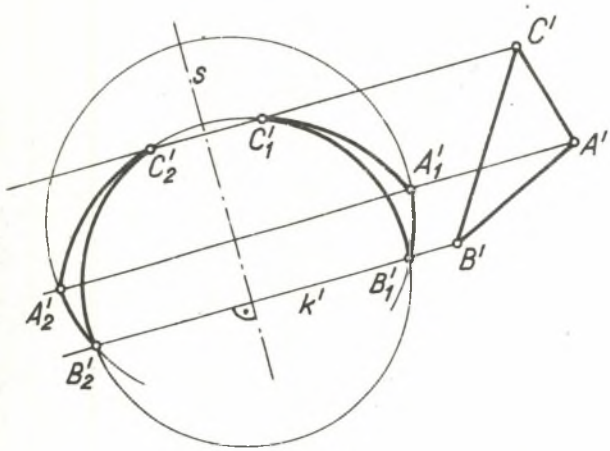
Nietrudno zauważyć, że własności charakterystyczne dla związku (R) łączącego figury ABC i $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$ występują również w rzutach tych figur, w szczególności bowiem:

1) punktowi A' odpowiada para punktów A'_1 i A'_2,
2) odpowiadające sobie trójki punktów A', A'_1, A'_2, B', B'_1, B'_2 itp. leżą na prostych równoległych ($A'A'_1A'_2 \parallel k$),

3) odpowiadające sobie boki dwu trójkątów "sferycznych" np. $A'_1B'_1$ i $A'_2B'_2$ leżą na wspólnej stożkowej,

4) istnieje zbiór takich punktów (rzeczywistych lub urojonych), w których jednoczą się elementy układu trójkąta $A'B'C'$ z odpowiadającymi im, pojedynczymi w ogólnym przypadku elementami trójkątów "sferycznych". Zbiór ten jest rzutem osi akolineacji t.

Mamy więc do czynienia z związkiem akolineacji osiowo-równoległej (R') wiążącej trójkąt $A'B'C'$ z trójkątami "sferycznymi" $A'_1B'_1C'_1$ i $A'_2B'_2C'_2$. Na marginesie rys. 2 zauważmy, że pomiędzy



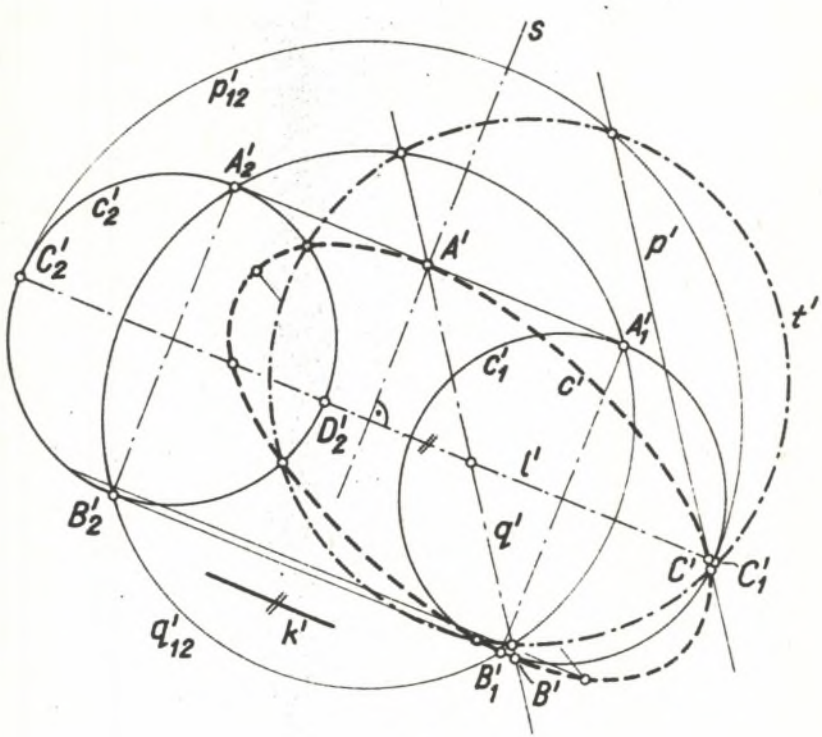
Rys. 2

trójkątami "sferycznymi" $A'_1B'_1C'_1$ i $A'_2B'_2C'_2$ ustalić można symetrię prostokątną. Osią symetrii jest symetralna odcinka łączącego dwa przyporządkowane sobie punkty np. A'_1 i A'_2. Uwaga ta pozwala na pewne uproszczenie rysunkowe polegające na umownym zastąpieniu jednego z układów trójkątów "sferycznych" samą osią symetrii s.

