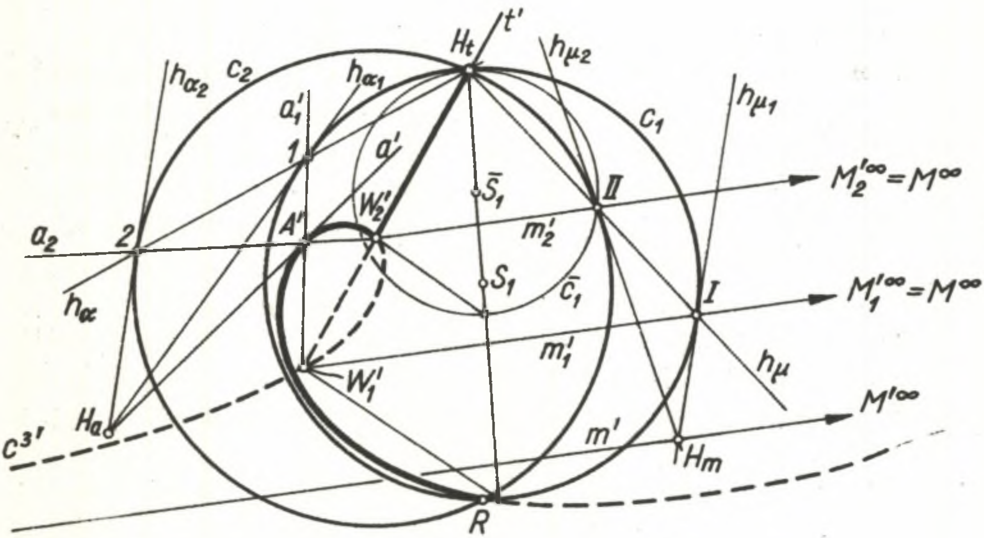
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 13 Nr kol. 204

STANISŁAW OCHOŃSKI
Katedra Geometrii Wykreślnej

KONSTRUKCJA ASYMPTOT NIEKTÓRYCH KRZYWYCH PRZESTRZENNYCH RZĘDU 3

Weźmy pod uwagę dwie powierzchnie stożkowe nieobrotowe Γ_1 i Γ_2 o wspólnej tworzącej t, których śladami na rzutni π (płaszczyźnie rysunku) są okręgi c_1 i c_2.

Na rys. 1 powierzchnie te przedstawiono w rzucie prostokątnym na płaszczyznę rysunku, przy założeniu, że wspólna ich



Rys. 1

tworząca nie jest prostopadła do rzutni. Dwie powierzchnie drugiego stopnia w ogólności przenikają się w algebraicznej krzywej przestrzennej rzędu czwartego.

W rozważanym przypadku krzywa ta rozpada się na linię prostą (wspólną tworzącą t powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2) oraz krzywą przestrzenną rzędu trzeciego.
Wykażemy, że krzywa ta jest elipsą sześcienną (kubiczną), to jest krzywą przestrzenną rzędu trzeciego, którą płaszczyzna niewłaściwa przecina w jednym tylko punkcie rzeczywistym, a zatem posiadającą jedną właściwą asymptotę.

Płaszczyzna rysunku przecina powierzchnie stożkowe Γ_1 i Γ_2 w okręgach c_1 i c_2. Z kolei okręgi c_1 i c_2 przecinają się w dwóch rzeczywistych punktach właściwych H_t i R oraz w dwóch punktach kołowych (izotropowych) K_1^∞ i K_2^∞ leżących na prostej niewłaściwej płaszczyzny rysunku.
Punkty H_t, R, K_1^∞ i K_2^∞ są punktami linii przenikania powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2 - punkt H należy do prostej t (wspólnej tworzącej), zaś punkty R, K_1^∞ i K_2^∞ są punktami krzywej przestrzennej rzędu trzeciego.

Rozważmy z kolei przekrój tej krzywej płaszczyzną niewłaściwą, która przechodzi przez prostą niewłaściwą płaszczyzny rysunku, a na której znajdują się punkty kołowe K_1^∞ i K_2^∞.
A zatem płaszczyzna niewłaściwa przecina krzywą przestrzenną rzędu trzeciego w dwóch punktach kołowych K_1^∞ i K_2^∞ oraz w jednym tylko punkcie rzeczywistym M^∞, ponieważ każda płaszczyzna z krzywą skośną rzędu trzeciego nie może mieć więcej niż trzy punkty wspólne. Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że rozważana krzywa przestrzenna rzędu trzeciego posiada jedną właściwą asymptotę.

