ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: **Górnictwo** z. 218 Nr kol. 1220

Stanisław **KOWALIK**
Katedra Organizacji i Ekonomiki Górnictwa Politechniki Śląskiej

PODEJMOWANIE DECYZJI W SYTUACJACH NIEPEWNYCH Z WYKORZYSTANIEM PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Streszczenie. Praca dotyczy wieloetapowego procesu decyzyjnego mającego na celu maksymalizację zysku przez przedsiębiorstwa. Zysk danego przedsiębiorstwa może być różny w zależności od decyzji podjętych przez inne przedsiębiorstwa. W celu określenia kolejnych decyzji wykorzystano metodę programowania dynamicznego. Strategie postępowania dla przedsiębiorstw wyznaczono na podstawie:
a) zasady dominacji i strategii maksyminowych,
b) strategii Nasha,
c) strategii optymalnych w sensie Pareto.

DECISION-MAKING IN UNCERTAIN SITUATIONS, WITH THE USE OF DYNAMIC PROGRAMMING

Summary. The paper deals with the multi-stage decision-making process whose purpose is the maximization of profits made by plants. The profit of a given plant can be different depending on the decisions made by other palnts. In order to determine successive decisions the method of dynamic programming has been used. The procedure strategy for the plants has been determined on the basis of the following:
a) domination principle and maximin strategies,
b) Nash strategy,
c) optimum strategies as understood by Pareto.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В НЕНАДЕЖНЫХ СИТУАЦИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Резюме. Работа касается многоэтапного процесса принятия решений, с целью максимизации прибыли предприятиями. Прибыль данного предприятия может быть разной, это зависит от решений, принятных другими предприятиами. Для определения очередных решений был использован метод динамического программирования. Стратегия поведения для предприятий была определена на основании

а) принципа доминирования и максиминовых стратегий,

б) стратегии Наша,

в) оптимальных стратегий в смысле Парето.

1. WSTĘP

Będziemy zajmowali się problemami podejmowania decyzji w sytuacjach niepewnych, tj. takich, gdzie nie jesteśmy w stanie z góry przewidzieć dokładnie, jaki będzie efekt końcowy podjętej przez nas decyzji. Będziemy zajmowali się sytuacjami, gdzie jest kilku decydentów i efekt końcowy zależy od decyzji wszystkich decydentów. Przyjmujemy też założenie, że aby osiągnąć pożądany rezultat naszych działań, każdy z decydentów będzie musiał podjąć szereg kolejnych decyzji. Tak więc będziemy rozważali procesy decyzyjne wieloetapowe. Każdy z decydentów będzie kierował się przy tym swoim własnym celem. Na przykład kilka przedsiębiorstw o podobnym profilu produkcyjnym planuje swój rozwój lub modernizację. Celem tego planowania jest, aby osiągnąć maksymalny sumaryczny zysk po okresie trzech lat. Decyzje o charakterze strategicznym podejmują przedsiębiorstwa co roku. Mamy tu do czynienia z trzyetapowym procesem decyzyjnym. W zależności od tego, czy decydenci będą podejmowali swoje decyzje w poszczególnych latach niezależnie od siebie, czy też będą je podejmowali kolejno, znając jaką decyzję podjął przeciwnik, powstaną wtedy różne warianty procesu decyzyjnego. Decydenci mogą też nie oglądać się jeden na drugiego z góry zaplanować ciąg decyzji na okres trzech lat. W zależności od przyjętych strategii działania zyski poszczególnych przedsiębiorstw mogą być różne.

W zagadnieniach, gdzie mamy podany efekt końcowy, np. całkowity zysk po trzech latach, a celem naszym jest określenie ciągu decyzji prowadzących do pożądanego efektu końcowego, stosujemy metody programowania dynamicznego [3], [22]. Znając możliwe warianty procesu decyzyjnego w chwili końcowej, wybieramy decyzje korzystniejsze, które prowadzą z etapu poprzedniego do końcowego. Z kolei przechodzimy o jeden etap wstecz i wybieramy decyzje korzystniejsze prowadzące do wyznaczonych już lepszych decyzji w etapie przedostatnim. Cofając się tak dalej w procesie decyzyjnym dochodzimy do początku, gdzie są podejmowane pierwsze decyzje. Wybierany w ten sposób ciąg decyzji korzystniejszych stanowi strategię działania danego przedsiębiorstwa.

Może się zdarzyć, że na poszczególnych etapach podejmowania kolejnych decyzji interesy przedsiębiorstwa mogą być sprzeczne. Mamy wtedy do czynienia z sytuacją konfliktową. Wykorzystuje się wtedy teorię gier do podejmowania decyzji na danym etapie. Cały proces podejmowania kolejnych decyzji jest oparty na metodach programownia dynamicznego, a na danym etapie określa się decyzję w pewien sposób optymalną. Może to być optymalność w sensie Nasha [19], [20], optymalność w sensie Pareto [13], [20], [21] lub optymalność opartą na zasadzie maksyminu [7], [15], [16], [19], [20], [23]. Zasada maksyminu wyznacza tzw. bezpieczną decyzję. Polega ona na tym, że zaznaczamy minimalne zyski przy różnych decyzjach. Wybieramy decyzję, która zapewnia największy zysk spośród zaznaczonych minimalnych. Zasada maksyminu jest wzięta z teorii gier i gwarantuje ona, że zysk przedsiębiorstwa nie będzie mniejszy od tak wyznaczonego.

W procesie decyzyjnym bedziemy wyróżniali pewne stany tego procesu. Znaczy to, że po podjęciu swoich decyzji przez różnych decydentów proces przechodzi w inny stan. Jeżeli ten stan jest znany dla poszczególnych decydentów, to mamy do czynienia ze wzrostem informacji wraz z biegiem procesu decyzyjnego.