2. W dalszym ciągu naszych rozważań przyjmijmy na paraboloidzie obrotowej Φ dowolną elipsę c_1 i dowolny kierunek $k \not\parallel \pi$. Jest jasne, że rzut elipsy c_1 w kierunku k na po-

wierzchnię Φ będzie również elipsą (c_2), gdyż powierzchnia rzucająca Γ_k jest powierzchnią walcową stopnia drugiego (o tworzących równoległych do k) i z założenia posiada wspólną stożkową c_1 z powierzchnią paraboloidy Φ. Rzutami prostokątnymi na płaszczyznę π prostopadłą do osi paraboloidy obydwu elips c_1 i c_2 będą okręgi o równych promieniach i wspólnych stycznych równoległych do k'.

Wprowadzając dowolną płaszczyznę tnącą φ określoną przez krzywą przekroju paraboloidy $t = \varphi\Phi$ można rozważyć konstrukcję elipsy c' jako rzutu prostokątnego na π elipsy c powstałej z przekroju powierzchni Γ_k płaszczyzną φ czyli konstrukcję krzywej osiowo-równolegle akolineacyjnej względem danych dwu okręgów c_1' i c_2'.



Rys. 3

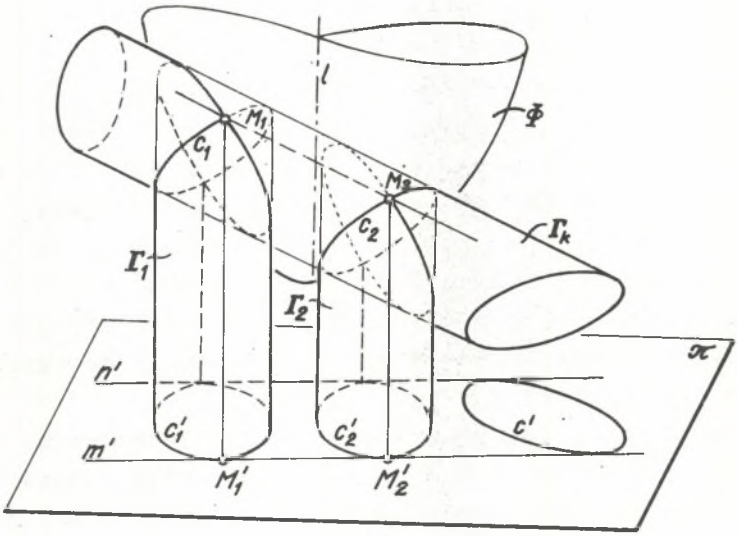
Konstrukcję taką przedstawiono na rys. 3. Momentem wyjściowym konstrukcji jest przyjęcie w układach c'_1 i c'_2 pomocniczych okręgów, którym akolineacyjnie w układzie c' odpowiadać będą proste.

Dążąc do otrzymania średnic sprzężonych elipsy c' na rys. 3 przyjęto: okrąg q'_{12} przynależny do końców średnic okręgów $A'_1B'_1$ i $A'_2B'_2$ oraz okrąg p'_{12} przynależny do końców średnic sprzężonych - punktów C'_1 i C'_2. Okręgom odpowiadają akolineacyjnie proste q' i p'. Na prostych tych przy pomocy kierunku akolineacji wyznacza się średnicę elipsy $A'B'$ i koniec średnicy sprzężonej C'. Prosta p' winna być styczna do elipsy w punkcie C', gdyż okrąg p_{12} jest styczny do okręgów c'_1 i c'_2 w odpowiednich punktach C'_1 i C'_2.

Zauważyć należy, że z czterech punktów leżących na okręgach c'_1 i c'_2 i prostej $l' \parallel k'$ para odpowiednich punktów C'_1 i C'_2 nie może być dobrana dowolnie. Gdyby na przykład uważać za punkty pary C'_1 i D'_2 byłoby to sprzeczne z interpretacją przestrzenną związku akolineacji osiowo-równoległej. Wówczas bowiem elipsy c_1 i c_2 incydentne z powierzchnią paraboloidy obrotowej Φ i pewną powierzchnią walcową Γ_k musiałyby leżeć w dwóch równoległych płaszczyznach pozostając w relacji przystawania (okręgi c'_1 i c'_2 są przystające!). Aby było to możliwe paraboloida Φ musiałaby posiadać własności powierzchni walcowej.