W artykule tym podamy efektywną konstrukcję kierunku asymptotycznego krzywej przestrzennej rzędu trzeciego, będącej częścią składową linii przenikania powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2.
Poszczególne punkty tej krzywej, a następnie ich rzuty wyznaczono, przecinając powierzchnie Γ_1 i Γ_2 pękiem płaszczyzn o osi t.
Dowolna płaszczyzna α tego pęku płaszczyzn, przecina powierzchnię Γ_1 w tworzących t i a_1, zaś powierzchnię Γ_2 w tworzących t i a_2, (rys. 1).

Punkt $A = a_1 \cdot a_2$ jest punktem wspólnym tych powierzchni i zarazem punktem krzywej przestrzennej rzędu trzeciego, zaś punkt $A' = a'_1 \cdot a'_2$ jest punktem rzutu tej krzywej.
Styczna a w dowolnym (nie podwójnym) punkcie A krzywej przenikania dwóch powierzchni drugiego stopnia Γ_1 i Γ_2 jest krawędzią przecięcia płaszczyzn α_1 i α_2 stycznych w tym punkcie A do tych powierzchni.
Jej rzut, a więc prosta a' łącząca punkt A' z punktem $H_t = h_{\alpha_1} \cdot h_{\alpha_2}$ jest styczną do rzutu krzywej przestrzennej rzędu trzeciego w punkcie A'.

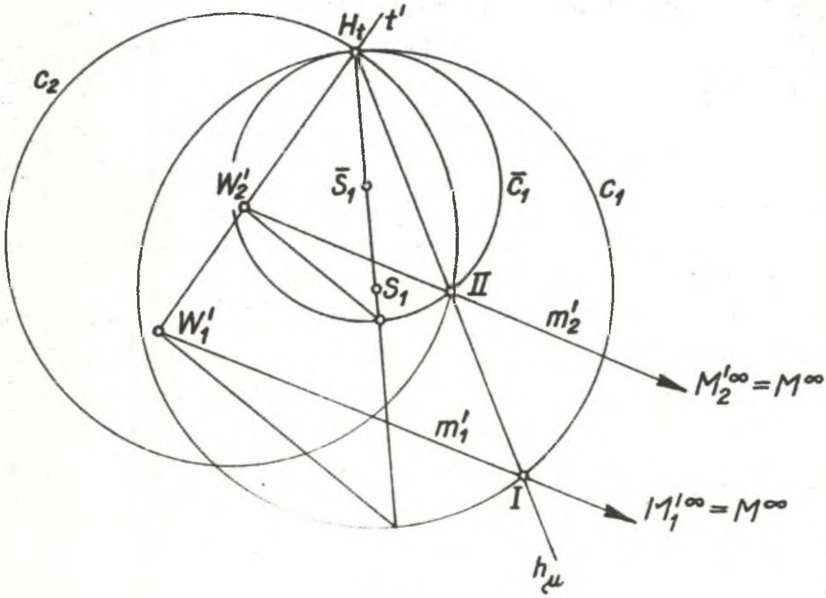
A zatem stwierdzamy, że konstrukcja kierunku asymptotycznego krzywej przestrzennej rzędu trzeciego sprowadza się do wyznaczenia punktu niewłaściwego linii przenikania powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2.

W tym celu należy spośród płaszczyzn pęku o osi t, wybrać taką płaszczyznę μ, która powierzchnie stożkowe Γ_1 i Γ_2 przecina w tworzących m_1 i m_2 posiadających wspólny punkt niewłaściwy $M^\infty = M_1^\infty = M_2^\infty$.
Z uwagi na to, iż równoległość prostych jest niezmiennikiem rzutu równoległego, powyższe zadanie przestrzenne daje się sprowadzić do następującego zadania płaskiego.

