ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 13 Nr kol. 204

MICHAŁ WANTRYCH
Katedra Geometrii Wykreślnej

O PEWNYM WYKREŚLNYM SPOSOBIE WYZNACZANIA DŁUGOŚCI OBWODU ELIPSY

Znalezienie długości obwodu elipsy metodami analitycznymi jest zadaniem żmudnym a to z uwagi na fakt, że długość łuku elipsy wyraża się całką eliptyczną, której nie da się zastąpić funkcjami elementarnymi. Obliczenie to sprowadza się do rozwinięcia w szereg funkcji podcałkowej, bądź też przy akceptowaniu dalej idących uproszczeń, do rozwiązania przybliżonego wzoru [1]

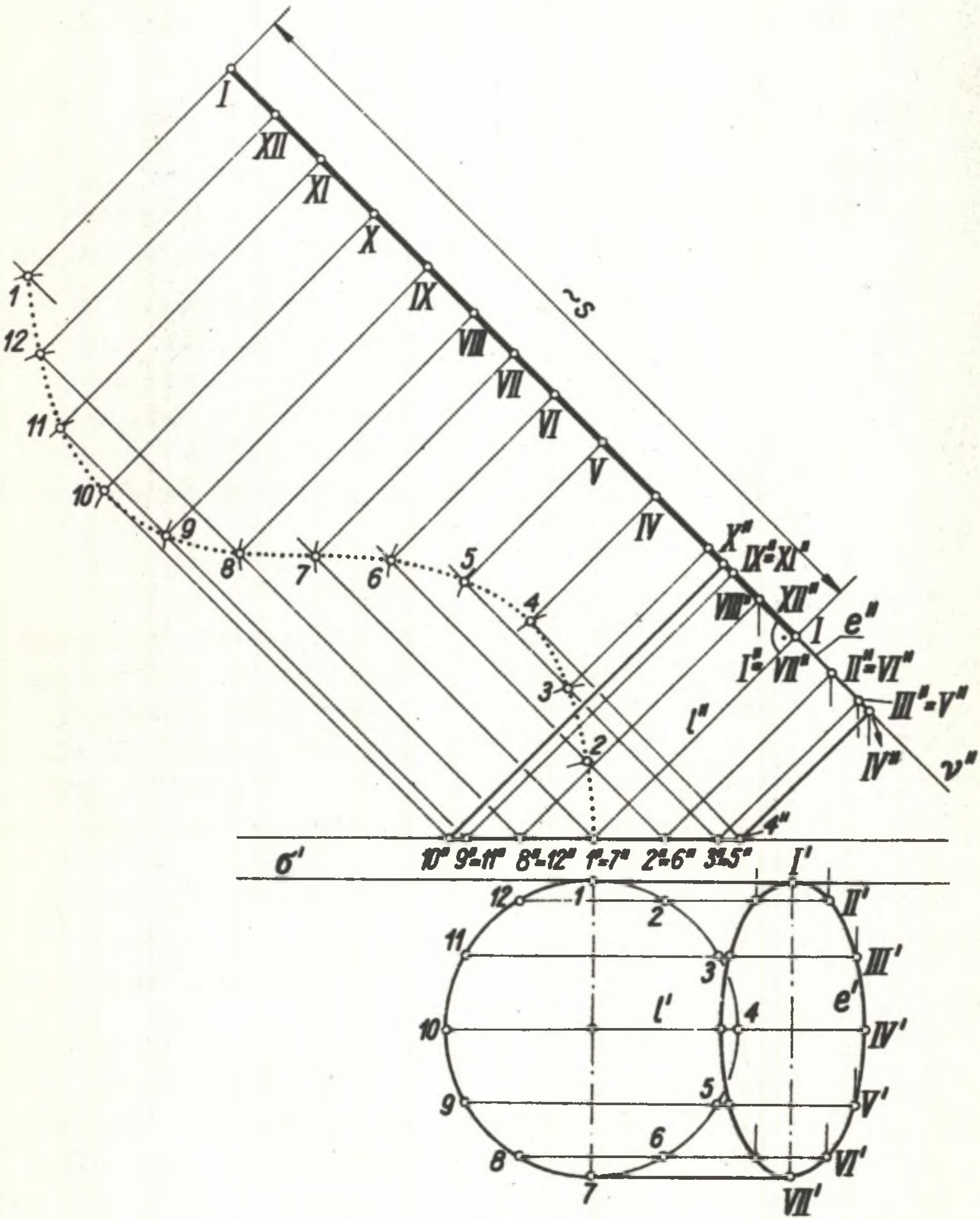
$$s \approx \pi\left(3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$$

W geometrii wykreślnej konstrukcję rzeczywistej długości obwodu elipsy realizuje się poprzez rozwinięcie elipsy na odcinek prostej przy czym na ogół stosuje się metodę bardzo elementarną polegającą na zastąpieniu łuków krzywej niewielkiej długości jej cięciwami [1], [2].