2. OGÓLNE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Mamy do dyspozycji k przedsiębiorstw o podobnym profilu produkcyjnym. Oznaczamy je jako $P_1,\ldots,P_k$. Będziemy rozważali proces decyzyjny wieloetapowy. Przyjmujemy, że tych etapów będzie m. Każde z przedsiębiorstw na każdym etapie podejmuje jedną decyzję spośród n możliwych. Celem tego działania jest, aby przedsiębiorstwo po podjęciu m kolejnych decyzji osiągnęło maksymalny zysk. Liczbę możliwych układów decyzji w pierwszym etapie podjętych przez k przedsiębiorstw określa wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami:

$$r_1 = w_n^{(k)} = n^k \tag{1}$$

Oznacza to, że proces decyzyjny w pierwszym etapie po podjęciu decyzji przez przedsiębiorstwa przechodzi w jeden z r_1 możliwych stanów. Ogólnie liczbę możliwych stanów na j-tym etapie bedziemy oznaczali przez r_j ($j = 1,\ldots,m$). Stany bedziemy oznaczali symbolem $s_{j,l}$. Jest to stan występujący na j-tym etapie o numerze l. W każdym stanie określone są zyski, jakie mogą osiągnąć przedsiębiorstwa. Z kolei w każdym ze stanów $s_{1,1},\ldots, s_{1,r_1}$ każde z k przedsiębiorstw ma możliwość podjęcia jednej z n możliwych decyzji. Ilustruje to rysunek 1.

Liczba możliwych stanów na drugim etapie wynosi

$$r_2 = r_1 \times r_1 = r_1^2 \tag{2}$$

Każde z k przedsiębiorstw ma możliwość podjęcia jednej z n możliwych decyzji. Tak więc liczba możliwych stanów na trzecim etapie wynosi

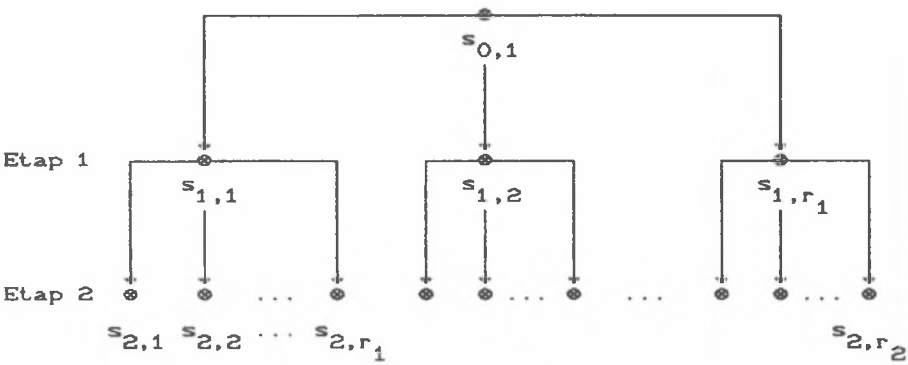
$$r_3 = r_1^2 \times r_1 = r_1^3 \tag{3}$$

Ogólnie liczba możliwych stanów na j-tym etapie wynosi

$$r_j = \left(n^k\right)^j = n^{k \times j} \tag{4}$$

Na ostanim m-tym etapie mamy więc stanów

$$r_m = n^{k \times m}$$



Rys. 1. Schemat wieloetapowego procesu decyzyjnego
Fig. 1. Diagram of multi-stage decision-making process

Ponieważ są znane zyski możliwe do osiągnięcia przez przedsiębiorstwa na poszczególnych etapach, obliczamy więc sumaryczne całkowite zyski po m etapach. Każde z przedsiębiorstw kieruje się zasadą, aby swoje całkowite zyski miało jak największe. W ostatnim etapie bierze się pod uwagę w każdym ze stanów tylko te decyzje, które pozwalają osiagnąć większy zysk. Z kolei sprawdzamy, które decyzje są korzystniejsze dla poszczególnych przedsiębiorstw w przedostatnim etapie. Posuwamy się tak dalej wstecz aż do stanu początkowego. Wyznaczone korzystniejsze decyzje stanowią ścieżkę dla procesu decyzyjnego i ukazują, przez jakie stany bedzie on przechodził.

Nasze rozważania bedziemy kontynuowali dalej na przykładzie dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2 które produkują podobne artykuły. Przedsiębiorstwa te bedą podejmowały decyzje o charakterze ekonomiczno-modernizacyjnym mające na celu osiągnięcie maksymalnego zysku całkowitego za okres dwóch lat. Decyzje będą podejmowane dwukrotnie, w każdym roku jedna. Mamy do czynienia z procesem decyzyjnym dwuetapowym, w którym wcześniej określone parametry mają wartości: k=2, m=2, n=2. Decyzje możliwe do podjęcia przez przedsiebiorstwo P_1 w pierwszym roku oznaczymy przez "a" i "b", a w drugim roku przez "c" i "d". Natomiast przedsiębiorstwo P_2 może podjąć w pierwszym roku decyzje "w" lub “x”, a w drugim roku decyzje “y” lub “z”. Stan początkowy procesu decyzyjnego przed podjęciem jakiejkolwiek decyzji oznaczymy przez $s_{0,1}$. Po podjęciu decyzji przez przedsiębiorstwa w pierwszym etapie proces decyzyjny znajdzie się w jednym z czterech możliwych stanów wyznaczonych przez pary decyzji (a,w), (a,x), (b,w), (b,x). Stany te oznaczymy odpowiednio $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. W drugim etapie po podjęciu kolejnych decyzji przez przedsiębiorstwa P_1, P_2 proces decyzyjny przejdzie w jeden spośród kolejnych szesnastu stanów wyznaczonych przez układ czterech decyzji. Stany te oznaczymy symbolami $s_{2,1}, s_{2,2},..,s_{2,16}$.

Ten dwuetapowy proces decyzyjny przedstawiony jest za pomocą grafu na rysunku 2. Po drugim roku zaznaczono zysk całkowity Z_1 i Z_2 przedsiębiorstw możliwy do osiągnięcia w poszczególnych stanach.

Rozważymy teraz na przykładach różne struktury informacyjne dla tych dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2.

3. PODEJMOWANIE DECYZJI KOLEJNO PRZEZ DECYDENTÓW NA PODSTAWIE ZNAJOMOŚCI POPRZEDNICH DECYZJI

3.1. Przedsiębiorstwo P_1 jako pierwsze podejmuje decyzję

Mamy do czynienia z sytuacją, w której pozycje decydentów nie są jednakowe. Przedsiębiorstwo P_1 ma możliwość forsowania swojej decyzji, gdyż zawsze działa jako pierwszy decydent. Przedsiębiorstwo P_2 natomiast ma większą informację, ponieważ zna już podjetą decyzję przez P_1. Rozważamy proces decyzyjny przedstawiony za pomocą grafu na rysunku 3.

