ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA t. 13 Nr kol. 204

MARIAN PALEJ
Katedra Geometrii Wykreślnej

ZAGADNIENIE WIERNOKĄTNOŚCI W STEREOGRAFICZNYM RZUCIE OBROTOWEJ KWADRYKI KRZYWOLINIOWEJ

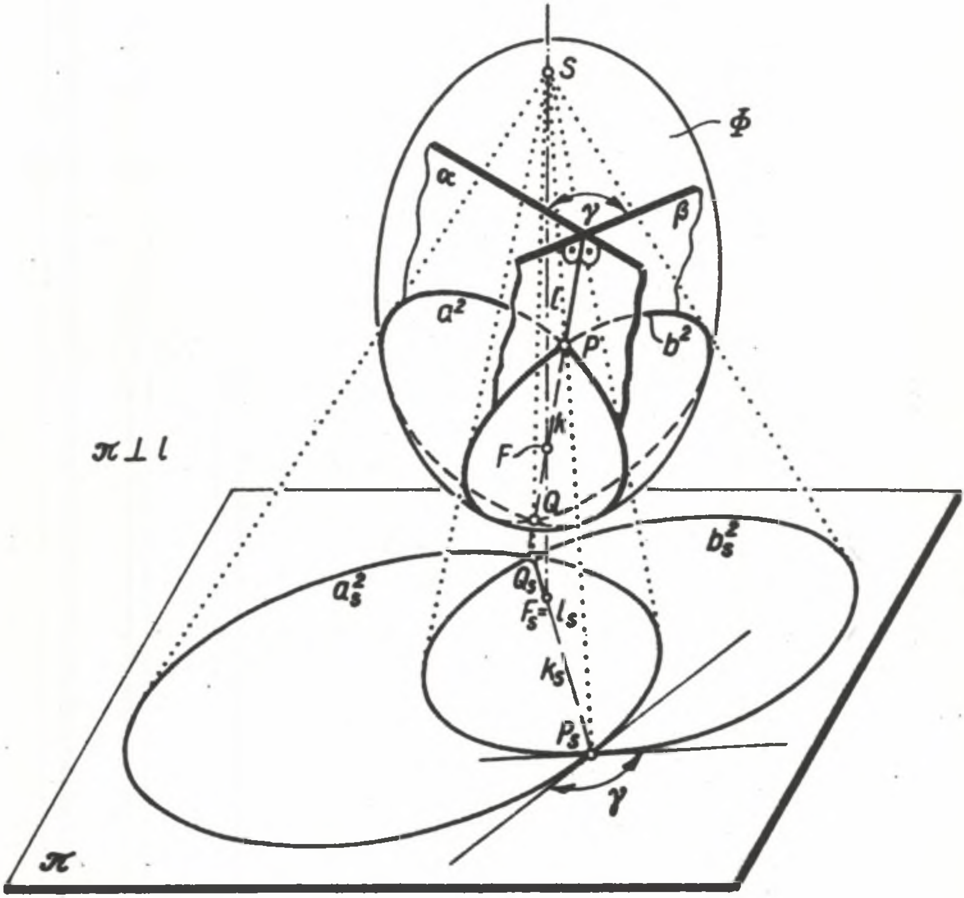
W artykule pt. "O pewnym przypadku wiernokątnego odwzorowania płaszczyzn" [1] udowodniono następującą własność rzutu stereograficznego paraboloidy obrotowej, w którym środkiem rzutu jest środek paraboloidy:

> "rzuty stożkowych przekroju paraboloidy dowolną parą płaszczyzn przechodzących przez ognisko paraboloidy przecinają się z sobą pod kątem równym rzeczywistej wielkości miary kąta dwuściennego utworzonego przez te płaszczyzny".

Przedmiotem niniejszej pracy jest wykazanie prawdziwości analogicznego twierdzenia dla dwowolnej, krzywoliniowej kwadryki obrotowej przy założeniu, że środkiem rzutu stereograficznego jest wierzchołek tej kwadryki.