W praktyce większe znaczenie wydaje się posiadać konstrukcja odwrotna: dana jest dowolna elipsa c', wyznaczyć okręgi c'_1 i c'_2 akolineacyjne z elipsą c'.
Udowodnimy, że zawsze istnieje rozwiązanie, przy czym okręgi c'_1 i c'_2 można przyjąć dowolnie byleby z daną elipsą c' posiadały one parę równoległych, wspólnych stycznych.
Weźmy dla przykładu dowolne dwa okręgi c'_1 i c'_2 oraz elipsę c' (rys. 4) o dwóch równoległych, wspólnych stycznych m' i n'. Rozważmy powierzchnie walcowe Γ_1 i Γ_2, których kierującymi są odpowiednio okręgi c'_1 oraz c'_2, a tworzące spełniają warunek prostopadłości do płaszczyzny kierujących. Wprowadźmy dowolną paraboloidę obrotową Φ o osi równoległej do tworzą-

cych powierzchni Γ_1 i Γ_2. Częścią linii przenikania powierzchni Γ_1 i Γ_2 z paraboloidą Φ będą elipsy c_1 i c_2.



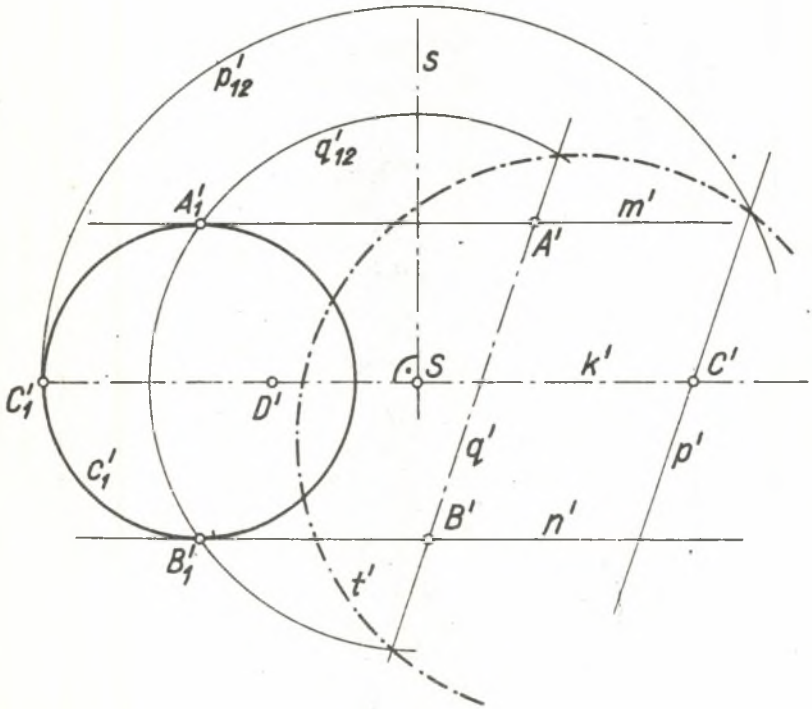
Rys. 4

Weźmy pod uwagę powierzchnię walcową Γ_k opisaną na elipsie c_2, o tworzącej M_1M_2 (rys. 4). Powierzchnia Γ_k przenika się z paraboloidą Φ w dwóch elipsach, z których jedną stanowi elipsa c_2 - drugą elipsa $\bar{c}_1$ incydentna z punktem M_1 (punkt c_1' leży na elipsie M_1 a zatem jest punktem powierzchni Φ). Zauważmy, że rzutem tworzącej M_1M_2 jest m' i konsekwentnie - n' przedstawia w rzucie drugą tworzącą zarysu powierzchni Γ_k. Elipsa $\bar{c}_1$ w rzucie na płaszczyznę rysunku będzie okręgiem przechodzącym przez punkt M_1' stycznie do prostych m' i n'. Oznacza to, że $\bar{c}_1' = c_1'$. Ponieważ jednak obydwie elipsy $\bar{c}_1$ i c_1 z założenia leżą na powierzchni paraboloidy Φ dochodzimy do wniosku, że są one identyczne, czyli, że $\bar{c}_1 = c_1$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że dowolnie przyjęte okręgi c_1' i c_2 (rys. 4) można zawsze traktować jako rzut linii przenikania z powierzchnią paraboloidy obrotowej, określonej powierzchni walcowej Γ_k. Pozostaje dowieść, że powierzchnię Γ_k

można przeciąć w elipsie, której rzut pokrywa się z c'. Ponieważ jednak, zgodnie z założeniem, proste m' i n' są wspólnie styczne do okręgów c'_1 i c'_2 oraz do elipsy c', rozważana własność powierzchni Γ_k wynika z istnienia związku powinowactwa osiowego łączącego elipsę c' z jednym z pary okręgów c'_1 i c'_2.