Przy podejmowaniu decyzji w drugim roku przedsiębiorstwo P_2 wie, do którego ze stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$ doszedł proces oraz jaką następną decyzję podjęło P_1. Lepsze decyzje dla P_2 na drugim etapie zaznaczono przez podkreślenie. Podobnie w momencie podejmowania decyzji w drugim roku przedsiębiorstwo P_1 wie, do którego ze stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$ doszedł proces, a równocześnie precyzyjnie przewidzieć, jaką decyzję podejmie P_2. Dlatego też P_1 może podjąć najlepsze dla siebie decyzje w każdym ze stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. Te lepsze decyzje podkreślono. Podobnie w pierwszym roku przedsiębiorstwo P_2 wybiera lepszą decyzję dla siebie prowadzącą do stanów $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$, a przedsiębiorstwo P_1 w punkcie początkowym $s_{0,1}$. Ciąg decyzji zaznaczonych przez podkreślenie stanowi strategię postępowań dla przedsiębiorstw. W naszym przypadku jest to ciąg: a, w, c, y. Przedsiębiorstwa uzyskują zyski końcowe odpowiednio 547 i 864.

3.2. Przedsiębiorstwo P_2 jako pierwsze podejmuje decyzję

Rozumowanie nasze bedzie podobne jak w poprzednim rozdziale, tylko role przedsiębiorstw P_1 i P_2 zmienią się. Korzystniejsze decyzje zaznaczono na grafie przedstawionym na rysunku 4. Wybór tych korzystniejszych decyzji zaczyna się od końca. W drugim roku zaznaczamy korzystniejsze decyzje dla P_1, a potem dla P_2. Ciąg decyzji zaznaczonych przez podkreślenie stanowi strategię postępowania dla przedsiębiorstw. W tym przypadku jako pierwsze w punkcie startowym podejmuje przedsiębiorstwo P_2. Proces decyzyjny w tym przypadku składa się z następujących decyzji: x, b, z, d. Zysk końcowy przedsiębiorstw wynosi w tym przypadku odpowiednio 493 i 765. Z porównania wyników widzimy, że w tym przypadku zyski dla obydwu przedsiębiorstw były mniejsze.

4. PODEJMOWANIE DECYZJI RÓWNOCZEŚNIE PRZEZ PRZEDSIĘBIORSTWA NA POSZCZEGÓLNYCH ETAPACH

4.1. Wykorzystanie zasady dominacji i strategii maksyminowych przy wyborze decyzji

Mamy teraz do czynienia z sytuacją, gdzie przedsiębiorstwa podejmują równocześnie swe decyzje na poszczególnych etapach nie porozumiewając się ze sobą. Będziemy zajmowali się procesem decyzyjnym wieloetapowym, w którym interesuje nas maksymalny zysk przedsiębiorstw na końcu tego procesu. Począwszy od ostatniego etapu będziemy rozgrywali gry między przedsiębiorstwami w celu wyłonienia najlepszej decyzji dla poszczególnych przedsiębiorstw. Ponieważ zysk jednego przedsiębiorstwa nie jest równoważny ze stratą drugiego, mamy więc do czynienia z grą niekooperacyjną o sumie niezerowej [7], [19], [20]. W celu wyznaczenia odpowiednich decyzji dla przedsiębiorstw wykorzystamy metody znane z teorii gier o sumie zerowej, tj. zasadę dominacji i znajdywanie strategii maksyminowych [2], [4], [7], [8], [12], [13], [14], [16], [18], [19], [20], [23]. Te pojęcia można też wykorzystywać w grach o sumie niezerowej. Rozważania nasze przeprowadzimy na przykładzie omawianym poprzednio i przedstawionym na rysunku 2. Wykorzystując zasadę programowania dynamicznego [3], [9], [22] rozgrywamy pierwsze gry na ostatnim etapie. Należy wyznaczyć decyzje dla przedsiębiorstw P_1 i P_2 w stanach $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. Innymi słowy należy rozwiązać niezależnie cztery gry dwuosobowe o sumie niezerowej [7], [19], [20], [21]. Gry będziemy zapisywali w postaci macierzowej. W macierzy A będziemy zapisywali zyski dla przedsiębiorstwa P_1, a w macierzy B dla P_2, P_1 może podjąć decyzję c lub d, a P_2 decyzję y lub z. W terminologii teorii gier odpowiednikami naszych decyzji są strategie. Tak więc przy omawianiu teorii gier bedziemy posługiwali się słowem strategia, a po wyznaczeniu strategii najlepszej wskażemy, jaka decyzję powinno podjąć przedsiębiorstwo. Ogólnie przyjmujemy, że macierze gry A i B posiadają m wierszy i n kolumn:

$$A = \{a_{i,j}\},(i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n), \tag{6}$$

$$B = \{b_{i,j}\},(i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n). \tag{7}$$

Definicja 1

Strategia k-ta dominuje nad strategią l-tą w macierzy A, jeżeli

$$\underset{j}{\forall}\, a_{k,j} \geq a_{l,j},(j = 1,\ldots,n). \tag{8}$$

Strategię k-tą nazywamy dominującą nad strategią l-tą, a strategię l-tą nazywamy zdominowaną przez strategię k-tą [7], [20], [23].

