ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 13 Nr kol. 204

JANUSZ KAJRUNAJTYS
Katedra Geometrii Wykreślnej

O PEWNYM SZCZEGÓLNYM PRZYPADKU POWINOWACTWA W ZASTOSOWANIU DO WYKREŚLANIA ELIPSY

Streszczenie. W artykule podano sposób dokładnego wyznaczania punktów elipsy danej przy pomocy jej osi, bez kreślenia siatki pomocniczych linii w miejscu wykreślania krzywej.

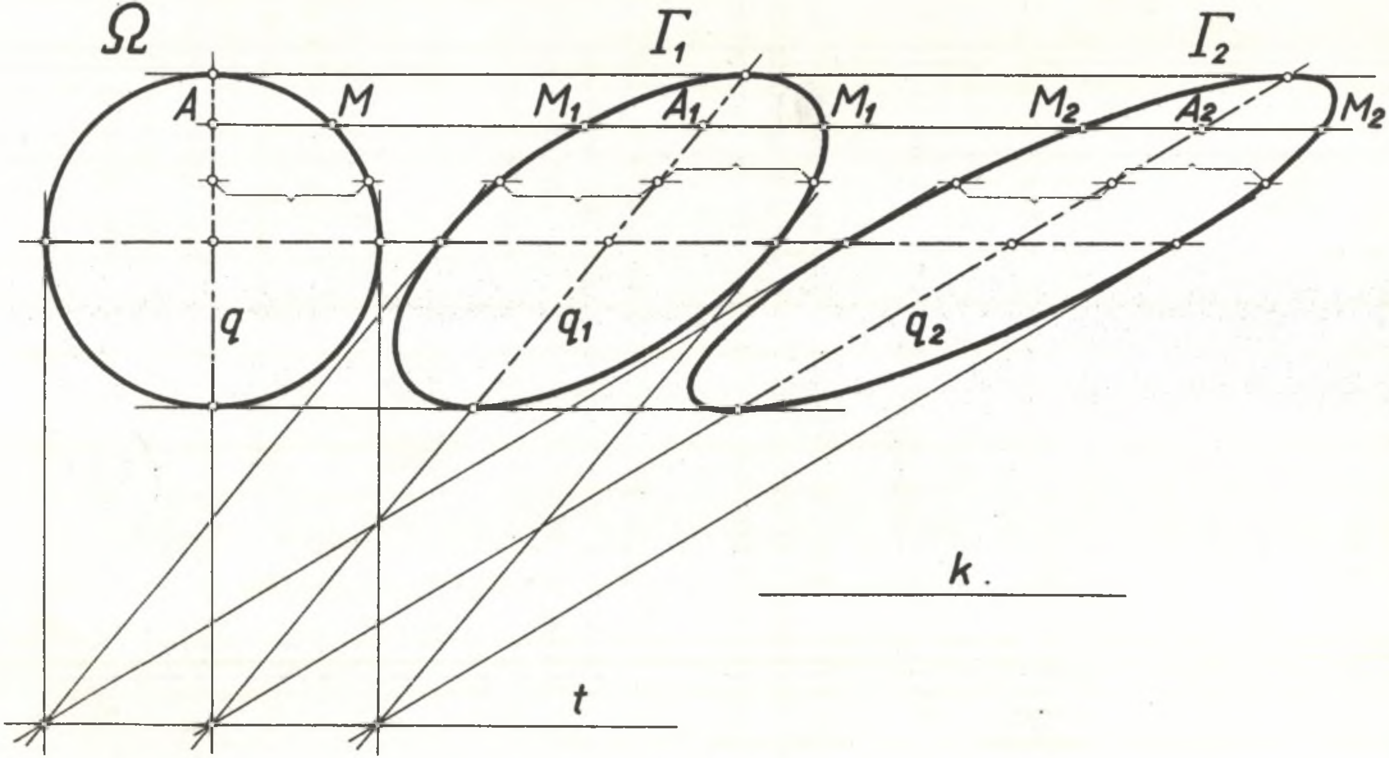
Jeżeli dla danego okręgu Ω przyjmiemy zarówno oś t, jak i kierunek powinowactwa k równoległe do jednej z średnic okręgu, to przez przekształcenie powinowate otrzymamy ciąg elips Γ_1, Γ_2 ... (rys. 1).