Na rys. 5 w oparciu o powyższe rozważania wyznaczono związek akolineacji osiowo-równoległej przyporządkowujący danej elipsie



Rys. 5

dwa okręgi. Elipsa c' dana jest parą średnic sprzężonych $A'B'$ i $C'D'$. Przyjmując jedną z średnic – $C'D'$ za kierunek akolineacji k', stycznie do prostych: $m' \ni A'$, $n \in B'$, $m' \parallel n' \parallel k'$ wpisano dowolny okrąg c'_1. W miejsce drugiego okręgu c'_2 obrano jedynie oś symetrii s. Okręgi o środku w punkcie S:

$q'_{12} \in A'_1, B'_1$ i $p'_{12} \in C'_1$ odpowiadają akolineacyjnie prostym $q' = A'B'$ i $p' \parallel q'$, $p' \in C'$. Punkty przecięcia odpowiadających sobie utworów: p'_{12} i p' oraz q'_{12} i q' leżą na osi akolineacji t'.

Na marginesie tej kontrukcji wskazać można przykład ewentualnego jej zastosowania. Zauważmy, że punkty przecięcia osi alkolineacji t' z okręgiem c'_1 są punktami przecięcia okręgu c'_1 z elipsą c'. Punkty takie w omawianym położeniu wyznacza się prosto za pomocą powinowactwa łączącego okrąg z elipsą.

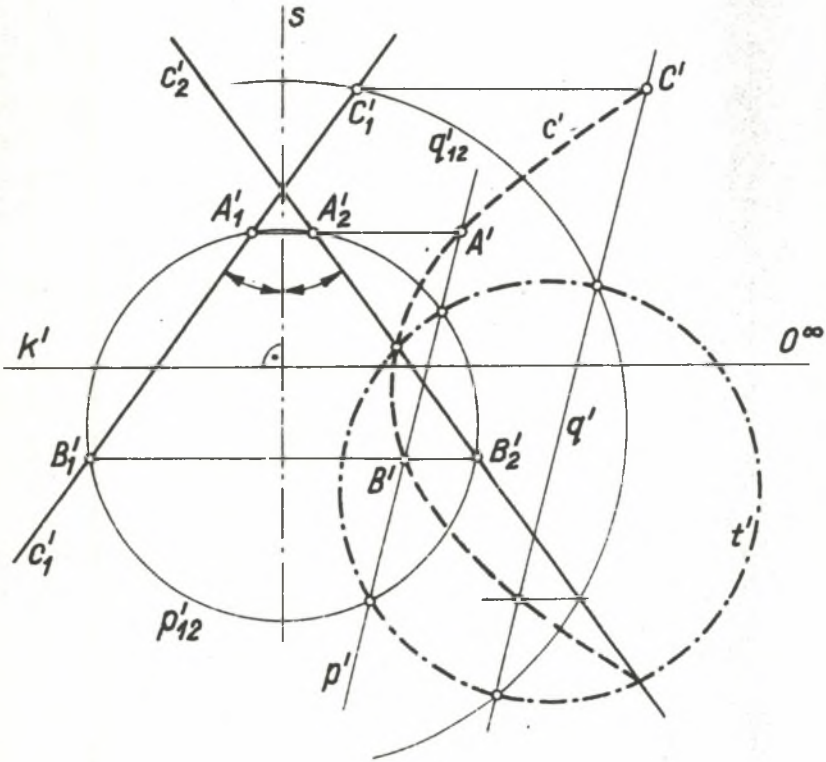
W przypadku jednak gdyby znalezienie osi powinowactwa wymagało dodatkowych konstrukcji pomocniczych (np. w przypadku przecinania się poza obrębem rysunku jednej pary prostych powinowatych $A'B'$ i $A'_1B'_1$) - pośrednictwo osi akolineacji w miejsce osi powinowactwa może się okazać celowe.

3. Rozważmy z kolei możliwość zastosowania akolineacji osiowo-równoległej do konstrukcji związanych z parabolą. W tym celu weźmy pod uwagę dowolną parabolę c_1 leżącą na powierzchni paraboloidy obrotowej Φ (o osi prostopadłej do rzutni π) i rozpatrzmy powierzchnię walcową Γ_k opisaną na tej paraboli. Kierunek tworzących k przyjmijmy dowolnie z wykluczeniem $k \perp \pi$. Powierzchnia Γ_k przenika się z powierzchnią paraboloidy w krzywej stopnia czwartego, której jedną częścią jest parabola c_1. Wynika stąd, że drugą częścią linii przenikania będzie również stożkowa - parabola c_2.