Definicja 2

Strategia r-ta dominuje nad strategią s-tą w macierzy B, jeżeli

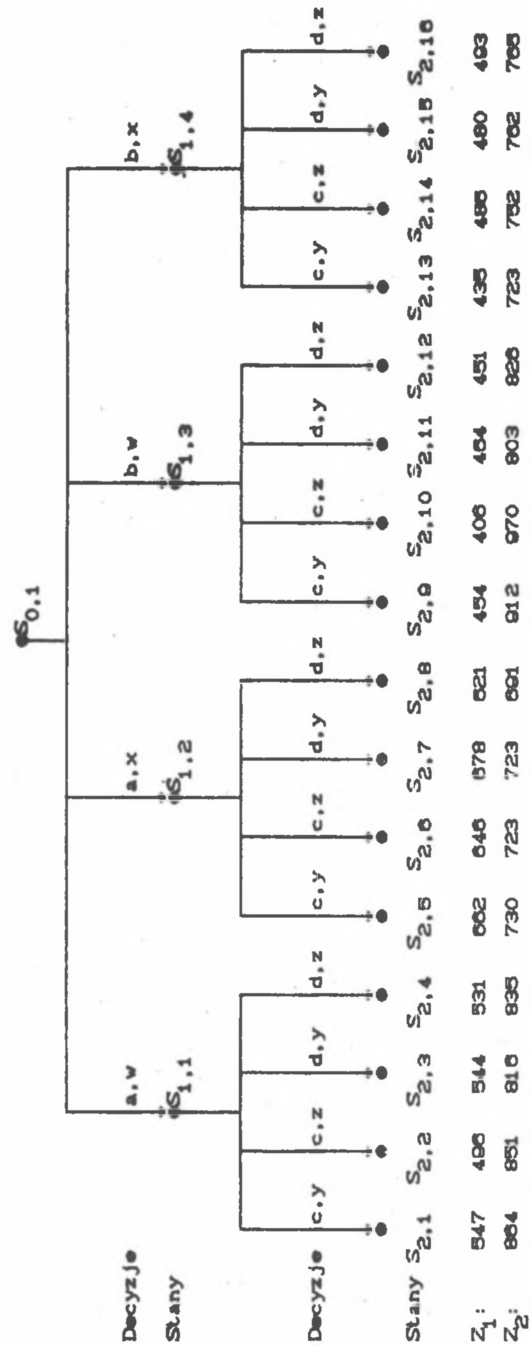
$$\underset{i}{\forall}\, b_{i,r} \geq b_{i,s},(i = 1,\ldots,m). \tag{9}$$

Strategię r-tą nazywamy dominującą nad strategią s-tą, a strategię s-tą nazywamy zdominowaną przez strategię r-tą [7], [20], [23].

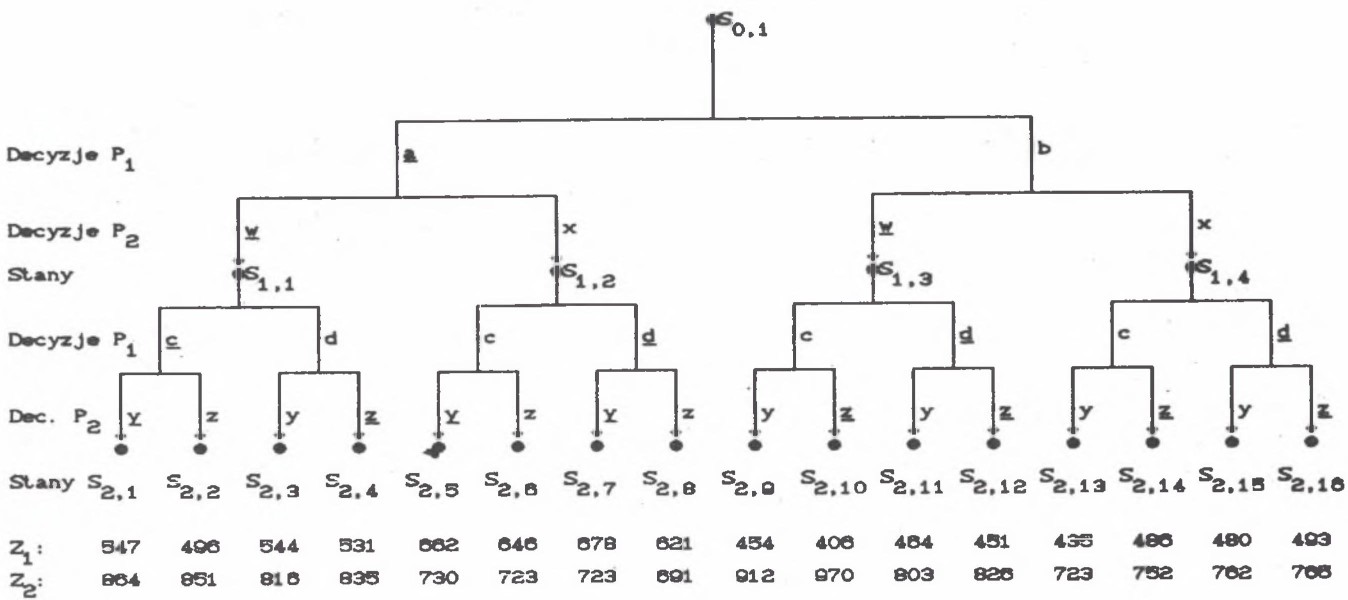
Przejdziemy teraz do omówienia strategii maksyminowych. Tak przedsiębiorstwo P_1 jak i P_2 będzie kierowało się zasadą, aby jak najmniej stracić. W tym sensie decyzje podjęte na podstawie strategii maksyminowych nazywamy bezpiecznymi. Przedsiębiorstwo P_1 analizując swoją macierz zysków A zaznacza w każdym wierszu zysk najmniejszy. Z tych zysków wybiera zysk najwiekszy. Jest to dolna cena gry dla gracza P_1 [7], [12], [14], [15], [23]. Numer wiersza macierzy A, w którym tak znaleziony zysk występuje, określa decyzję dla P_1. Przedsiębiorstwo P_2 zaznacza w każdej kolumnie macierzy B zyski minimalne. Z tych zysków minimalnych wybiera największy. Jest to dolna cena gry dla gracza P_2 [7], [12], [14], [15], [23]. Numer kolumny macierzy B, w którym tak znaleziony zysk występuje, określa decyzję dla P_2. Stosowanie strategii maksyminowych gwarantuje, że zyski przedsiębiorstw nie będą mniejsze od określonych przez dolne ceny gry. Mogą natomiast być większe.

