

Krzysztof MUSIOŁ  
Instytut Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej

## WYKORZYSTANIE TRANSFERU HAMONA DO WZORCOWEGO PODZIAŁU NAPIĘCIA STAŁEGO

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono metodę dokładnego podziału napięcia stałego, opierającą się na przełączalnych opornikach wzorcowych. Praca zawiera zarys teorii transferów ze szczególnym uwzględnieniem przełączenia szeregowo-równoległego, wykorzystywanego w dzielniku Hamona.

## THE USE OF HAMON TRANSFER FOR STANDARD DC VOLTAGE DIVISION

**Summary.** The method of precise division of direct voltage based on switched resistance standards is described. The paper presents the outline of transfer theory with particular consideration of series-parallel switching used in Hamon divider.

### 1. WPROWADZENIE

W dziedzinie miernictwa precyzyjnego – wzorców napięcia, procesów przenoszenia wartości napięć na wzorce użytkowe, czy też procesów kalibracji – dokładny podział napięcia odgrywa bardzo istotną rolę. Gdy zaczęto używać pierwotnego wzorca napięcia opartego na zjawisku Josephsona, konieczne stało się przeniesienie z bardzo dużą dokładnością wartości napięcia stałego na inne wzorce użytkowe o różnych wartościach napięcia. W tym przypadku, jak również w przypadku wzorcowania przyrządów pomiarowych, z pomocą przychodzą – szeroko dziś stosowane – precyzyjne dzielniki napięcia stałego, budowane jako samodzielne narzędzia pomiarowe. Tym sposobem możliwe stało się rozszerzenie wartości napięcia wzorcowego ze złącza Josephsona do użytecznego poziomu (nawet powyżej 1 kV). Przy użyciu dzielników napięcia łatwo rozpowszechnić i rozszerzyć wartości stałych źródeł napięcia wzorcowego, ponieważ mogą one uczestniczyć w procesie porównania zarówno od strony wejścia, jak i wyjścia dzielnika. Powszechne jest zastosowanie dokładnego podziału napięcia w transfe-rze AC/DC, gdzie wymagane jest dostosowanie poziomu napięcia wzorcowego do wartości nominalnej przetwornika AC/DC. Wartości nominalnych napięć wejściowych takich przetwor-ników wynoszą około  $1 \div 2$  V, więc w celu kalibracji dużych wartości napięć stałych konieczny jest ich dokładny podział.

Obecnie stosowane są cztery zasadniczo odmienne techniki podziału napięcia stałego:

- 1) dzielnik Kelvina-Varleya,
- 2) metoda sekwencyjno-cykliczna,
- 3) konwerter cyfrowo-analogowy PWM DAC,
- 4) idea Hamona.

## 2. IDEA HAMONA REALIZACJI TRANSFERU OPOROWEGO

Idea Hamona opiera się na przełączalnych opornikach o jednakowych wartościach nominalnych, stąd celowe jest przybliżenie teorii transferów. Zastosowanie idei Hamona minimalizacji błędu przekładni dzielnika umożliwia uzyskanie dużej dokładności podziału napięcia, sięgającej nawet ułamków ppm.

### 2.1. Teoria transferów oporowych

Transferzy oporowe służą do precyzyjnego – z niedokładnością na ogół mniejszą od 1ppm – wyznaczenia stosunku wartości rezystancji oporników. Składają się one z oporników wzorcowych o takiej samej znamionowej rezystancji  $R$ , które można łączyć szeregowo, równolegle lub szeregowo-równolegle uzyskując w ten sposób wartości rezystancji odpowiednio  $nR$ ,  $R/n$ ,  $R$ , a wyznaczenie błędów nie wymaga skomplikowanych obliczeń matematycznych [1].

Wartość  $i$ -tego opornika można wyrazić zależnością:

$$R_i = R(1 - \delta_i), \quad (1)$$

gdzie:

$R$  – wartość znamionowa rezystancji,

$\delta_i$  – błąd względny.

Rezystancja zastępcza układu wynosi w przypadku połączenia:

- szeregowego

$$R_S = \sum_{i=1}^n R_i = \sum_{i=1}^n R(1 - \delta_i) = nR(1 - \delta_{sr}), \quad (2)$$

gdzie błąd średni

$$\delta_{sr} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i, \quad (3)$$

- równoległego

$$R_R = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1} \approx \frac{R}{n} \left[ 1 - \delta_{sr} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\delta_i - \delta_{sr})^2 \right], \quad (4)$$