Na płaszczyźnie rysunku dane są dwa przecinające się okręgi c_1 i c_2 oraz na prostej t' przechodzącej przez jeden z punktów przecięcia tych okręgów np. H_t, dwa różne punkty W'_1 i W'_2, (rys. 2).
Przez punkt H_t należy poprowadzić prostą h_μ przecinającą okręgi c_1 i c_2 w takich punktach I i II, by proste $m'_1 = W'_1 I$ i $m'_2 = W'_2 II$ były równoległe. Zauważamy ponadto, że proste m'_1 i m'_2 będą wówczas równoległe jeżeli będzie spełniona relacja:

$$\overline{H_t W'_1} : \overline{H_t W'_2} = \overline{H_t I} : \overline{H_t II}.$$

W celu określenia tej prostej weźmy pod uwagę jeden z tych okręgów np. c_1 i pęk prostych o wierzchołku w punkcie H_t, a następnie zapytajmy co jest miejscem geometrycznym punktów II dzielących w stałym stosunku $\lambda = \overline{H_tW'_1} : \overline{H_tW'_2}$, odcinki tych prostych zawartych między punktami przecięcia H_t i I z okręgiem, (rys. 3). Wykażemy, że zbiorem tych punktów jest okrąg $\bar{c}_1$ o promieniu $\bar{r}_1 = r_1 : \lambda$ styczny do okręgu c_1 w punkcie H_t.



Rys. 2

W tym celu obierzmy punkt H_t za początek układu prostokątnego, a prostą łączącą punkt H_t ze środkiem okręgu c_1 za oś x.

Równanie okręgu c_1 będzie zatem miało następującą postać:

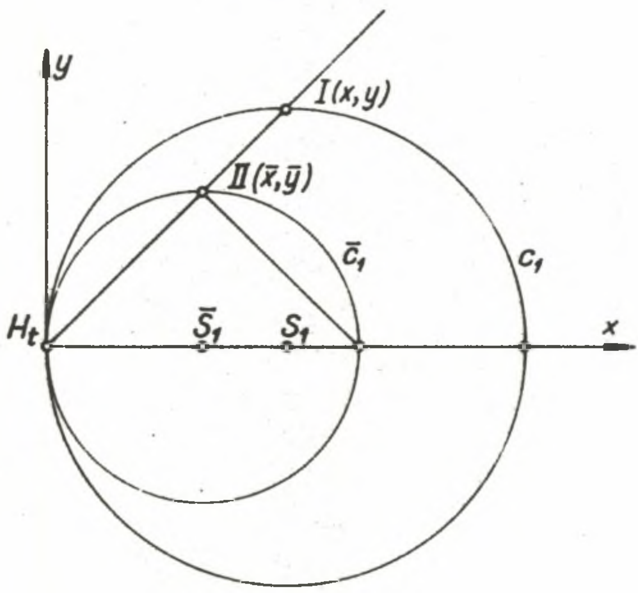
$$(x - r_1)^2 + y^2 = r_1^2.$$

Oznaczmy przez x, y współrzędne punktu I, w którym dowolny promień rozważanego pęku prostych przecina okrąg c_1, zaś przez $\bar{x}, \bar{y}$ współrzędne punktu II dzielącego odcinek H_tI w stosunku λ.

Jeżeli stosunek odcinków $\overline{H_t I} : \overline{H_t II} = \lambda$, to również i ich rzuty prostokątne na osie współrzędnych - na mocy twierdzenia Talesa pozostaną w takim samym stosunku.
A zatem mamy $x : \bar{x} = \lambda$ i $y : \bar{y} = \lambda$.
Podstawiając za $x = \bar{x}.\lambda$, a za $y = \bar{y}.\lambda$ w równaniu okręgu c_1, otrzymujemy równanie szukanego miejsca geometrycznego punktów II, dzielących odcinki $H_t I$ w stałym stosunku λ, które po elementarnym przekształceniu ma następującą postać:

$$(\bar{x} - \frac{r_1}{\lambda})^2 + \bar{y}^2 = \frac{r_1^2}{\lambda^2} .$$

Równanie to jak łatwo zauważyć przedstawia okrąg o promieniu $\bar{r}_1 = r_1 : \lambda$, styczny do okręgu c_1 w punkcie H_t.*)