Dolna cena gry dla P_1 wyraża się wzorem

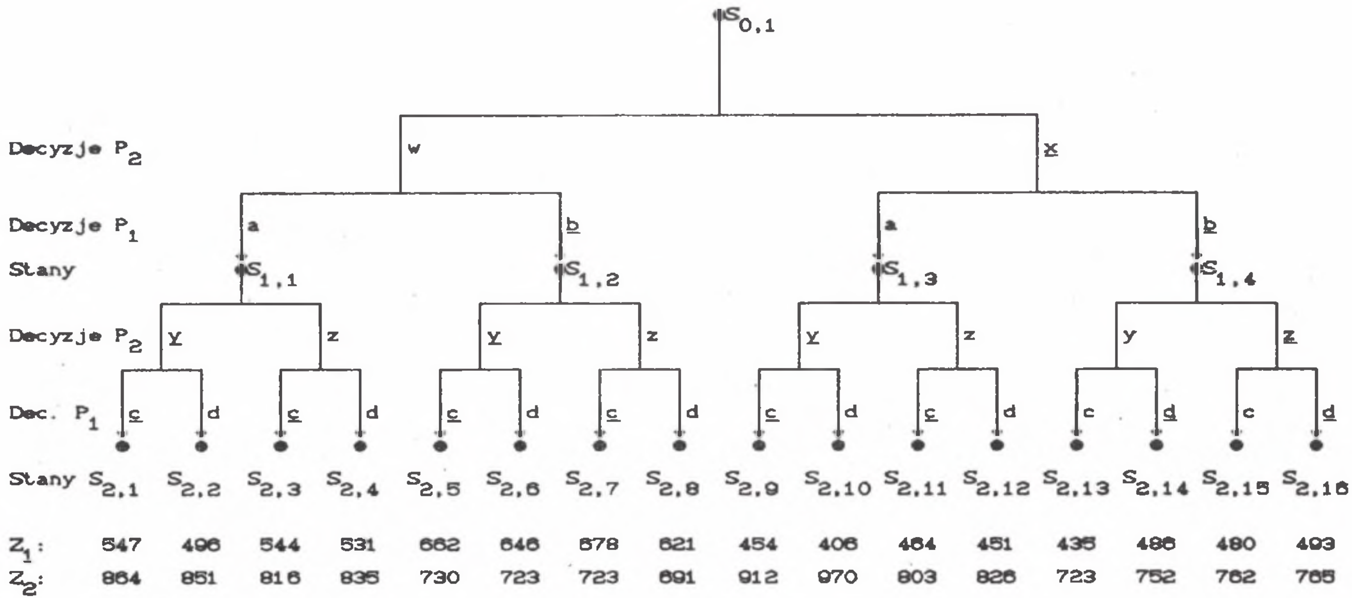
$$V_1 = \max_{i}\min_{j}\{a_{i,j}\}, \qquad (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n) \tag{10}$$



Rys. 2. Schemat dwuetapowego procesu decyzyjnego dla dwóch przedsiebiorstw P_1 i P_2
Fig. 2. Diagram of two-stage decision-making process for two plants P_1 and P_2



Rys. 3. Schemat określania decyzji korzystniejszych w przypadku, gdy przedsiębiorstwo P_1 pierwsze podejmuje decyzję
Fig. 3. Diagram of determinig more advantegeous decisions in the situation when the plant P_1 is the first to make a decision



Rys. 4. Schemat określania decyzji korzystniejszych w przypadku, gdy przedsiębiorstwo P_2 pierwsze podejmuje decyzję

Fig.4. Diagram of determining more advantageous decisions in the situation when the plant P_2 is the first to make a decision

Dla przedsiębiorstwa P_2 dolna cena gry wyraża się wzorem

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\}, \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Rozważymy teraz proces podejmowania decyzji zilustrowany na rysunku 2 dla przedsiębiorstw P_1 i P_2. Rozpoczniemy określanie decyzji od końcowego etapu, tj. w drugim roku.

W stanie $s_{1,1}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 547 & 496 \\ 544 & 531 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 864 & 851 \\ 816 & 835 \end{bmatrix} \end{array}$$

Żadne z przedsiębiorstw nie ma strategii dominujących w myśl definicji 1 i 2. P_1 oblicza dolną cenę gry na podstawie wzoru (10)

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\} = \max(496, 531) = 531. \tag{12}$$

Ta cena V_1 określa strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_1. Jest nią "d". Natomiast P_2 oblicza swoją dolną cenę gry na podstawie wzoru (11)

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\} = \max(816, 835) = 835. \tag{13}$$

Strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_2 jest więc "z".

W stanie $s_{1,2}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 662 & 646 \\ 678 & 621 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 730 & 736 \\ 723 & 691 \end{bmatrix} \end{array}$$

Żadne z przedsiębiorstw nie ma strategii dominujących w myśl definicji 1 i 2. P_1 oblicza dolną cenę gry na podstawie wzoru (10)

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\} = \max(646, 621) = 646. \tag{14}$$

Ta cena V_1 określa strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_1. Jest nią "c". Natmiast P_2 oblicza swoją dolną cenę gry na podstawie wzoru (11)

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\} = \max(723, 691) = 723. \tag{15}$$

Strategię (bezpieczną) maksyminową dla P_2 jest więc "y".

W stanie $s_{1,3}$ mamy do rozegrania grę określona macierzami:

$$B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 454 & 406 \\ 464 & 451 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 912 & 970 \\ 803 & 826 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tutaj P_1 ma strategię dominującą "d", a dla P_2 dominującą strategiąjest "z". Gwarantowane zyski przedsiębiorstw przy trzymaniu się tych strategii są odpowiednio $Z_1 = 451$ i $Z_2 = 826$.

W stanie $s_{1,4}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 435 & 486 \\ 480 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 723 & 752 \\ 762 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dominującą strategią dla P_1 jest tutaj "d", a dla P_2 "z".
Zestawienie wybranych decyzji jest następujące

Stan	Wybrane	Zyski Z_1,Z_2
$s_{1,1}$	(d, z)	(531,835)
$s_{1,2}$	(c, y)	(662,730)
$s_{1,3}$	(d, z)	(451,826)
$s_{1,4}$	(d, z)	(493,765)

Należy rozegrać jeszcze jedną grę odnoszącą się do stanu początkowego $s_{0,1}$. Gra ta jest określona przez macierze

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 531 & 662 \\ 451 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} 835 & 730 \\ 826 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

Strategią dominującą dla P_1 jest tutaj "a" a dla P_2 "w". Zyski przedsiębiorstw wynoszą odpowiednio $Z_1=531$ i $Z_2=835$. Tak więc przedsiębiorstwo P_1 powinno w pierwszym roku podjąć decyzję "a" a P_2 decyzję "w". W drugim roku przedsiębiorstwa powinny podjąć decyzje odpowiednio "d" i "z". W tym przypadku proces decyzyjny doszedł do stanu końcowego $s_{2,4}$, w którym przedsiębiorstwa uzyskają zyski $Z_1=531$ i $Z_2=835$.