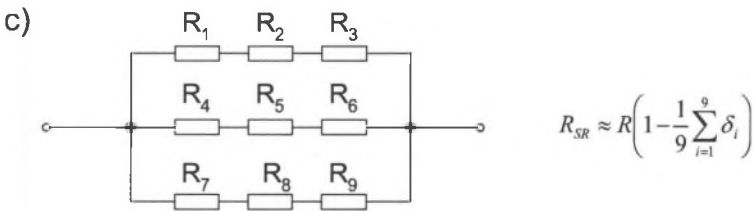
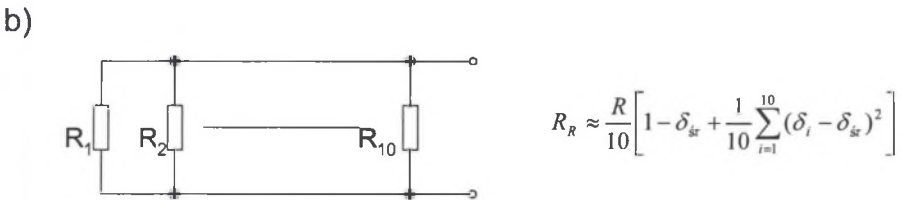
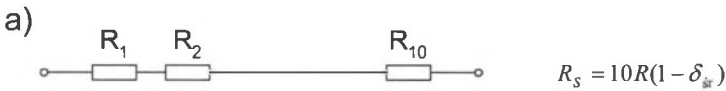
(wzór przybliżony uzyskano przez rozwinięcie funkcji dwukrotnie w szereg Maclaurina i pominięcie wyrazów z trzecimi i wyższymi wykładnikami potęg),

- szeregowo-równoległego

$$R_{SR} \approx R \left( 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \right). \quad (5)$$

Zależność (5) jest prawdziwa w przypadku gdy liczba rezystorów transferowych  $n$  jest kwadratem liczby naturalnej  $k$ . Przy połączeniu szeregowo-równoległym tworzy się  $k$  rzędów połączonych równoległe zawierających  $k$  rezystorów. Uproszczenie polega w tym przypadku na pomijaniu elementów, w których błąd  $\delta$  występuje w drugiej potęgze.

Poszczególne zależności na rys.1 wyrażają rezystancję zastępczą dziesięciu połączonych rezystorów z uwzględnieniem względnego błędu wyznaczenia tej rezystancji. W przypadku połączenia szeregowo-równoległego rezystor  $R_{10}$  nie uczestniczy w transferze.



Rys.1. Połączenia rezystorów, dla których obliczane są stosunki rezystancji: a) szeregowo, b) równoległe, c) szeregowo-równoległe

Fig.1. Resistor a) series, b) parallel, c) series-parallel connections used for resistance ratio

Stosunek rezystancji zastępczej połączenia szeregowego  $R_S$  do rezystancji połączenia równoległego  $R_R$  można wyrazić równaniem:

$$\frac{R_S}{R_R} = n^2 \frac{1 - \delta_{sr}}{1 - \delta_{sr} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\delta_i - \delta_{sr})^2}. \quad (6)$$

W celu uproszczenia obliczeń zakłada się, że  $n$  jest parzyste. Dla najbardziej niekorzystnego przypadku, występującego, gdy dla dowolnych  $n/2$  rezystorów  $\delta_i = \delta_{\max} = \delta$ , a dla pozostałych  $\delta_i = -\delta_{\max} = -\delta$ , otrzymuje się  $\delta_{sr} = 0$  oraz  $(\delta_i - \delta_{sr})^2 = \delta^2$ . Wtedy:

$$\frac{R_S}{R_R} = \frac{n^2}{1 - \delta^2} \approx n^2(1 + \delta^2). \quad (7)$$

Ponieważ przy założonej parzystej liczbie rezystorów nie zawsze wszystkie rezystory uczestniczą w transferze szeregowo-równoległym (patrz rys.1b), więc przy wyznaczaniu stosunku rezystancji zastępczej połączenia szeregowego do połączenia szeregowo-równoległego i wyznaczaniu rezystancji zastępczej połączenia szeregowo-równoległego do połączenia równoległego zakłada się  $n=10$ .

Stosunek rezystancji zastępczej połączenia szeregowego do połączenia szeregowo-równoległego wynosi:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} = 10 \frac{1 - \delta_{sr}}{1 - \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \delta_i} \approx 10(1 - \delta_{sr} + \delta'_{sr}), \quad (8)$$

gdzie  $\delta_{sr}'$  oznacza średni błąd dziewięciu rezystorów użytych przy połączeniu szeregowo-równoległym

Ponieważ:

$$\delta_{sr} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \delta_i, \quad (9)$$

a

$$\delta'_{sr} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \delta_i, \quad (10)$$

dlatego można zapisać:

$$10\delta_{sr} = 9\delta'_{sr} + \delta_{10}. \quad (11)$$

Stąd otrzymuje się:

$$\delta_{sr} - \delta'_{sr} \approx 0,1\delta_{10}, \quad (12)$$

gdzie  $\delta_{10}$  oznacza błąd dziesiątego rezystora (nie występującego w połączeniu szeregowo-równoległym).