Rozważmy przekrój powierzchni walcowej Γ_k dowolną płaszczyzną $\varphi \perp \pi$. W ogólnym przypadku będzie nim parabola c. Zgodnie z powyższymi uwagami parabole c, c_1 i c_2 złączone są pewnym związkiem akolineacji owiowo-równoległej (R). Promieniami akolineacji są tworzące powierzchni Γ_k, osią - stożkowa przekroju powierzchni paraboloidy płaszczyzną φ. Dokonajmy rzutu prostokątnego na π układów złączonych związkiem (R). Rzutami parabol c_1 i c_2 będą proste c'_1 i c'_2 - rzutem paraboli c - parabola c'. Pomiędzy prostymi c'_1 i

c_2' oraz parabolą c' zachodzić będzie związek akolineacji osiowo-równoległej (R'). Jest oczywiste, że kierunkiem akolineacji (R') jest rzut kierunku akolineacji (R), a osią związku (R') - rzut osi związku (R).

Przykład akolineacyjnego przekształcenia pary prostych c_1' i c_2' w parabolę przedstawia rys. 6. Zgodnie z warunkiem



Rys. 6

symetrii układów c_1' i c_2' wyprowadzonym dla przypadków ogólnych - kierunek akolineacji przyjęto prostopadle do symetralnej kąta $c_1'c_2'$. Oś akolineacji t' obrana została dowolnie.

Poszczególne punkty paraboli uzyskano za pomocą współosiowych okręgów w układzie prostych c_1' i c_2' i przyporządkowanych im akolineacyjnie prostych.

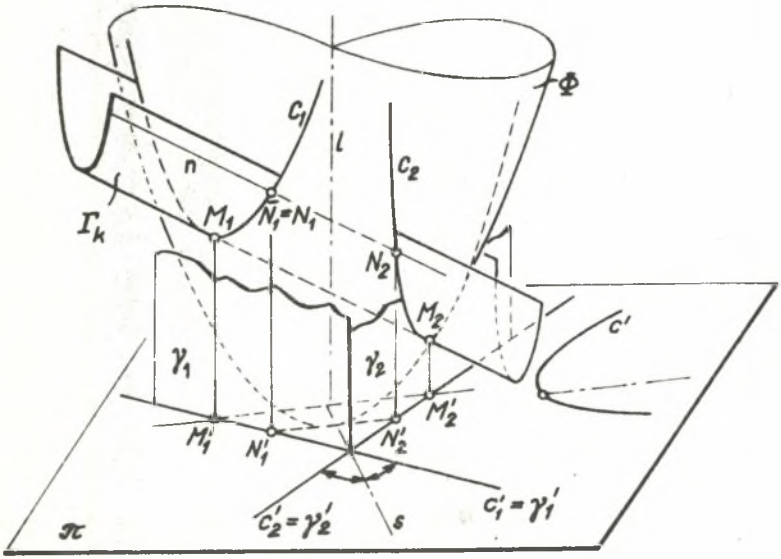
Tak np. okręgowi p'_{12} przechodzącemu przez punkty $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$ prostych c'_1 i c'_2 odpowiada prosta p' zawierająca punkty A' i B' paraboli.
Łatwo wykazać, że środek paraboli c' jest niewłaściwym punktem prostej k'.

Rozważmy bowiem interpretację przestrzenną konstrukcji. Proste c'_1 i c'_2 są rzutami na π parabol c_1 i c_2 o osiach z założenia prostopadłych do π. Parabolę c akolineacyjną z c_1 i c_2 traktować można jako ich rzut w kierunku k na pewną, określoną osią akolineacji t płaszczyznę φ. Płaszczyzny rzucające osie parabol c_1 i c_2 są prostopadłe do π. W rezultacie więc po dokonaniu rzutów prostokątnych na π parabol c_1, c_2, c i kierunku k otrzymuje się proste c'_1 i c'_2, parabolę c' i kierunek k' incydentny z rzutami osi parabol c_1 i c_2. Kierunek k' jest zatem średnicą paraboli c'.

W konstrukcji odwrotnej tj. w akolineacyjnym przyporządkowaniu danej paraboli c' dwóch prostych c'_1 i c'_2 stwierdzimy, że istnieje zawsze rozwiązanie, przy czym jedynym warunkiem, jakim odpowiadać mają proste c'_1 i c'_2 jest to, aby symetralna ich kąta była prostopadła do średnicy paraboli c'.