Niniejszy artykuł ma na celu zwrócenie uwagi na możliwość znacznie dokładniejszej konstrukcji rozwinięcia elipsy przy pomocy rozwinięcia celowo wprowadzonej, pośredniczącej powierzchni walcowej.

Rozważmy dowolną eliptyczną powierzchnię walcową Θ (rys. 1) której kierującą jest okrąg Ω leżący na jednej z rzutni np. π_1, a oś l, dla uproszczenia, spełnia warunek $l \parallel \pi_2$. Rozpatrzmy rozwinięcie części powierzchni Θ ograniczonej kierującą Ω i przekrojem normalnym e leżącym w dowolnej płaszczyźnie $\nu \perp l$.

Wprowadźmy w tym celu czołową płaszczyznę σ styczną do powierzchni Θ w tworzącej t. Poddajmy "toczeniu" po płaszczyźnie


I
XII
XI
X
IX
VIII
VII
VI
V
IV
~s
1
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
X''
IX''=XI''
VIII''
XII''
I
e''
I''=VII''
II''=VI''
III''=V''
IV''
l''
ν''
4''
σ'
10'' 9''=11'' 8''=12'' 1''=7'' 2''=6'' 3''=5''
I'
II'
III'
IV'
V'
VI'
VII'
l'
e'

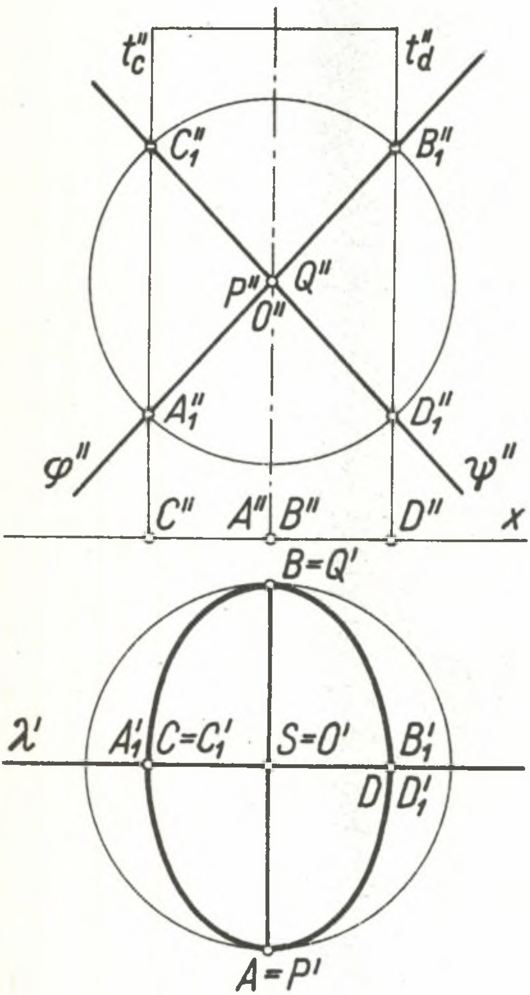
Rys. 1

σ powierzchnię Θ . W wyniku, poszczególne punkty 1,2,3,... kierującej Ω obracając się w płaszczyznach prostopadłych do tworzącej t wyznaczą na płaszczyźnie σ przekształconą okręgu Ω , a odpowiadające im. tj. przynależne do tych samych tworzących punkty I, II, III, ... przekroju normalnego e wyznaczą przekształconą krzywej e. Jest oczywiste, że przekształcona elipsy e (zgodnie z założeniem,przekrojem normalnym powierzchni Θ jest elipsa e), będzie odcinkiem prostej, gdyż przy "toczeniu" powierzchni Θ wszystkie punkty tej krzywej pozostają w płaszczyźnie ν .

Opisana konstrukcja oraz znany fakt istnienia na powierzchni walcowej eliptycznej dwu rodzin okręgów (leżących na odpowiednich pękach płaszczyzn równoległych) umożliwiają następujący sposób wyznaczania długości obwodu elipsy danej osiami:

Weźmy pod uwagę powierzchnię walcową eliptyczną, której kierującą jest elipsa e, o danych osiach AB i CD, leżąca na π_1 (rys. 2).