Uwzględniając powyższą zależność otrzymuje się ostatecznie:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} \approx 10(1 - 0,1\delta_{10}). \quad (13)$$

Stosunek rezystancji zastępczej połączenia szeregowo-równoległego do połączenia równoległego wynosi:

$$\frac{R_{SR}}{R_R} = \frac{10 \left( 1 - \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \delta_i \right)}{\left[ 1 - \delta_{sr} - \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (\delta_i - \delta_{sr})^2 \right]}. \quad (14)$$

Po uproszczeniach otrzymuje się:

$$\frac{R_{SR}}{R_R} \approx \frac{10(1 - \delta'_{sr})}{1 - \delta_{sr} - \delta^2} \approx 10(1 - \delta'_{sr} + \delta_{sr} + \delta^2). \quad (15)$$

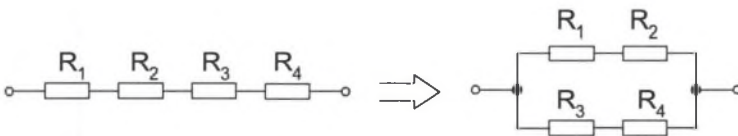
Ostatecznie:

$$\frac{R_{SR}}{R_R} \approx 10(1 + 0,1\delta_{10} + \delta^2). \quad (16)$$

Porównując błędy wyznaczenia stosunków rezystancji można zauważyć, że z największą dokładnością określa się stosunek połączenia szeregowego do równoległego, który wynosi:  $\frac{R_S}{R_R} \approx 100(1 + \delta^2)$  [1]. W takim przypadku błąd stosunku rezystancji układu jest równy co najwyżej kwadratowi maksymalnego błędu elementu rezystancyjnego transferu.

## 2.2. Szczególne przypadki transferu

W dotychczasowych rozważaniach w celu wyznaczenia stosunku rezystancji szeregowej do szeregowo-równoległej  $R_S / R_{SR}$  przyjęto, że liczba rezystorów transferowych  $n=10$ . W takim przypadku rezystor  $R_{10}$  nie występuje w połączeniu szeregowo-równoległym (rys. 1c), ale jego błąd  $\delta_{10}$  znacząco wpływa na dokładność wyznaczenia stosunku  $R_S / R_{SR}$  (patrz równanie (13)). Istnieją jednak przypadki, w których wszystkie rezystory uczestniczą w transferze szeregowo-równoległym. Występuje to wówczas, gdy liczba  $n$  rezystorów jest kwadratem liczby naturalnej  $k$  ( $n=4, 9, 16, 25, \dots$ ). Na połączenie szeregowo-równoległe składa się wtedy  $k$  rzędów połączonych równoległe, zawierających  $k$  rezystorów. Zostanie wykazane, że w takim przypadku błąd wyznaczenia stosunku rezystancji szeregowej do szeregowo-równoległej  $R_S / R_{SR}$  jest równy co najwyżej kwadratowi maksymalnego błędu elementu rezystancyjnego transferu (podobnie jak to zachodzi w przypadku błędu stosunku  $R_S / R_R$ ).



Rys.2. Przelączenie rezystorów z układu szeregowego na szeregowo-równoległy  
Fig.2. Series to series-parallel resistor switching

Na rys. 2 przedstawiono najprostszy przypadek przełączania rezystorów z układu szeregowego na szeregowo-równoległy.

Oznaczając wartości rzeczywiste rezystorów transferowych jako  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_4$  na podstawie równania (1) możemy zapisać:

$$R_1 = R(1 - \delta_1) , \quad (17)$$

$$R_2 = R(1 - \delta_2) , \quad (18)$$

$$R_3 = R(1 - \delta_3) , \quad (19)$$

$$R_4 = R(1 - \delta_4) . \quad (20)$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do zależności (2) otrzymuje się:

$$R_S = \sum_{i=1}^4 R_i = 4R(1 - \delta_{sr}) . \quad (21)$$

Wartość rezystancji zastępczej połączenia szeregowo-równoległego można wyznaczyć na podstawie zależności:

$$\frac{1}{R_{SR}} = \frac{1}{R(1 - \delta_1) + R(1 - \delta_2)} + \frac{1}{R(1 - \delta_3) + R(1 - \delta_4)} . \quad (22)$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$R_{SR} = \frac{R \left( 1 - 2\delta_{sr} + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4) \right)}{(1 - \delta_{sr})} , \quad (23)$$

gdzie:

$$\delta_{sr} = \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4) . \quad (24)$$