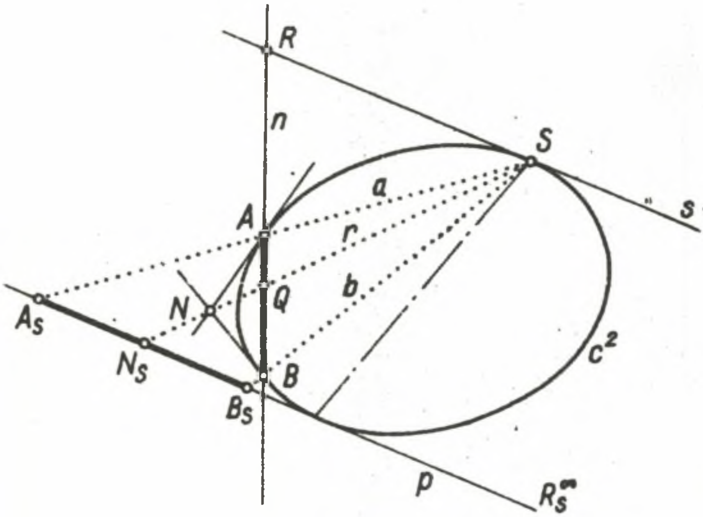
Nawiązując do rys.1 chcemy zatem dowieść, że jeżeli α i β są dowolnymi płaszczyznami przynależnymi do ogniska F dowolnej, krzywoliniowej kwadryki obrotowej Φ, wówczas rzuty stożkowych: $a^2 = \alpha\Phi$ i $b^2 = \beta\Phi$ z wierzchołka S na płaszczyznę π prostopadłą do osi l kwadryki są stożkowymi (niezdegenerowanymi lub zdegenerowanymi): a_s^2, b_s^2 przecinającymi się pod kątem $\gamma = \sphericalangle\alpha\beta$.

W dowodzie rozpoczniemy od lematu:
jeżeli rzutem stereograficznym dowolnej stożkowej c^2 przynależnej do kwadryki Φ jest okrąg, wówczas środkiem tego okręgu jest rzut stereograficzny bieguna płaszczyzny stożkowej c^2 względem kwadryki Φ .



Rys. 1

Dowód lematu wygodnie jest oprzeć o następującą własność stożkowych. Weźmy pod uwagę dowolną stożkową c^2 (rys. 2), jej sieczną n i biegun prostej n – punkt N. Wprowadźmy styczną s do stożkowej w dowolnym punkcie S i prostą równoległą p. Łatwo można wykazać, że rzut z punktu S na prostą p cięciwy $AB \in n$ zostanie społowiony rzutem bieguna N. Wystarczy bowiem zauważyć, że punkty $R = ns$ i $Q = nr$ stanowią parę punktów sprzężonych względem stożkowej c



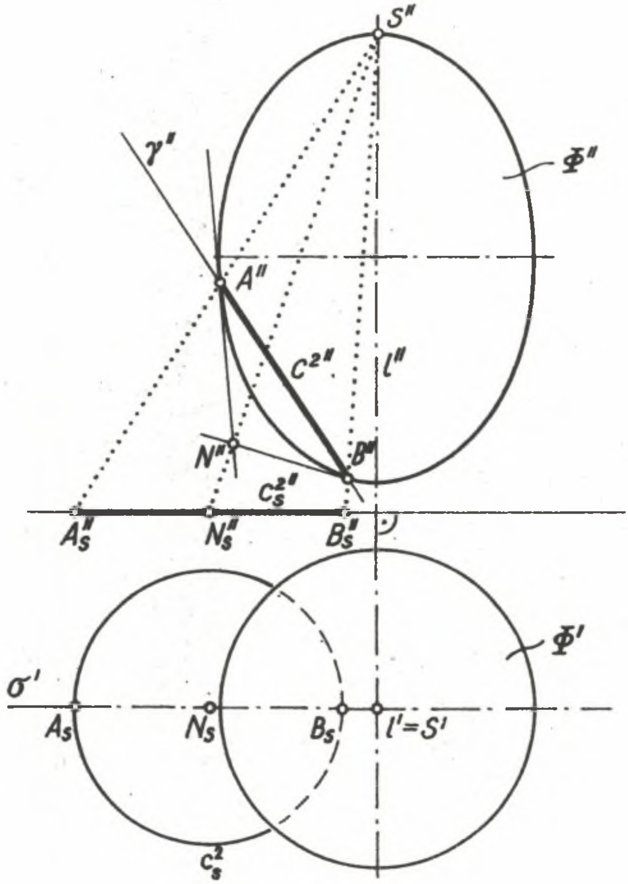
Rys. 2

c^2 (punkt R jest biegunem prostej r), a zatem wraz z punktami A, B, podwójnymi w szeregu inwolucyjnym o podstawie n tworzą dwustosunek:

$$(ABQR) = -1$$

Rzutując z punktu S czwórkę A,B,Q,R otrzymujemy czwórkę prostych: a,b,r,s, której przecięcie prostą p // s prowadzi do czwórki punktów $(A_sB_sN_sR_s) = -1$. Ponieważ punkt $R_s = ps$ jest punktem niewłaściwym - musi zachodzić: $\overline{A_sN_s} = \overline{N_sB_s}$.