Punkty M_1, M_2, ... tych elips otrzymamy odmierzając odcinki $\overline{M_1A_1} = \overline{M_2A_2} = \ldots = \overline{MA}$, co wyjaśnia rys. 1. Konstrukcję można dalej uprościć - a mianowicie nie kreślić prostych $M_1A_1 \parallel k$ i odmierzać te odcinki cyrklem przenośnikiem od wykreślonej średnicy q_1 przy krawędzi liniału przesuwanego równolegle do kierunku k.

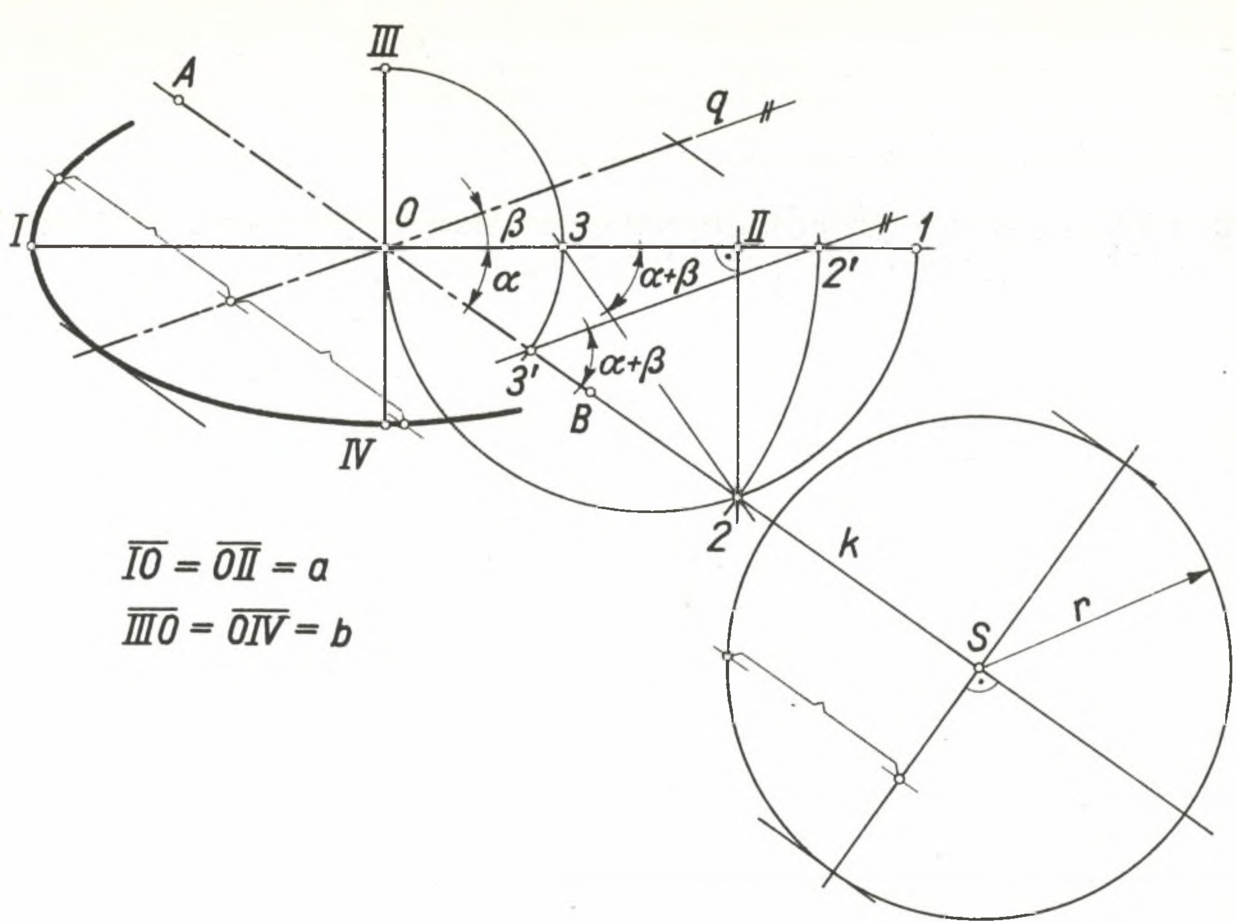
Każdemu zatem okręgowi można przyporządkować dwuparametrową rodzinę elips zależną od wyboru parametrów k i q, przy czym pola tych elips są równe polu koła Ω. Odwrotnie, gdy dana jest elipsa to można jej przyporządkować jeden tylko równy co do wielkości pola okrąg, co można zrealizować następująco:

Rozważmy elipsę daną przy pomocy jej osi (rys. 2). Kierunek powinowactwa można wyznaczyć z warunku

$$OB = r; \tag{1}$$



Rys. 1


III
A
q
I
O
β
3
II
1
α
α+β
2'
3'
α+β
B
IV
2
k
r
S
$\overline{IO} = \overline{OII} = a$
$\overline{IIIO} = \overline{OIV} = b$

Rys. 2

z równości pól elipsy i koła wynika wprost

$$ab\pi = r^2\pi$$

$$r = \sqrt{ab} \tag{2}$$

Punkt B jest punktem elipsy, zatem jego współrzędne muszą spełniać układ równań:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

$$\frac{x_B^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2} = 1;$$

po rozwiązaniu

$$x_B = \pm\sqrt{ab - \frac{ab^2}{a+b}}$$

$$y_B = \pm\sqrt{\frac{ab^2}{a+b}}$$

a zatem

$$tg\alpha = \frac{x_B}{y_B} = \pm\frac{\sqrt{ab}}{a}$$

Dla graficznego wyznaczenia tego kierunku oraz promienia r, istnieje prosta interpretacja geometryczna wynikająca z własności trójkąta prostokątnego $\Delta 012$, którego przeciwprostokątna $\overline{01} = a+b$.

Kierunek k określa związek:

$$\mathrm{tg}\alpha = \pm \frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{\overline{II\,2}}{\overline{02}} \tag{3}$$

a promień

$$r = \sqrt{ab} = \overline{II2}$$

Okrąg o promieniu $r = \overline{II2}$, którego środek S leży w dowolnym punkcie prostej k rozwiązuje zadanie.

Prostą q, na której leży druga średnica elipsy sprzężona z średnicą AB, można znaleźć korzystając z znanej zależności między współczynnikami kierunkowymi średnic sprzężonych elipsy