Na podstawie zależności (21) i (23) stosunek rezystancji zastępczej połączenia szeregowego do połączenia szeregowo-równoległego można wyrazić równaniem:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} = \frac{4R(1 - \delta_{sr})^2}{R \left( 1 - 2\delta_{sr} + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4) \right)} . \quad (25)$$

Stąd po przekształceniach:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} = 4 \cdot \frac{1 - 2\delta_{sr} + \delta_{sr}^2}{1 - 2\delta_{sr} + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4)} , \quad (26)$$

lub inaczej:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} = 4 \left( 1 + \frac{\delta_{sr}^2 - \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4)}{1 - 2\delta_{sr} + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4)} \right). \quad (27)$$

Po uwzględnieniu, że:

$$\delta_{sr}^2 - \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4) = \frac{(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4)^2}{16}, \quad (28)$$

otrzymuje się:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} = 4 \left( 1 + \frac{(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4)^2}{16 \left( 1 - 2\delta_{sr} + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4) \right)} \right). \quad (29)$$

Łatwo zauważyć, że najbardziej niekorzystny przypadek występuje, gdy:

$$\delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = -\delta_4 = \delta. \quad (30)$$

Uwzględniając powyższe równanie otrzymuje się ostatecznie:

$$\frac{R_S}{R_{SR}} = 4 \left( 1 + \frac{\delta^2}{\left( 1 - 2\delta_{sr} + \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_3 + \delta_4) \right)} \right) \approx 4(1 + \delta^2). \quad (31)$$

Z równania (31) wynika, że maksymalny błąd stosunku rezystancji zastępczej połączenia równoległego do połączenia szeregowo-równoległego ma zawsze znak ujemny, a jego wartość wynosi  $-\delta^2$ .

Dla różnych błędów względnych  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  zostały wykonane obliczenia numeryczne błędu wyznaczenia stosunku  $R_S / R_R$  za pomocą arkusza kalkulacyjnego Excel. W tabeli 1 zawarto porównanie wyników obliczeń numerycznych rzeczywistych błędów stosunku  $R_S / R_R$  z błędami stosunku  $R_S / R_{SR}$  dla układu czterech rezystorów transferowych. Błędy rezystorów dobrano przypadkowo, jedynie w pierwszych dwóch pozycjach przyjęto równe co do modułu wartości błędów w celu zobrazowania najbardziej i najmniej korzystnego przypadku transferu. Indeksy błędów (1, 2, 3 i 4) odpowiadają oznaczeniom rezystorów przyjętym na rysunku 2.



Tabela 1

Porównanie błędów względnych wyznaczenia stosunku rezystancji  $R_S / R_R$  i  $R_S / R_{SR}$

Lp.	Błędy rezystorów transferowych				Błąd stosunku $\frac{R_S}{R_R}$ [ppm]	Błąd stosunku $\frac{R_S}{R_{SR}}$ [ppm]
	$\delta_1$ [ppm]	$\delta_2$ [ppm]	$\delta_3$ [ppm]	$\delta_4$ [ppm]		
1.	200	200	-200	-200	-0,040000002	-0,040000002
2.	200	-200	200	-200	-0,040000002	$2 \cdot 10^{-9}$
3.	-139	162	189	107	-0,016824225	-0,004658806
4.	-199	20	-158	114	-0,016380691	-0,001138935
5.	198	-13	166	-171	-0,022094959	-0,002280268
6.	77	203	128	-55	-0,008849908	-0,002678535
7.	-117	-61	-144	59	-0,006083219	-0,000540491
8.	68	-81	138	-47	-0,007729669	-0,000676027