Rozważmy z kolei dowolną, krzywoliniową kwadrykę obrotową Φ (rys. 3) przeciętą dowolną płaszczyznę γ w stożkowej c^2. Dokonajmy stereograficznego rzutu tej stożkowej z wierzchołka S na płaszczyznę π_1 prostopadłą do osi kwadryki Φ . Wiadomo, że rzut stożkowej c^2 będzie okręgiem c_s^2. Wprowadźmy płaszczyznę symetrii σ przekroju c^2 przechodzącą przez oś kwadryki l. Z wspomnianej wyżej własności stożkowej zarysu (rys. 3) wynika, że rzut punktu N - N_s będzie połowił



Rys. 3

rzut stereograficzny odcinka AB - odcinek A_sB_s. Dzięki założonej symetrii odcinek A_sB_s będzie średnicą okręgu c_s^2 stanowiącego stereograficzne odwzorowanie stożkowej c^2, co oznacza, że punkt N_s jest istotnie środkiem okręgu c_s^2 zgodnie z treścią rozważanego lematu.

W dalszym ciągu dowodu rozpatrzmy dowolną, krzywoliniową kwadrykę obrotową Φ (rys. 4), jej ognisko F i płaszczyznę biegunową punktu F - π_1. Wprowadźmy równoległą do π_1 płaszczyznę $\nu \in F$ i dowolnie do niej nachyloną płaszczyznę $\alpha \in F$. Płaszczyzny te przetną kwadrykę Φ w stożkowych n^2 i a^2.

Dokonajmy stereograficznego rzutu z wierzchołka S stożkowych n^2 i a^2. Otrzymamy okrąg n_s^2 i – w ogólnym przypadku okrąg a_s^2. Zauważmy, że środkiem okręgu a_s^2 będzie, zgodnie z dowiedzionym wyżej lematem, punkt A_s. Okrąg n_s^2, o środku w punkcie $N_s = F_s$ jest określony promieniem r_n. Wychodząc z własności stożkowej zarysu kwadryki Φ można ustalić, że promień r_n jest równy odległości ogniska F od płaszczyzny π_1. Mamy bowiem: zgodnie z własnością ogniska i kierownicy krzywej stopnia drugiego:

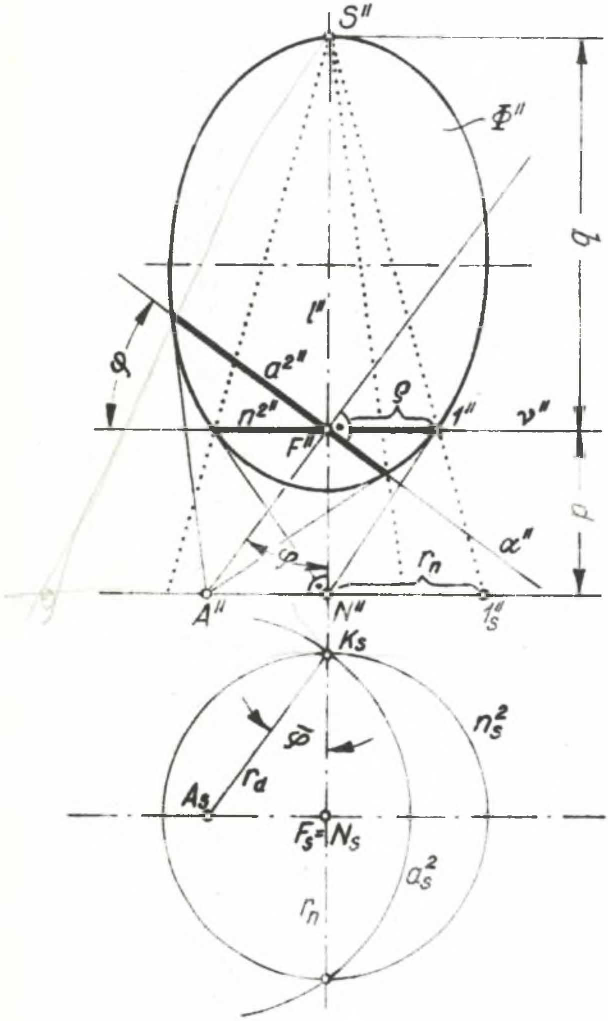
$$\frac{\varrho}{p} = \frac{q}{p+q} \qquad (1)$$

z podobieństwa trójkątów $S''F''1''$ i $S''N''1''_s$ natomiast:

$$\frac{\varrho}{r_n} = \frac{q}{p+q} \qquad (2)$$

Stąd:

$$r_n = p \qquad (3)$$



Rys. 4

Rozpatrzmy trójkąty prostokątne: $A''F''N''$ i $A_sK_sN_s$.