4.2. Wykorzystanie strategii Nasha przy wyborze decyzji

W celu wyznaczenia odpowiednich decyzji dla przedsiębiorstw wykorzystamy definicję równowagi nieooperacyjnej w sensie Nasha. Rozważania nasze przeprowadzimy na przykładzie omawianym poprzednio i przedstawionym na rysunku 2. Rozważania te będą podobne jak w rozdziale 4.1, tylko kryterium wyboru decyzji będzie inne. Zamiast stosowania zasady dominacji i strategii maksyminowych będziemy poszukiwali punktu równowagi w sensie Nasha. Wykorzystując zasadę programowania dynamicznego [3], [9], [22] rozgrywamy pierwsze gry na ostanim etapie. Należy wyznaczyć decyzje dla przedsiębiorstw P_1 i P_2 w stanach $s_{1,1}$, $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{1,4}$. Innymi słowy należy rozwiązać niezależnie cztery gry dwuosobowe o sumie niezerowej [7], [19], [20], [21]. Jako rozwiązania tych gier będziemy przyjmowali punkty równowagi w sensie Nasha. Strategie odpowiadajace tym punktom równowagi nazywają sie strategiami Nasha [7], [15], [19], [20].

Definicja 3

Para strategii o wskaźnikach (u,v) stanowi rozwiązanie równowagi niekooperacyjnej w sensie Nasha dla procesu dwuosobowego o sumie niezerowej określonego przez macierze A i B, jeżeli dla każdego wskaźnika "i" oraz "j" są spełnione nierówności:

$$a_{u,v} \geq a_{i,v} \quad \text{i} \quad b_{u,v} \geq b_{u,j}. \tag{16}$$

W grach o sumie niezerowej może występować kilka punktów równowagi w sensie Nasha, przy czym rezultaty w tych punktach są różne. Przy wyborze decyzji w takim przypadku można skorzystać z następujacej definicji:

Definicja 4

Para strategii o wskaźnikach (u,v) jest lepsza od pary strategii określonej wskaźnikami (p,q), jeżeli

$$a_{u,v} \geq a_{p,q} \quad \text{i} \quad b_{u,v} \geq b_{p,q}. \tag{17}$$

Przynajmniej jedna z tych nierówności musi być ostra.

W stanie $s_{1,1}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 547 & 496 \\ 544 & 531 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 864 & 851 \\ 816 & 835 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie występują dwa punkty równowagi w sensie Nasha. Te punkty są określone przez pary strategii (c,y) oraz (d,z). Zyski odpowiadające tym strategiom są nastepujące (547, 864) i (531, 835). W myśl definicji 4 para strategii (c,y) jest lepsza od pary (d,z). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategię "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,2}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 662 & 646 \\ 678 & 621 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 730 & 736 \\ 723 & 691 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie występują dwa punkty równowagi w sensie Nasha. Te punkty są określone przez pary strategii (d,y) oraz (c,z). Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (678, 723) i (646, 736). W myśl definicji 4 nie ma w tej grze strategii lepszych. Ta gra nie ma rozwiązania [20]. Żadne z przedsiębiorstw nie ma strategii dominujących w myśl definicji 1 i 2. Decydujemy się więc na zastosowanie strategii maksyminowych. P_1 oblicza dolną ceną gry na podstawie wzoru (10)

$$V_1 = \max_i \min_j \{a_{i,j}\} = \max(646, 621) = 646 \tag{18}$$

Ta cena V_1 określa strategię (bezpieczną) maksyminowa dla P_1. Jest nią "c". Natomiast P_2 oblicza swoją dolna cenę gry na podstawie wzoru (11)

$$V_2 = \max_j \min_i \{b_{i,j}\} = \max(723, 691) = 723 \tag{19}$$

Strategią (bezpieczną) maksyminową dla P_2 jest więc "y".

W stanie $s_{1,3}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 454 & 406 \\ 464 & 451 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 912 & 970 \\ 803 & 826 \end{bmatrix} \end{array}$$

Punktem równowagi w sensie Nasha (wzór 16) jest tutaj para strategii (d,z).
W stanie $s_{1,4}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{c|cc} & y & z \\ \hline c & 435 & 486 \\ d & 480 & 493 \end{array} \qquad B=\begin{array}{c|cc} & y & z \\ \hline c & 723 & 752 \\ d & 762 & 765 \end{array}$$

W myśl definicji 3 punktem równowagi w sensie Nasha jest tutaj para strategii (d,z). Te punkty równowagi Nasha i odpowiadające im decyzje są następujace

Stan	Punkt równowagi		Z_1, Z_2	Decyzje
$s_{1,1}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$	=	(547,864)	(c, y)
$s_{1,2}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$	=	(662,730)	(c, y)
$s_{1,3}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$	=	(451,826)	(d, z)
$s_{1,4}$	$(a_{u,v}, b_{u,v})$	=	(493,765)	(d, z)

Należy rozegrać jeszcze jedną grę odnoszącą się do stanu początkowego $s_{0,1}$. Gra ta jest określona przez macierze

$$A=\begin{array}{c|cc} & w & x \\ \hline a & 547 & 662 \\ b & 451 & 493 \end{array} \qquad B=\begin{array}{c|cc} & w & x \\ \hline a & 864 & 730 \\ b & 826 & 765 \end{array}$$

Punktem równowagi w sensie Nasha jest tutaj para $(a_{u,v}, b_{u,v})$ = (547,867), a odpowiadającą temu punktowi jest para decyzji (a, w). Tak więc przedsiębiorstwo P_1 powinno w pierwszym roku podjąć decyzję "a", a P_2 decyzję "w". W drugim roku przedsiębiorstwa powinny podjąć decyzje odpowiednio "c" i "y". W tym przypadku proces decyzyjny doszedł do stanu końcowego $s_{2,1}$. Zyski bedą wynosiły odpowiednio 547 dla P_1 i 864 dla P_2.