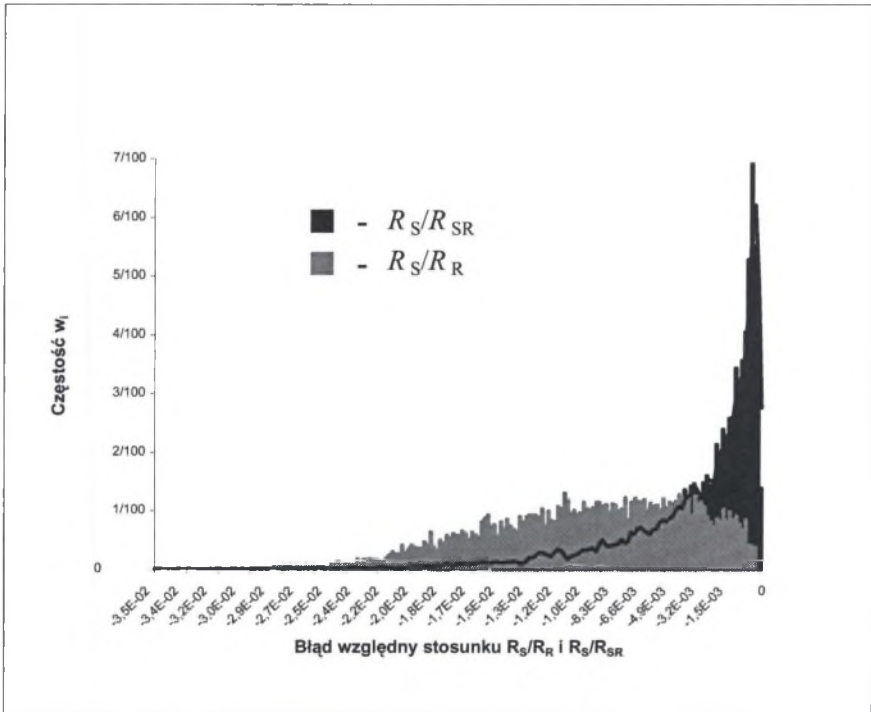
Zaobserwowano znacznie mniejsze wartości błędów w przypadku przełączenia z układu szeregowego na szeregowo-równoległy. Jedynie dla  $\delta_1 = \delta_2 = -\delta_3 = -\delta_4$  (pozycja 1 w tabeli) błąd stosunku rezystancji zastępczej układu szeregowego do szeregowo-równoległego  $R_S / R_{SR}$  jest równy błędowi stosunku rezystancji szeregowej do równoległej  $R_S / R_R$ . Warto podkreślić, że w najbardziej niekorzystnym przypadku istotne jest położenie rezystorów przy połączeniu szeregowo-równoległym. Rezystory o błędach dodatnich i ujemnych są umieszczone w różnych gałęziach. W przeciwnym razie błąd połączenia  $R_S / R_{SR}$  maleje praktycznie do zera (pozycja 2 w tabeli).

W celu porównania błędów stosunków: szeregowego do równoległego i szeregowego do szeregowo-równoległego posłużono się analizą danych statystycznych arkusza kalkulacyjnego Excel. Dla grupy czterech rezystorów transferowych (rys. 2) o losowo wygenerowanych błędach (przy czym założono błąd graniczny równy 200 ppm) przeanalizowano rozkłady błędów transferowych  $R_S / R_R$  i  $R_S / R_{SR}$ . Obliczenia wykonano dla 10 000 realizacji, a wyniki przedstawiono w postaci histogramów na rys. 3.

Uzyskane rozkłady dowodzą, że przełączanie rezystorów z układu szeregowego na szeregowo-równoległy może być uważany za korzystniejszy przypadek transferu.

Praktyczne zastosowanie przy podziale napięcia stałego znalazł jednak układ przełączania szeregowo-równoległego. Błąd transferowy stanowi niewielki procent (<10%) błędu dzielnika, a wykorzystanie przełączania z układu szeregowego na szeregowo-równoległy wiązałoby się z koniecznością  $n$ -krotnego (gdzie  $n$  jest liczbą rezystorów użytych w transferze szeregowo-równoległym) zwiększenia liczby rezystorów wzorcowych w celu uzyskania tego samego stosunku rezystancji co w transferze szeregowo-równoległym. Podnosi to znacznie koszty dzielnika. Podczas gdy głównym źródłem błędów w dzielniku skonstruowanym na zasadzie transferu są rezystancje styków i izolacji przełączników niezbędnych do realizacji transferu.





Rys.3. Histogramy błędów transferowych  $R_S/R_R$  i  $R_S/R_{SR}$

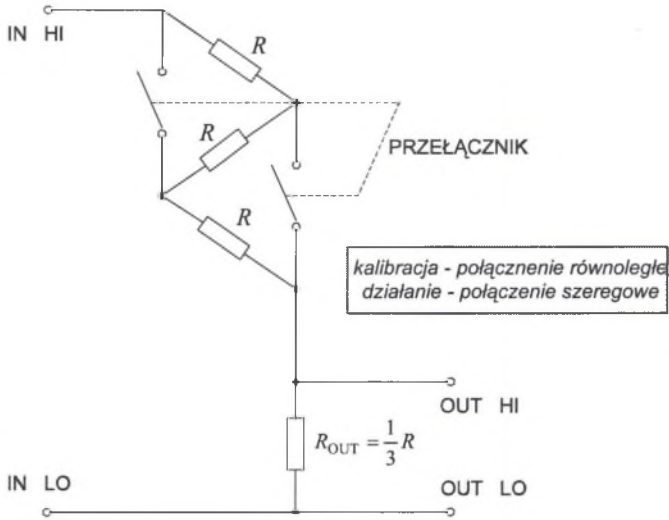
Fig.3. Histograms of  $R_S/R_R$  and  $R_S/R_{SR}$  transfer errors

Transfer szeregowo-równoległy przyjęto nazywać – od nazwiska australijskiego naukowca, który jako pierwszy go wykorzystał – transferem Hamona.