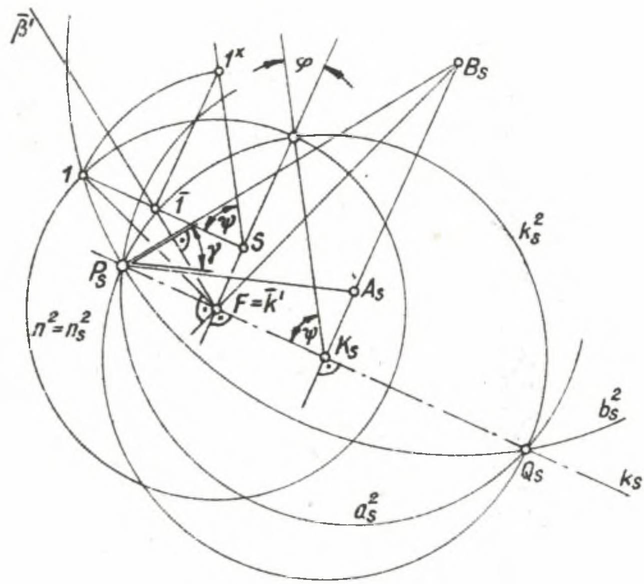
Na zasadzie równości (3) wnosimy, że są one przystające, gdyż jednocześnie $\overline{A_sN_s} = \overline{A''N''}$. Wynika stąd, że:

$$\sphericalangle\overline{\varphi} = \sphericalangle\varphi$$

Kąt $\overline{\varphi}$ jest kątem, pod którym przecinają się okręgi a_s^2 i n_s^2 stanowiące stereograficzne odwzorowanie stożkowych a^2 i n^2. Kąt φ przedstawia rzeczywistą wielkość kąta nachylenia płaszczyzny α do poziomej płaszczyzny ν. Wynika stąd, że dla szczególnego położenia płaszczyzn α i $\beta = \nu$ rozpatrywane twierdzenie jest słuszne.

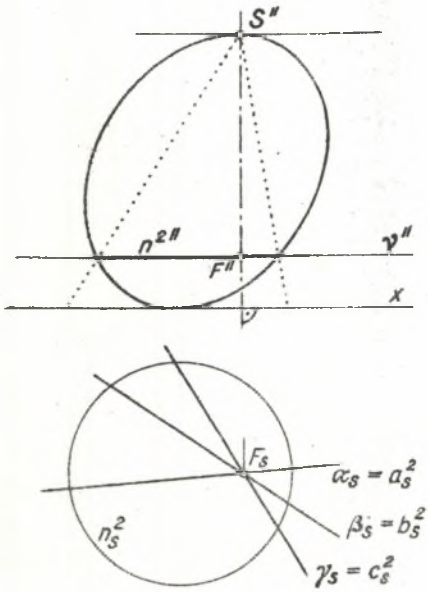
Pozostaje dowieść, że równość $\sphericalangle\overline{\varphi} = \sphericalangle\varphi$ zachodzi również w przypadku ogólnego położenia płaszczyzn α i β.
Ta część dowodu może być przeprowadzona analogicznie jak dla przypadku, w którym powierzchnia Φ jest paraboloidą obrotową. Nie powtarzając w całej rozciągłości rozważań zamieszczonych w cytowanej na wstępie pracy [1] przypomnijmy jedynie pokrótce drogę dowodu. Należy rozważyć krawędź k rozpatrywanych płaszczyzn α i β i znaleźć jej kąt nachylenia do osi kwadryki l. Wystarczy w tym celu znaleźć kąt nachylenia do płaszczyzny poziomej ν takiej pomocniczej płaszczyzny $\varkappa$, dla której k jest linią spadu, tj. płaszczyzny określonej okręgiem k_s^2 o średnicy P_sQ_s (rys. 5). Następnie należy dokonać obrotu prostej k wraz z przynależnymi do niej płaszczyznami α i β, w wyniku którego prosta ta pokryje się z osią kwadryki Φ, a płaszczyzny α i β zajmą położenie prostopadłe do rzutni π_1. Rozważając podobieństwo trójkątów $1FS$ i B_sFK_s oraz $\bar{1}FS$ i $B_sP_sK_s$ wykazuje się prostopadłość: $\overline{\beta}' \perp P_sB_s$ i analogicznie $\overline{\alpha}' \perp P_sA_s$, a w konsekwencji równość $\sphericalangle\overline{\alpha}'\overline{\beta}' = \sphericalangle A_sP_sB_s$, co oznacza zakończenie dowodu.
Warto zwrócić uwagę, że omawiane twierdzenie ważne jest tylko dla kwadryk obrotowych i że spełniają je jedynie wiązki płaszczyzn, których środkami są ogniska.