Należy zwrócić uwagę na to, że wartości rozwiązań maksyminowych nie są lepsze (a więc nie wieksze) niż pary wartości jakiegokolwiek rozwiązania równowagi Nasha [19]. Ma to odzwierciedlenie w zyskach w stanie końcowym $s_{2,4}$ przy zastosowaniu strategii maksyminowych oraz w stanie $s_{2,1}$ przy wykorzystaniu strategii Nasha. Zyski te wynoszą odpowiednio (531,835) w pierwszym przypadku i (547,864) w drugim przypadku.

4.3. Wykorzystanie strategii optymalnych w sensie Pareto

Rozważania nasze przeprowadzimy na przykładzie omawianym poprzednio i przedstawionym na rysunku 2. Rozważania te bedą podobne jak w rozdziale 4.1, tylko kryterium wyboru decyzji bedzie inne. Będziemy poszukiwali takiej pary strategii najlepszej w tym sensie, że każdy inny wynik można "poprawić" co najmniej dla jednego gracza, nie czyniąc tym samym szkody drugiemu. W tym sensie o takim wyniku mówi się, ze jako jedyny nie jest łącznie (dla obu graczy) dominowany przez żaden inny wynik. Wynik o tej własności nazywa się optymalnym w sensie Pareto [13], [20], [21]. Wynik optymalny w sensie Pareto to taki, że nie ma innego wyniku w tej grze, przy którym co najmniej jeden gracz nie uzyskałby mniej.

W stanie $s_{1,1}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & \;\; z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 547 & 496 \\ 544 & 531 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & \;\; z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 864 & 851 \\ 816 & 835 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (547, 864). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "c" i "y" , ktore odpowiadają temu wynikowi. Każde odstępstwo od tych strategii powoduje zmniejszenie zysków dla co najmniej jednego gracza. Zyski odpowiadające tym strategiom są następujące (547, 864). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategię "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,2}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & \;\; z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 662 & 646 \\ 678 & 621 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & \;\; z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 730 & 736 \\ 723 & 691 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (662, 730). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "c" i "y", które odpowiadają temu wynikowi. Nie ma innego wyniku w tej grze, przy którym co najmniej jeden gracz nie uzyskałby mniej. Zyski odpowidające tym strategiom są następujące (662, 730). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategie "c" a P_2 "y".

W stanie $s_{1,3}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & \;\; z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 454 & 406 \\ 464 & 451 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y & \;\; z \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 912 & 970 \\ 803 & 826 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (454, 912). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "c" i "y", które odpowiadają temu wynikowi. Każde odstępstwo od tych strategii powoduje zmniejszenie zysków dla co najmniej jednego gracza. Zyski odpowiadające tym strategiom są następujace (457, 912). Wobec tego przedsiębiorstwo P_1 powinno obrać strategie "c", a P_2 "y".

W stanie $s_{1,4}$ mamy do rozegrania grę określoną macierzami:

$$A=\begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 435 & 486 \\ 480 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 723 & 752 \\ 762 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

W tym stanie wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (493, 765). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto są "d" i "z", które odpowiadają temu wynikowi. Zestawienie wybranych decyzji i zysków przedstawia się następująco

Stan	Wybrane decyzje	Zyski Z_1, Z_2
$s_{1,1}$	(c, y)	(547, 867)
$s_{1,2}$	(c, y)	(662, 730)
$s_{1,3}$	(c, y)	(454, 912)
$s_{1,4}$	(d, z)	(493, 765)

Należy rozegrać jeszcze jedną grę odnoszącą się do stanu początkowego $s_{0,1}$. Gra ta jest określona przez macierze

$$A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 547 & 662 \\ 454 & 493 \end{bmatrix} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 864 & 730 \\ 912 & 765 \end{bmatrix} \end{array}$$

Wynikiem optymalnym w sensie Pareto jest para zysków (547, 864). Strategiami optymalnymi w sensie Pareto sa "a" i "w", które odpowiadają temu wynikowi. Tak więc przedsiębiorstwo P_1 powinno w pierwszym roku podjąć decyzję "a", a P_2 decyzję "w". W drugim roku przedsiębiorstwa powinny podjąć decyzje odpowiednio "c" i "y". W tym przypadku proces decyzyjny doszedł do stanu końcowego $s_{2,1}$. Zyski będą wynosiły odpowiednio 547 dla P_1 i 864 dla P_2.

Strategie Nasha oraz Pareto doprowadziły w tym przypadku do tego samego stanu końcowego $s_{2,1}$ procesu decyzyjnego. Różnice wystąpiły przy rozwiązywaniu gry w stanie $s_{1,3}$. Stan ten jednak nie uczestniczył w procesie decyzyjnym. Proces przechodził przez stany $s_{0,1}$, $s_{1,1}$, $s_{2,1}$.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono problemy podejmowania decyzji przez przedsiębiorstwa mające na celu maksymalizację swojego zysku. Proces podejmowania decyzji był wieloetapowy. Niepewność sytuacji wyrażała sie tutaj przez to, że zysk danego przedsiębiorstwa nie zależał tylko od decyzji podejmowanych przez nie, ale także od decyzji innych przedsiębiorstw uczestniczących w procesie decyzyjnym. Ponieważ celem przedsiębiorstw była maksymalizacja zysków na końcu wieloetapowego procesu decyzyjnego, wykorzystano więc do rozwiązania tego zagadnienia metody programowania dynamicznego. Proces podejmowania decyzji zilustrowany był na przykładzie dwóch przedsiębiorstw P_1 i P_2.

W rozdziale 3 przedstawiono proces podejmowania decyzji kolejno przez decydentów na podstawie znajomości poprzednich decyzji. W punkcie 3.1 przedsiębiorstwo P_1 jako pierwsze podejmowało decyzję. W punkcie 3.2 role przedsiębiorstw odwróciły się. Jako pierwsze podejmowało decyzje przedsiębiorstwo P_2. Zyski po dwóch latach okazały się różne w tych dwóch przypadkach.