Aby zatem w praktyce wykorzystać dokładność stosunku rezystancji, należy zrealizować układ szeregowo-równoległego przełączania rezystorów o jednakowych wartościach nominalnych.

### 3. DZIELNIK HAMONA

Samych oporników przełączalnych nie można wykorzystać do podziału napięcia stałego, ale są one stosowane do przeniesienia rezystancji wzorców na obiekty o wielokrotnie większych wartościach. Aby możliwe było wykorzystanie transferu Hamona do dokładnego podziału napięcia, konieczne jest zastosowanie zmodyfikowanej idei Hamona. Zasadę uzyskania dokładnego podziału napięcia w stosunku 10:1 przy użyciu trzech przełączalnych wzorców rezystancji przedstawiono na rys. 4. Położenie przełącznika określa wzajemne połączenie rezystorów. Dobór wartości rezystora wyjściowego  $R_{OUT} = R/3$  umożliwia uzyskanie podziału napięcia w stosunku 10:1.



Rys.4. Układ przełączania rezystorów dzielnika 10:1  
Fig.4. Resistor switching (10:1 divider)

Oznaczając wartości rzeczywiste rezystorów transferowych jako  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  na podstawie równania (1) możemy zapisać:

$$R_1 = R(1 - \delta_1), \quad (32)$$

$$R_2 = R(1 - \delta_2), \quad (33)$$

$$R_3 = R(1 - \delta_3). \quad (34)$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do zależności (2) i (4) otrzymuje się:

$$R_S = \sum_{i=1}^3 R_i = R(3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \quad (35)$$

$$R_R = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{1}{R_i} \right)^{-1} = \frac{R^3(1 - \delta_1)(1 - \delta_2)(1 - \delta_3)}{R^2(1 - \delta_1)(1 - \delta_2) + R^2(1 - \delta_2)(1 - \delta_3) + R^2(1 - \delta_1)(1 - \delta_3)}. \quad (36)$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$R_R = \frac{R(1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 - \delta_1\delta_2\delta_3)}{(3 - 2\delta_1 - 2\delta_2 - 2\delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3)}. \quad (37)$$

Wyznaczony zostanie stosunek rezystancji zastępczej połączenia szeregowego do rezystancji połączenia równoległego  $R_S / R_R$ .

$$\frac{R_S}{R_R} = \frac{(3 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3)(3 - 2\delta_1 - 2\delta_2 - 2\delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3)}{(1 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 - \delta_1\delta_2\delta_3)}. \quad (38)$$

Przekształcając wyrażenie i pomijając czynniki, w których błąd  $\delta$  występuje w trzeciej potęgę otrzymuje się:

$$\frac{R_S}{R_R} = \frac{9 - 9(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + 2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + 7(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3)}{1 - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3}, \quad (39)$$

lub inaczej:

$$\frac{R_S}{R_R} = 9 \left( 1 - \frac{\frac{2}{9}(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 - \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2)}{1 - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3} \right). \quad (40)$$

Ponieważ:

$$\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 - \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2 = -\frac{1}{2}((\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_1 - \delta_3)^2), \quad (41)$$

więc można zapisać:

$$\frac{R_S}{R_R} = 9 \left( 1 + \frac{\frac{1}{9}((\delta_1 - \delta_2)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 + (\delta_1 - \delta_3)^2)}{1 - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + \delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3} \right). \quad (42)$$

Najbardziej niekorzystny przypadek występuje gdy  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , natomiast  $\delta_3 = -\delta$ . Wówczas:

$$\frac{R_S}{R_R} = 9 \left( 1 + \frac{\frac{8}{9}\delta^2}{1 - \delta - \delta^2} \right). \quad (43)$$

Korzystając z działań na liczbach małych otrzymuje się ostatecznie:

$$\frac{R_S}{R_R} \approx 9 \left( 1 + \frac{8}{9}\delta^2 \right). \quad (44)$$

Błąd stosunku rezystancji zastępczej połączenia szeregowego do połączenia równoległego ma zawsze znak ujemny i jest równy co najwyżej  $-8\delta^2/9$ , gdzie  $\delta$  jest maksymalnym błędem rezystora transferowego.