W istocie bowiem gdyby założyć, że również i dla kwadryki nieobrotowej stereograficzne rzuty stożkowych przekroju dowolnymi płaszczyznami α i β, $\sphericalangle\alpha\beta = \gamma$ należącymi do pewnej wiązki (F) są okręgami przecinającymi się pod kątem γ wówczas doszlibyśmy do następującej sprzeczności. Po pierwsze środkiem rzutu stereograficznego musiałby być punkt pępkowy kwadryki Φ po to aby rzutami poszczególnych stożkowych były okręgi.



Rys. 5

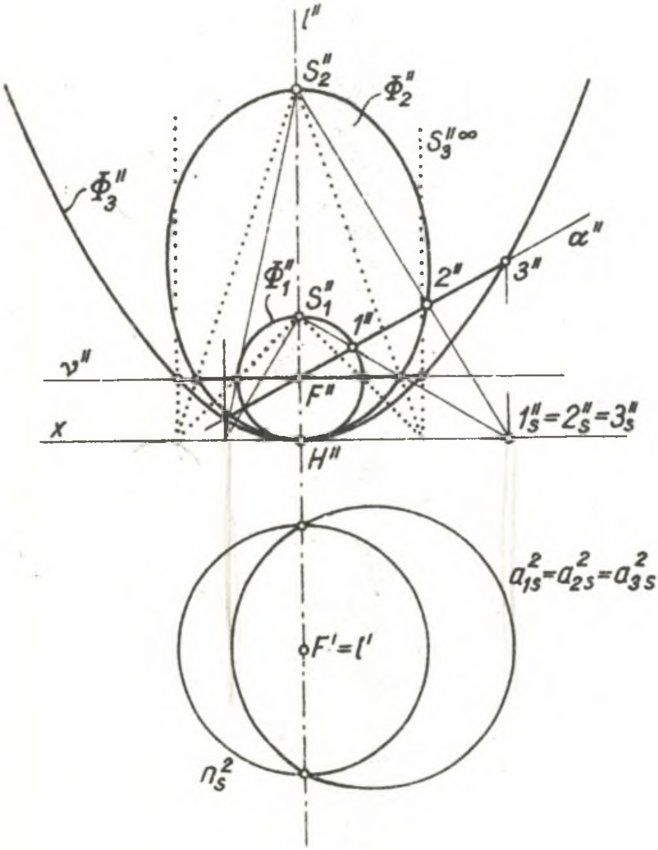
Po wtóre pęk płaszczyzn wiązki (F) przechodzących przez środek rzutu stereograficznego S odwzorowuje się zawsze jako pęk prostych. Proste te winny tworzyć z sobą kąty równe rzeczywistym wielkościom miar kątów dwuściennych utworzonych przez poszczególne pary płaszczyzn. Aby to było możliwe oś pęku - prosta SF musiałaby spełniać warunek: $SF \perp \pi_1$. Wówczas jednak nie może zachodzić wiernokątne odwzorowanie kątów utworzonych przez płaszczyzny tego pęku z płaszczyzną ν. Zauważmy bowiem, że oś pęku SF nie przebija płaszczyzny ν w środku okręgu n^2 odwzorowującego tę płaszczyznę, a co za tym idzie pęk prostych $F_s(\alpha_s, \beta_s ...)$ (rys. 6) nie może być pękiem prostopadłych do okręgu n_s^2. Ponieważ jednak w rzeczywistości zachodzi prostopadłość płaszczyzn $\alpha, \beta \ldots \in SF$ względem płaszczyzny ν - brak prostopadłości prostych pęku (F_s) do okręgu n_s^2 dowodzi, że twierdzenie nie jest w tym przypadku spełnione.