W rozdziale 4 przedstawiono proces podejmowania decyzji, w którym przedsiębiorstwa na poszczególnych etapach podejmują decyzje równocześnie nie komunikując sie przy tym między sobą. Spowodowało to, że na poszczególnych etapach należało rozegrać pewne gry między przedsiębiorstwami w celu wyłonienia decyzji najlepszych. Gry te nie były konfliktowe. Zwiększenie zysku przez jedno przedsiębiorstwo nie było równoważne ze stratą przez inne przedsiębiorstwo. W teorii gier te gry sklasyfikowane są jako niekooperacyjne gry o sumie niezerowej. Niektóre gry o sumie niezerowej nastręczają wiele trudności w rozwiązywaniu i jeszcze nie doczekały się pełnego opracowania matematycznego. Pewne gry nie mają rozwiazań inne mają ich kilka. W związku z tym powstały różne sposoby w znajdywaniu strategii najlepszych w tych grach. W prezentowanej pracy przedstawiono trzy sposoby znajdywania strategii "optymalnych":
a) przez wykorzystanie zasady dominacji i strategii maksyminowych,
b) przez wykorzystanie strategii Nasha,
c) przez wykorzystanie strategii optymalnych w sensie Pareto.

Stosując różne kryteria optymalnych strategii można uzyskać rożne wyniki końcowe. W omawianym przykładzie przedsiębiorstw P_1 i P_2 zyski uzyskane po dwóch latach w przypadku a) były mniejsze niż w przypadku b) i c). Przedsiębiorstwa mogłyby zwiększyć swoje zyski stosując kooperację. Ponadplanowe zyski uzyskane w wyniku kooperacji musiałby odpowiednio podzielić między siebie. Te zagadnienia jednak wykraczają poza przewidziane ramy tej pracy i nie były tutaj omawiane. Będą one rozważane w następnych pracach.

LITERATURA

[1] Ackoff R.L.: Decyzje optymalne w badaniach stosowanych. PWN, Warszawa 1969.
[2] Barton R.F.: Wprowadzenie do symulacji i gier. WNT, Warszawa 1974.
[3] Bellman R., Dreyfus E.: Programowanie dynamiczne, zastosowania, PWE, Warszawa 1967.
[4] Blackwell D., Girshick M.A.: Theory of Games and Statistical Decisions. John Wiley, New York 1954.
[5] Greń J.: Gry statystyczne i ich zastosowania. PWE, Warszawa 1967.
[6] Kaźmierczak J.: Teoria gier w cybernetyce. Wiedza Powszechna, Warszawa 1973.
[7] Kofler E.: Wstęp do teorii gier. PZWS, Warszawa 1963.
[8] Kowalik S.: Wykorzystanie teroii gier do określania bezpieczeństwa. ZN Pol.Śl. Górnictwo Nr 210, Gliwice 1993.
[9] Kozdrój M., Przybyła H.: Teoria organizacji i zarządzania. Część III. Modele matematyczne w organizacji produkcji górniczej. Skrypt Pol. Śl. Nr 1272, Górnictwo 1986.
[10] Lesz M.: Ekonomiczne gry decyzyjne. PWE, Warszawa 1979.
[11] Lesz M.: Techniczno-ekonomiczne zastosowania metod programowania dynamicznego. PWE, Warszawa 1968.
[12] Luce R.D., Raiffa H.: Gry i decyzje. PWE, Warszawa 1964.
[13] Mc Kinsey J.C.: Indroduction to the Theory of Games. Mc Graw Hill, New York 1952.
[14] Owen G.: Teoria gier, PWN, Warszawa 1975.
[15] Polkowski L.T.: Wstęp do teorii gier. WPW - Politechnika Warszawska, Warszawa 1987.
[16] Potocki C., Przybyła H.: Badania operacyjne w górnictwie. Skrypt Pol. Śl. Nr 905, Górnictwo, Gliwice 1980.
[17] Sadowski W.: Teoria podejmowania decyzji. PWE, Warszawa 1981.
[18] Szalwek M.: Pojęcia i metody teorii gier. PAN, Warszawa 1963.
[19] Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1988.
[20] Tyszka T.: Konflikty i strategie. WNT, Warszawa 1978.
[21] Vajda S.: Theory of Games and Linear Programming. New York 1956.
[22] Wendcel E.: Elementy programowania dynamicznego. PWE, Warszawa 1968.
[23] Williams J.D.: Strateg doskonały. Wprowadzenie do teorii gier. PWN, Warszawa 1965.

Recenzent: prof. dr hab. **Jadwiga Orylska**
Wpłynęło do Redakcji w czerwcu 1993 r.

Abstract

The paper deals with the problems of decision-making in uncertain situations, i.e. the situations in which we are unable to predict the final effect of our decision precisely. The plants whose purpose is the maximization of their profits are decision-makers. The process of decision-making consists of serveral stages. Each of the decision-makers takes a few successive decisions. The uncertainty of the situation is connected with the fact that the profit of a given plant does not depend only on its decisions, but also on the decisions of the other plants taking part in the process of decision-making. In order to determine sucessive decisions the methods of dynamic programming [3], [22] have been used. The process of decision-making has been illustrated on the example of two plants p_1 and p_2.

Chapter 3 presents the process of decision-making successively by the decision-makers on the basis of the knowledge of the previous decisions. Sub-chapter 3.1 describes the situation in which the plant p1 was the first to make a decision. In sub-chapter 3.2 the roles of the plants changed. The plant P_2 made a decision first. The profits after two years turned out to be different in both cases.

Chapter 4 presents the process of decision-making in which the plants make decisions in particular stages simultaneously not communicating with each other. It has made it necessary for the planst to play certain games in the particular stages in order to find the best decisions. These games are not conflicting. An increase in profit gained by one enterprise does not mean a loss for the other. In the theory of games they are called non-cooperative games whose sum is non-zero [7], [19], [20].

This paper shows three ways of finding optimum" strategies:

a) by making use of domination principle and maximin strategies [2], [4], [7], [8], [12], [13], [14], [16], [18], [19], [20], [23];
b) by making use of Nash strategy [7], [8], [15], [19]. [20];
c) by making use of optimum strategies as understood by Pareto [13], [20], [21].

Applying different criteria of strategy optymality we can obtain different final results. In the discussed example of the plants P_1 and P_2 the profits gained after two years were smaller in the case “a” than in the cases “b” and “c”.