Dla dowodu weźmy pod uwagę dowolną parabolę c' i odpowiadające powyższemu warunkowi proste c'_1 i c'_2 (rys. 7). Przyjmijmy dowolną paraboloidę obrotową Φ o osi l prostopadłej do płaszczyzny rysunku i płaszczyzny: $\gamma_1 \in c'_1$, $\gamma_1 \parallel l$, $\gamma_2 \in c'_2$, $\gamma_2 \parallel l$. Płaszczyzny γ_1 i γ_2 przecinają paraboloidę w parabolach c_1 i c_2. Rozważmy prostą łączącą takie dwa punkty parabol c_1 i c_2 - M_1 i M_2, których rzuty są prostokątnie symetryczne względem dwusiecznej kąta $c'_1c'_2$ - s. Prostą tę traktujemy jako kierunek tworzących powierzchni walcowej Γ_k opisanej ma paraboli c_2. Powierzchnia Γ_k przechodząc przez parabolę c_2 przenika się z paraboloidą Φ w jeszcze jednej paraboli $\bar{c}_1$, incydentnej z punktem M_1. Weźmy pod uwagę dowolny punkt N_2 paraboli c_2 i przynależną do niego tworzącą n powierzchni Γ_k. Zbadajmy położenia punktu $\bar{N}_1 = n\bar{c}_1$ czyli drugiego punktu przebicia tworzącą n

powierzchni paraboloidy. W tym celu wprowadźmy przez n pomocniczą płaszczyznę tnącą ν incydentną z prostą M_1M_2. Płaszczyzna ν przecina paraboloidę Φ w elipsie e przechodzącej



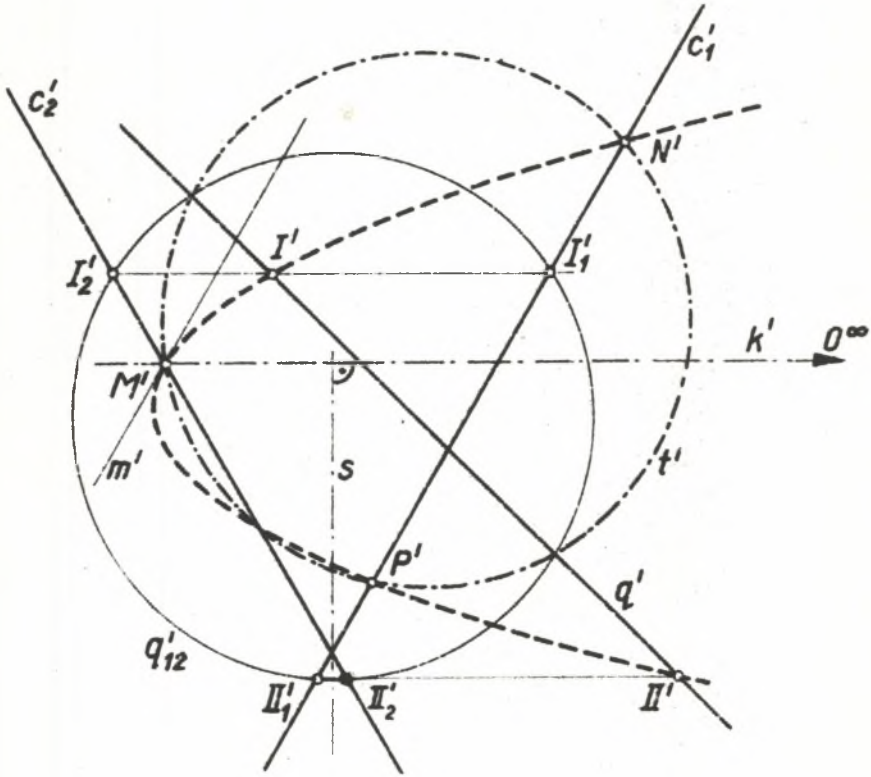
Rys. 7

przez punkty M_1, M_2, N_2 i $\bar{N}_1$. Prostokątnym rzutem elipsy e na płaszczyznę rysunku jest okrąg przechodzący przez znane punkty M'_1, M'_2, N'_2. Z własności okręgu wynika, że punkt $\bar{N}'_1$ tworzącej $n' \parallel M'_1M'_2$ leży na prostej $c'_1 = \gamma'_1$. Wnosimy stąd, że punkt $\bar{N}'_1$ leży na paraboli c_1, czyli, że parabola $\bar{c}_1$, w której powierzchnia Γ_k przenika się z powierzchnią paraboloidy Φ jest zjednoczona z parabolą c_1.