Dla różnych błędów względnych  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  zostały wykonane obliczenia numeryczne błędu wyznaczenia stosunku  $R_S / R_R$  za pomocą arkusza kalkulacyjnego Excel. W tabeli 2 zawarto porównanie wyników obliczeń numerycznych rzeczywistych błędów stosunku  $R_S / R_R$  z błędem maksymalnym, odpowiadającym najbardziej niekorzystnemu przypadkowi i wynoszącym  $-8\delta^2 / 9$ . Błędy rezystorów transferowych dobrano przypadkowo, jednakże założono, że moduł maksymalnego błędu elementu rezystancyjnego transferu wynosi 202 ppm, co warunkuje stały maksymalny błąd stosunku  $R_S / R_R$ .

Tabela 2

Błędy względne wyznaczenia stosunku rezystancji  $R_S / R_R$

Lp.	Błędy rezystorów transferowych			Rzeczywisty błąd stosunku $\frac{R_S}{R_R}$ [ppm]	Maksymalny błąd stosunku $\frac{R_S}{R_R}$ [ppm]
	$\delta_1$ [ppm]	$\delta_2$ [ppm]	$\delta_3$ [ppm]		
1.	202	202	-202	-0,0362703	-0,0362703
2.	202	-175	153	-0,0280130	-0,0362703
3.	123	-202	-184	-0,0222427	-0,0362703
4.	202	168	-101	-0,0183712	-0,0362703
5.	36	202	-66	-0,0122000	-0,0362703
6.	-202	23	-166	-0,0097364	-0,0362703
7.	-144	-18	-202	-0,0058984	-0,0362703
8.	168	202	177	-0,0002067	-0,0362703

Uzyskane wyniki potwierdzają to, że w przypadku zastosowania trzech rezystorów transferowych, błąd stosunku rezystancji zastępczej połączenia szeregowego do połączenia równoległego ma zawsze znak ujemny a jego wartość można z dużym przybliżeniem obliczyć z zależności:  $-8\delta^2 / 9$ , gdzie  $\delta$  jest maksymalnym błędem rezystora transferowego.

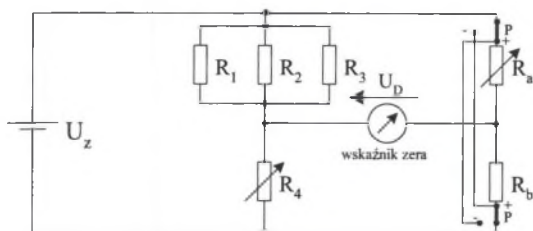
W celu uzyskania wzorcowego podziału napięcia stałego przedstawiony na rys. 4 układ przełączalnych rezystorów łączy się w mostek Wheatstone'a (rys. 5) z dwoma innymi rezystorami  $R_a$  i  $R_b$  o wartościach nominalnych równych  $R/3$ . Rezystory  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  to rezystory transferowe, których wartości rzeczywiste wyrażone są równaniami odpowiednio (32), (33), (34). Rezystor  $R_4$ , o nominalnej wartości trzykrotnie mniejszej od rezystorów przełączalnych  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , odpowiada rezystorowi o oznaczeniu  $R_{OUT}$  na rys. 3.  $R_4$  i  $R_a$  to w rzeczywistości rezystory złożone z rezystorów stałych i potencjometrów pozwalających na odstrojenie całkowitej rezystancji od wartości nominalnej równej  $R$ .

Rezystancja zastępcza równoległego połączenia trzech nominalnie równych rezystorów ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ) jest porównywana z rezystancją  $R_4$ . Konstrukcja mostka umożliwia zamianę miejscami rezystorów  $R_a$  i  $R_b$  w celu skorygowania ewentualnych różnic ich oporności.

Równoważenie układu odbywa się w dwóch etapach:

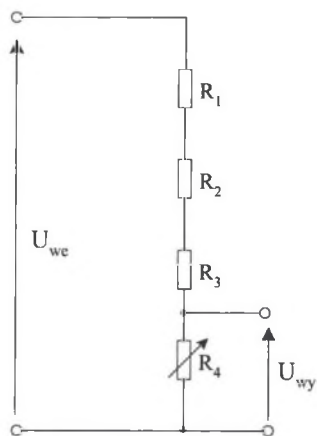
- 1) zrównanie rezystancji prawej gałęzi mostka poprzez regulację potencjometru  $R_a$ , przy czym równość rezystancji objawia się brakiem wpływu położenia przełącznika P na wskazanie detektora zera ( $U_{D+} = U_{D-}$ ),

2) zrównanie rezystancji lewej gałęzi mostka poprzez regulację potencjometru  $R_4$  do momentu osiągnięcia stanu równowagi ( $U_{D+} = U_{D-} = 0$ ).