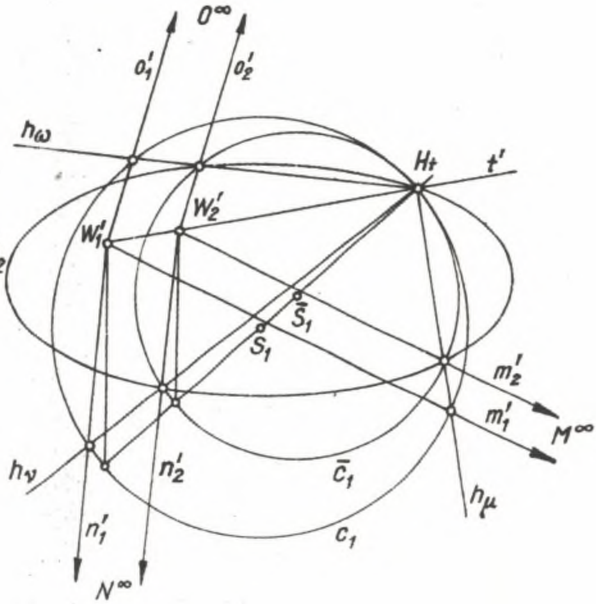
Rys. 3

x) Równoległość odcinków $W_2'II$ i $W_1'I$ prowadzi do figur podobnych o środku podobieństwa w punkcie $H_t \in c_1$. Ponieważ zbiorem punktów "I" jest okrąg c_1 - zbiorem punktów "II" odpowiadających w tym podobieństwie punktom "I" musi być również okrąg przynależny do punktu H_t.

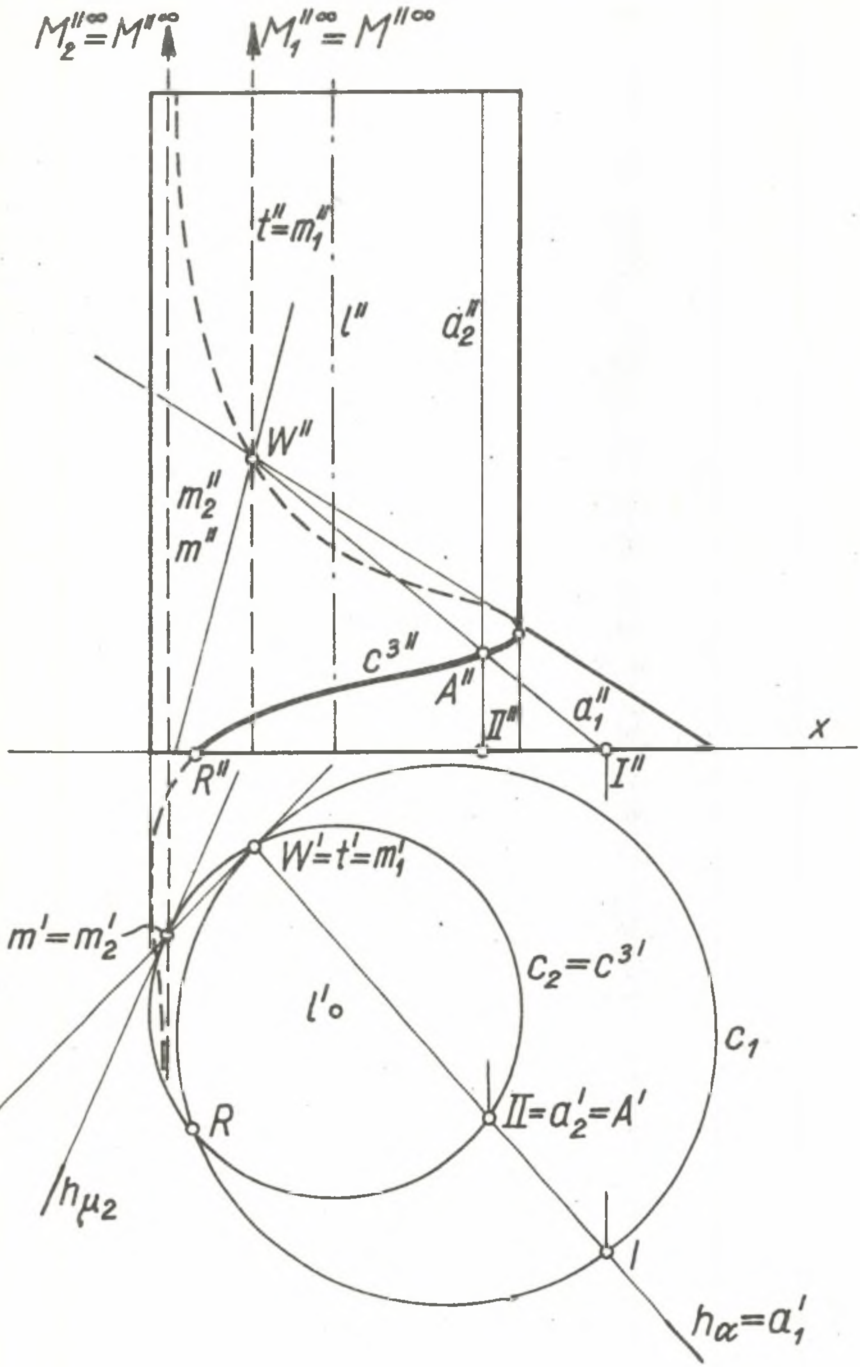
Aby rozważane, w tym artykule, zadanie można było uważać za całkowicie rozwiązane, wykreślamy na rys. 2, a następnie na rys. 1 okrąg $\bar{c}_1$ o promieniu $\bar{r}_1 = r_1 : \lambda$ (gdzie $\lambda = \overline{H_t W_1'} : \overline{H_t W_2'}$) styczny do okręgu c_1 w punkcie H_t. Okrąg ten przecina okrąg c_2 w punkcie II.
Prosta h_μ łącząca punkt H_t z punktem II jest szukaną prostą, która z kolei okrąg c_1 przecina w takim punkcie I, że proste $m_1' = W_1'I$ i $m_2' = W_2'II$ są równoległe, ponieważ zachowany jest związek:

$$\overline{H_t W_1'} : \overline{H_t W_2'} = \overline{H_t I} : \overline{H_t II}.$$

A zatem punkt $M'^{\infty} = m_1' \cdot m_2'$ jest rzutem szukanego rzeczywistego punktu niewłaściwego M^{∞} krzywej przestrzennej rzędu



Rys. 4



M₂''∞=M''∞
M₁''∞=M''∞
t''=m₁''
l''
a₂''
W''
m₂''
m''
c³''
A''
a₁''
II''
x
R''
I''
W'=t'=m₁'
m'=m₂'
c₂=c³'
l'₀
c₁
hμ=hμ₁
II=a₂'=A'
R
hμ₂
I
hα=a₁'

Rys. 5

trzeciego, a zarazem kierunkiem asymptotycznym tej krzywej. Krawędź m przecięcia płaszczyzn μ_1 i μ_2 stycznych do powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2 w uprzednio skonstruowanym ich wspólnym i rzeczywistym punkcie niewłaściwym M^{∞} jest asymptotą krzywej przestrzennej rzędu trzeciego. (rys. 1).

W przypadku ogólnym, kiedy jeden z okręgów np. c_2 reprezentuje dowolną krzywą drugiego stopnia, przecinającą okrąg c_1 w dwóch punktach rzeczywistych właściwych, zadanie to nie daje się rozwiązać przy pomocy cyrkla i liniału, ponieważ konstrukcja kierunku asymptotycznego sprowadza się do wyznaczenia punktów przecięcia dwóch stożkowych, dla których znany jest tylko jeden punkt wspólny.

Ponadto można wykazać. że jeżeli krzywa drugiego stopnia c_2 przecina okrąg $\bar{c}_1$ w czterech różnych i rzeczywistych punktach właściwych, to istnieją trzy takie kierunki asymptotyczne krzywej przestrzennej rzędu trzeciego, będącej częścią składową linii przenikania powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2 o wspólnej tworzącej t i kierujących c_1 i c_2 (rys. 4).

Na rys. 5 podano konstrukcję asymptoty krzywej przestrzennej rzędu trzeciego przy założeniu, że jedna z dwóch rozważanych powierzchni stożkowych Γ_1 i Γ_2 o wspólnej tworzącej t jest powierzchnią walcową.
W tym przypadku szukaną płaszczyzną μ w pęku płaszczyzn o osi t_s, która powierzchnie Γ_1 i Γ_2 przecina w tworzących $m_1 \parallel m_2$ jest płaszczyzna styczna do powierzchni stożkowej.

Rękopis złożono w Redakcji 22.4.67 r.

LITERATURA

[1] Otto E. - Geometria wykreślna - Warszawa 1956 r.

[2] Plamitzer A. - Geometria rzutowa układów płaskich i powierzchni drugiego stopnia - Warszawa 1938 r.

КОНСТРУКЦИЯ АСИМПТОТ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В статье показано конструкцию асимптоты пространственой кривой третьего порядка, являющейся линией пересечения двух конических поверхностей, имеющих общую образующую. Эти конические поверхности имеют круговое основание на плоскости проекции.

ÜBER EINE ASYMPTOTENKONSTRUKTION EINIGER RAUMKURVEN DRITTER ORDNUNG

Zusammenfassung

Man hat eine Asymptotenkonstruktion für eine Raumkurve dritter Ordnung gegeben, die einen Teil der Durchdringungslinie zweier Kegelflächen 2-er Ordnung bildet.
Die betrachteten Kegelflächen haben auf der Projektionsebene