Udowodniliśmy, że dla dowolnie przyjętych prostych c'_1 i c'_2 można wskazać powierzchnię walcową Γ_k przenikającą się z paraboloidą obrotową Φ w takich dwóch parabolach c_1 i c_2, których rzuty jednoczą się z prostymi c'_1 i c'_2.
Pozostaje dowieść, że dowolnie przyjęta parabola c' (rys. 7) o średnicy pokrywającej się z rzutem tworzącej powierzchni Γ_k może być rzutem przekroju tej powierzchni określoną płaszczyz-

ną φ. Zwróćmy uwagę, że rozważana przez nas paraboloida Φ nie była jednoznacznie zdefiniowana. Stawiane jej wymagania ograniczały się jedynie do prostopadłości osi względem płaszczyzny rysunku.

Można zatem postąpić następująco: obrać dowolną parabolę c tak by jej rzut na płaszczyznę rysunku pokrywał się z c' i rzucić ją w kierunku k na płaszczyzny γ_1 i γ_2. Otrzymane w ten sposób parabole $c_1 \in \gamma_1$ i $c_2 \in \gamma_2$ można uważać za przynależne do pewnej paraboloidy obrotowej Φ (o osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku) jeżeli kierunek k został przyjęty w ten sposób, że jego rzut k' jest jedną z średnic paraboli c'. W takim przypadku parabole c, c_1 i c_2 złączone są pewnym związkiem akolineacji osiowo-równoległej (R).



Rys. 8

Wynika stąd, że istnieje związek akolineacji osiowo-równoległej (R') wiążący parabolę c' z prostymi c'_1 i c'_2.

Na rys. 8, w oparciu o powyższe rozważania, przekształcono dowolną parabolę c' w parę prostych c'_1 i c'_2. Parabola c' dana jest średnicą i styczną m' przynależną do punktu M' oraz punktem N'. Dla uproszczenia konstrukcji prostą c'_1 wykreślono przez punkt N' równolegle do stycznej m', znajdując na niej kolejny punkt paraboli P'. Prostą c'_2 przyjęto symetrycznie względem prostopadłej do kierunku akolineacji, zachowując warunek $c'_2 \in M'$. Dzięki takim założeniem oś akolineacji jest już ustalona, gdyż znane są trzy jej punkty M', N', P' (punkty zjednoczone układów akolineacyjnych).

Dysponując elementami określającymi związek (R') zachodzący pomiędzy parabolą c' i prostymi c'_1 i c'_2 rozwiązano zadanie dotyczące wyznaczenia punktów przecięcia paraboli c' dowolną prostą q.

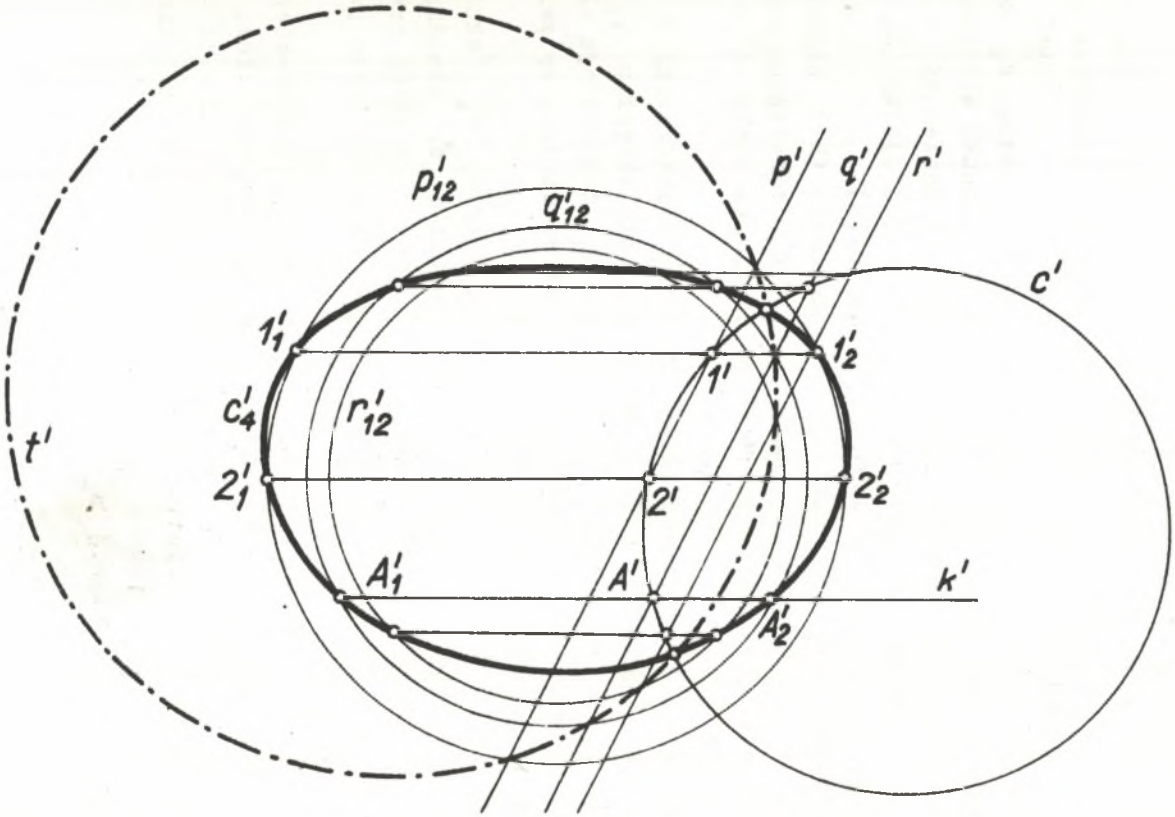
W tym celu skonstruowano okrąg q'_{12} przyporządkowany w związku (R') prostej q'[x]. Punkty przecięcia okręgiem q'_{12} prostych c'_1 i c'_2 - I'_1, I'_2 i II'_1, II'_2 odpowiadają akolineacyjnie szukanym punktom I', II', które znajdujemy za pomocą kierunku akolineacji na prostej q'.