$R_1, R_2, R_3$  połączone równolegle =  $R_4$

Schemat połączeń przy kalibracji dzielnika 10:1



$R_1, R_2, R_3$  połączone szeregowo =  $9 \times R_4$

Schemat połączeń przy podziale napięcia w stosunku 10:1

Rys.5. Zasada działania dzielnika Hamona o przekładni 10:1

Fig.5. The principle of Hamon 10:1 divider

Osiągnięty stan równowagi odpowiada równości rezystancji zastępczej równoległego połączenia rezystorów  $R_1, R_2, R_3$  i wartości opornika  $R_4$ .

Wykonane równoważenie (kalibracja dzielnika) powoduje, że po przełączeniu rezystorów  $R_1, R_2$  i  $R_3$  w układ szeregowy uzyskuje się opór zastępczy tego połączenia równy dziewięciokrotnej wartości rezystancji  $R_4$ . W wyniku szeregowego połączenia wszystkich czterech oporników uzyskuje się zatem rezystancję zastępczą równą  $10 \times R_4$  (rys.5), dzięki czemu możliwy jest precyzyjny podział napięcia w stosunku 10:1.

Optymalnym rozwiązaniem z punktu widzenia dokładności byłoby zastosowanie rezystorów, których wartości nominalne nie różnią się od siebie więcej niż o 100 ppm. Wtedy można by uzyskać podział napięcia z dokładnością 0,1 ppm. Ponieważ technologia wykonania rezystorów nie jest w stanie wyeliminować wpływów temperaturowych na tym poziomie dokładności, konieczna jest wstępna kalibracja dzielnika.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona zmodyfikowana idea Hamona jest stosowana np. w dzielniku Fluke 752 A który umożliwia podział napięcia w stosunku 10:1 z błędem poniżej 0,2 ppm i podział w stosunku 100:1 z błędem nie przekraczającym 0,5 ppm [2]. Dzielnik ten jest przystosowany do wzorcowania kalibratora napięcia stałego w głównych punktach pomiarowych, a mianowicie: 0,1 V; 1 V; 10 V; 100 V i 1000 V. Konstrukcja dzielnika zapewnia odpowiednie połączenie zewnętrznego wzorca napięcia (10 V) i detektora zera z badanym kalibratorem bez konieczności zmiany wewnętrznych połączeń.

Należy zwrócić uwagę na to, że jednym z najbardziej znaczących źródeł błędów w przypadku konstrukcji dzielnika opartego na idei Hamona są rezystancje styków przełączników niezbędnych do realizacji omawianej metody.

Prosta konstrukcja i duża dokładność dzielnika Hamona sprawia, że jest on obiektem badań wielu instytutów naukowych. Podejmują one próby zwiększenia dokładności podziału napięcia zwracając szczególną uwagę na rezystancje styków. Przy zastosowaniu nadprzewodzącego przełącznika umieszczonego w temperaturze ciekłego helu osiągnięto dokładność podziału napięcia na poziomie 1 ppm [4].

## LITERATURA

1. Red. Dudziewicz J.: *Etalony i precyzyjne pomiary wielkości elektrycznych*. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 1982.
2. *Philosophy in Practice – Calibration*. Second Edition. Fluke Corporation. Hardcover 1994.
3. Dean G. Jarret: *Evaluation of Guarded High-Resistance Hamon Transfer Standards*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 48, no. 2. USA, Washington D.C. 1999, pp. 324-328.
4. Kyu-Tae K., Sung-Won K.: *DC 10:1 Hamon Divider with cryogenic contacts*. Korea Institute of Standards and Science, CPEM '98 Digest, pp. 102-103 (1998).
5. Skurzak J.: *Metody porównywania oporników wzorcowych przy dużym stosunku ich oporów*. Praca doktorska wykonana w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1973.

## Abstract

The paper presents the method of precise direct voltage division based on switched resistance standards. From the transfer theory (outlined in the paper) it follows that series-parallel switching is the best case from the point of view of accuracy so it is used in is a Hamon divider. In this case the error of resistance ratio (series connection to parallel connection) exceed the square of the maximum deviation from the mean value of resistors used in the transfer.

The principle of the 10:1 Hamon divider is illustrated in Fig.5. Three resistors connected in parallel ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ) are compared with a fourth resistor ( $R_4$ ) in a Wheatstone bridge.  $R_4$  is adjusted to be precisely equal to the resistance of the three in parallel. The right arm of the bridge contains two nominally equal resistors  $R_a$ ,  $R_b$ . The bridge structure makes it possible to interchange these resistors to correct eventually the error of 1:1 ratio. The performed balance (calibration of divider) causes that after switching the resistors  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  in series circuit the resistance of three resistors the is equal almost to nine times the value of  $R_4$ . As a result of series connection of all resistors the resistance equal to  $10 \times R_4$  (Fig.5) is obtained and a very precise 10:1 division is possible.

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 kwietnia 2004 r.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Michał Lisowski