Rys. 6

Analogiczne rozumowanie wyklucza możliwość istnienia środka wiązki (F) płaszczyzn spełniających omawiane twierdzenie poza osią l. Jeżeli natomiast przyjąć, że punkt taki leży na osi kwadryki obrotowej jest jednak różny od ogniska wówczas dla zachowania kątów pomiędzy stereograficznym odwzorowaniem płaszczyzn należących do wiązki (F), wzajemnie prostopadłych punkt taki winien posiadać tę własność, że każde przynależne do niego płaszczyzny α i β sprzężone względem kwadryki Φ są wzajemnie prostopadłe. W istocie bowiem tylko wtedy, w stereograficznym odwzorowaniu tych płaszczyzn - okręgi a_s^2, b_s^2 mogą być do siebie prostopadłe (jedynie wówczas styczne do stożkowych a^2 i b^2 przejdą parami przez odpowiednie bieguny płaszczyzn β i α).
Wiadomo jednak, że punktem o takich własnościach jest tylko ognisko.

Na zakończenie wskażmy na możliwość pewnego zastosowania rozważanego zagadnienia. Przyjmijmy współosiowo dowolną sferę Φ_1, paraboloidę obrotową Φ_3 i np. elipsoidę obrotową Φ_2. Dobierając położenia kwadryk $\Phi_{1\div3}$ oraz promienie równoleżników, których środkami są ogniska tych kwadryk można ustalić taką płaszczyznę π, na której rzuty stereograficzne dokonane z wierzchołków kwadryk $\Phi_{1\div3}$ będą miały następującą własność: stożkowe przekroju kwadryk $\Phi_{1\div3}$ o ogniskach F_1, F_2, F_3 płaszczyznami równoległymi, przechodzącymi odpowiednio przez ogniska $F_{1\div3}$ w rzucie stereograficznym na płaszczyznę π ulegają zjednoczeniu. Na rys. 7 ilustrującym tę relację przy-



Rys. 7

kładowo płaszczyzna π_1 jest płaszczyzną wspólnie styczną do kwadryk $\Phi_{1\div3}$ w wierzchołku H.

Wynika stąd, że gdyby rozważyć siatkę południków i równoleżników tych powierzchni o jednakowym odstępach kątowych - rzuty stereograficzne takich siatek byłyby zjednoczone.

Własność powyższa pozwala na wzajemne przekształcenie rozważanych kwadryk za pośrednictwem płaszczyzny π (przekształcenie różne od kolineacji środkowej) i może ingerować w niektórych zagadnieniach z zakresu kartografii.

Rękopis złożono w Redakcji 29.4.67 r.

LITERATURA

[1] Palej M.: O pewnym przypadku wiernokątnego odwzorowania płaszczyzn - Zeszyty Nauk. Politechniki Śl. seria Matematyka - Fizyka nr 10 - 1966.

РАВНОУГОЛЬНОСТЬ В СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙЧАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ 2-ПОРЯДКА

Р е з ю м е

В работе доказано что стереографическая проекция произвольной поверхности вращения 2-го порядка на плоскость перпендикулярную её оси обладает следующим свойством:

проекции кривых пересечения этой поверхности двумя произвольными плоскостями инцидентными с фокусом поверхности образуют угол, который равен действительному углу между этими плоскостями.

Отмечено возможность использования этого свойства для взаимного преобразования нелинейчатых поверхиостей вращения 2-го порядка.

DIE WINKELTREUEIGENSCHAFT DER STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION EINER DREHFLÄCHE ZWEITER ORDNUNG

Zusammenfassung

Es wurde bewiesen dass die stereographische Projektion einer beliebigen Drehfläche zweiter Ordnung (die nicht Regelfläche ist) auf eine normal zur Achse stehende Projektionsebene folgende Eigenschaft besitzt:

> die Projektionen der Schnittkurven der Drehfläche zweiter Ordnung mit zwei beliebigen durch einen Brennpunkt gehenden Ebenen so einen Winkel bilden, der der wahren Grösse des Winkels dieser Ebenen immer gleich ist.

Man hat auch darauf hingewiesen dass die erwähnte Eigenschaft solche Umwandlungen der Drehfläche zweiter Ordnung möglich macht, die nicht perspektive Kollineationen sind.