4. Na rys. 9 przedstawiono konstrukcję krzywej c'_4 akolineacyjnej osiowo-równolegle z dowolnym okręgiem c'. Odnośny związek akolineacji (R') ustalony został przez dowolne przyjęcie osi t', kierunku k' i pary odpowiadających sobie punktów A' i A'_1.

Jak wynika to z definicji związku akolineacji osiowo-równoległej (R), krzywą c'_4 interpretować można jako rzut linii przenikania z paraboloidą obrotową pewnej powierzchni walcowej Γ. Kierującą powierzchni Γ byłaby stożkowa c, kierunkiem tworzących - prosta k. Warto zwrócić uwagę, że wyznaczanie punktów krzywej c'_4 na rys. 9 oparto o rozważanie

---

x) Okrąg taki wyznacza się bezpośrednio, gdyż znane są dwa jego punkty przecięcia z prostą q' (punkty przecięcia q' z osią akolineacji), a ponadto wiadomo, że środek musi leżeć na osi symetrii zachodzącej pomiędzy prostymi c'_1 i c'_2.



Rys. 9

pęku prostych równoległych p', q', r' w układzie okręgu c'. Prostym tym odpowiadają współśrodkowe okręgi p'_{12}, q'_{12}, r'_{12}. Punktom przecięcia prostymi p', q', r' okręgu c' odpowiadają na okręgach p'_{12}, q'_{12}, r'_{12} i na kierunku akolineacji pary punktów incydentnych z krzywą c'_4.

Wpłynęło do Redakcji 29.9.67 r.

LITERATURA

[1] M. Palej - Związki akolineacji środkowej - Zeszyty Naukowe Politechniki Śl. - Seria Matematyka-Fizyka nr 7 - 1965.

ОБ ОДНОМ ОСЕВО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ НЕКОЛЛИНЕАРНОМ СООТВЕТСТВИИ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено соответствие установленное между произвольным плоским полем и его параллельной проекцией на поверхность 2-го порядка. Рассмотрено тоже соответствие между параллельными проекциями обеих полей на плоскость.

Это соответствие не сохраняющее коллинеарности рассмотрено как частный случай так называемой центральной аколлинеации.

Подробному обсуждению подвергнуто случай, в котором поверхностью 2-го порядка является параболоид вращения, а плоскость проекции - перпендикулярная оси параболоида.

Доказано возможность аколлинеарного преобразования эллипса на две окружности а парабола - на две прямые. Рассмотрено возникающие отсюда некоторые конструкции.

ÜBER EINE NICHTLINEARE PARALLEL-ACHSIGE VERWANDSCHAFT

Zusammenfassung

Man hat eine nichtlineare Verwandschaft besprochen, die zwischen einem ebenen System und seiner Parallelprojektion auf eine Drehfläche zweiter Ordnung besteht.

In entsprechenden Erwägungen ist auch die Verwandschaft berücksichtigt, die zwischen Parallelprojektionen der erwähnten Systeme besteht. Die erörterte Verwandschaft, die keine Kollineation bewahrt kann man als ein Grenzfall sogenannter perspektiven Akollineation betrachten.

Insbesondere wurde ein Fall besprochen, in dem als Drehfläche zweiter Ordnung ein Drehparaboloid genommen wird und die Projektionsebene senkrecht zur Achse steht.

Es wurde auf die Möglichkeit so einer Umwandlung hingewiesen, die eine Ellipse auf zwei Kreise und eine Parabel auf zwei Geraden überführt.