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2} \tag{4}$$

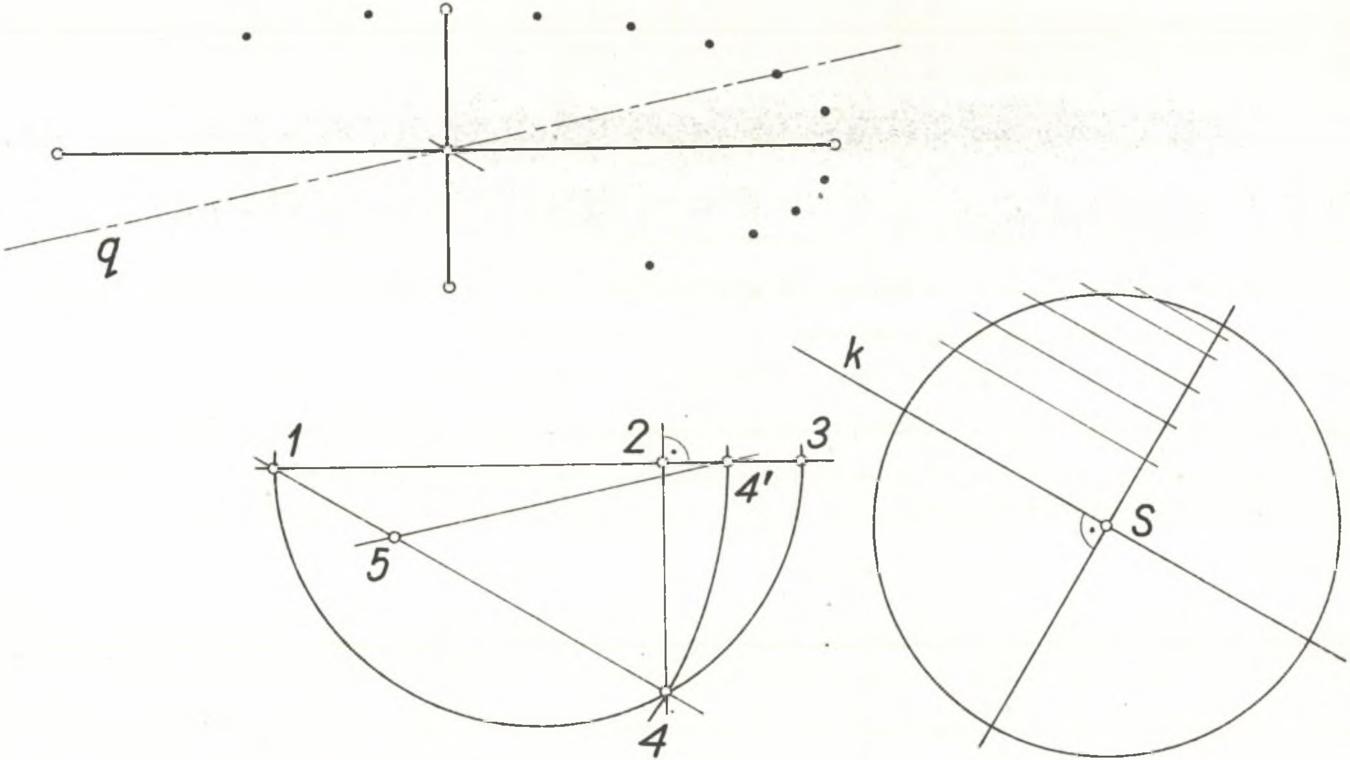
po podstawieniu (3) obliczamy

$$\mathrm{tg}\beta = \pm \frac{b^2}{a\sqrt{ab}}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{ab}}{a-b} \tag{5}$$

Kąt $(\alpha+\beta)$ łatwo zbudować. Wystarczy z punktu O zakreślić promieniem $\overline{O\,III} = b$ łuk do przecięcia z odcinkiem $\overline{O\,II}$ i tak otrzymany punkt 3 połączyć z punktem 2. Kąt 23 II = $(\alpha+\beta)$. Aby uniknąć odmierzania kąta $(\alpha+\beta)$ można obrócić go dookoła symetralnej kąta α, tak, żeby jedno z jego ramion pokryło się z prostą k, a zatem:

$$\sphericalangle 23\,II = \sphericalangle 2'3'2$$



Rys. 3

wówczas wystarczy równoległe przesunięcie, a szukaną prostą q znajdziemy kreśląc przez punkt O równoległą do odcinka $3'2'$. Obecnie można już wyznaczać poszczególne punkty elipsy w sposób pokazany na rys. 1.

W praktyce można wszystkie konstrukcje pomocnicze wykonać poza miejscem wykreślania elipsy, co pokazane jest na rys. 3.

Tok postępowania

W dogodnym dla nas miejscu kreślimy prostą równoległą do osi wielkiej elipsy i odmierzamy na niej odcinki: $\overline{12} = a$ i $\overline{23} = b$. Budujemy półokrąg o średnicy $\overline{13} = a + b$. Z punktu 2 kreślimy prostopadłą do prostej $\overline{13}$ do przecięcia z półokręgiem w punkcie 4. Na prostej łączącej punkty 1 i 4 odmierzamy odcinek $\overline{15} = b$. Z punktu 1 promieniem $\overline{14}$ kreślimy łuk do przecięcia z prostą $\overline{13}$ w punkcie $4'$ i łączymy punkty 5 i $4'$. Przez środek elipsy kreślimy proste: q równoległą do $\overline{54'}$ i k równoległą do $\overline{14}$. Budujemy okrąg o promieniu $r = \overline{24}$ i środku w punkcie S dowolnie obranym na prostej k. Przez punkt S kreślimy prostopadłą do prostej k.

Przykładamy linéał równolegle do prostej k i przy jego krawędzi odmierzamy (cyrklem przenośnikiem) długość półcięciwy okręgu o środku S w obie strony od prostej q. Zmieniając (równolegle do prostej k) położenie linéału wyznaczymy dostatecznie gęsty zbiór punktów elipsy.

Rękopis złożono w Redakcji 29.4.67 r.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРОГО ОСОБЕННОГО, РОДСТВЕННОГО СООТВЕТСТВИЯ ПРИ ВЫЧЕРЧИВАНИИ ЭЛЛИПСА

Р е з ю м е

В работе представлено некоторый метод вычерчивания эллипса определенного парой оси. Отличие этого метода заключается в отсутствии любых вспомагательных линии.

ÜBER EINEN BESTIMMTEN EINZELFALL DER PERSPEKTIVE AFFINITÄT IN DER ANWENDUNG ZUM ZEICHNEN DER ELIPSE

Zusammenfassung

Im Artikel wurde die Art der genauen Bestimmung von Elipsenpunkten deren Achsen gegeben sind, angeführt, ohne Hilfslinien an der Stelle der Kurve zu zeichnen.