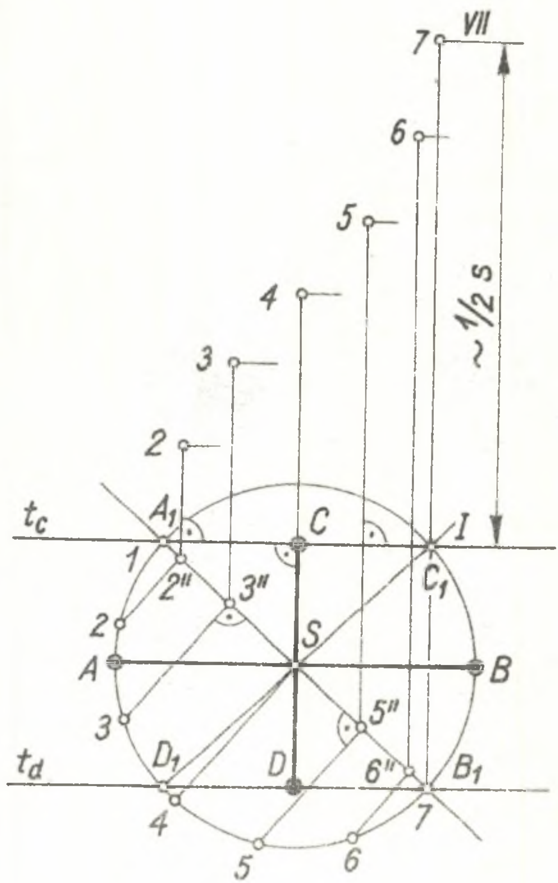
Z opisu poprzedniej konstrukcji wynika, że do rozwinięcia



Rys. 2

powierzchni walcowej eliptycznej podanym tu sposobem konieczny jest okrąg leżący na tej powierzchni. Okręgi leżące na powierzchniach walcowych eliptycznych znajdujemy jako linię przenikania walca eliptycznego Θ ze sferą Φ styczną do powierzchni walcowej w dwu punktach P i Q (twierdzenie Monge'a).

Osie kierującej elipsy oraz oś powierzchni Θ dla uproszczenia przyjęto szczególnie zatem łatwo wyznaczymy żądaną sferę Φ o promieniu równym dużej półosi elipsy podstawy i środ-



Rys. 3

ku leżącym na osi l pow. Θ . Okręgi będące liniami przenikania powierzchni walcowej ze sferą Φ leżą w płaszczyznach l $\varphi \perp \pi_2$ i $\psi \perp \pi_2$. Jeden z tych okręgów możemy uważać za kierującą powierzchni walcowej, której przekrojem normalnym jest elipsa podstawy o danych osiach AB i CD. Sprowadziliśmy zatem rozwiązanie zadania do przedstawionego na rys. 1.

Tok postępowania przy wykreślnym sposobie wyznaczania długości obwodu elipsy przy danych osiach będzie następujący:

Załóżmy, że płaszczyzna rysunku jest płaszczyzną symetrii λ powierzchni Θ przynależną do małej osi elipsy (patrz rys. 2). Niech elipsa ABCD i okrąg Ω przedstawiają kłady tych figur na płaszczyznę rysunku λ , (rys. 3). Przy takich założeniach opisana konstrukcja sprowadza się do następujących czynności:

Z wierzchołka C (lub D) małej półosi kreślimy prostą t_c (lub t_d) $\perp$ CD. Prosta ta przecina okrąg Ω w dwu punktach A_1 i C_1 (lub B_1 i D_1). Przez A_1S przechodzi średnica A_1B_1 okręgu Ω . Na średnicę tę rzucamy prostopadle punkty podziałowe okręgu i następnie na prostopadłych do t_c poczynając od punktu $A_1 = 1$ znajdujemy punkty przekształconej okręgu Ω a w dalszej konsekwencji przekształconą elipsy e.

Zauważmy tu dalej, że do znalezienia długości obwodu elipsy nie trzeba kreślić elipsy jak i przekształconej okręgu na rozwinięciu.

Kilka przykładów wykreślnego wyznaczania tej wielkości sprawdzono rachunkiem. Wyniki były w pełni zadowalające w zakresie kwalifikowanej inżynierskiej dokładności.

Rękopis złożono w Redakcji 4.X.67 r.

LITERATURA

[1] Polański Stanisław: Rozwinięcia powierzchni. PWN Warszawa 1961.

[2] Szerszeń Stanisław: Nauka o rzutach PWN Warszawa 1959.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ГРАФИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТУРА ЭЛЛИПСА

Р е з ю м е

В работе рассмотрено графическую конструкцию контура эллипса, который определен парой оси.

Метод основывается на развертке вспомагательной цилиндрической поверхности, для которой заданный эллипс является направляющей кривой.

ÜBER EINE GRAPHISCHE KONSTRUKTION DES ELLIPSENUMFANGS

Es wurde eine Konstruktion des Ellipsenumfangs besprochen. In dieser Konstruktion versuchte man den Ellipsenumfang durch die elliptische Zylinderfläche zu bestimmen.