ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: GÓRNICTWO z. 219 Nr kol. 1234

Stanisław **KOWALIK**
Katedra Organizacji i Ekonomiki Górnictwa
Politechniki Śląskiej

PODEJMOWANIE DECYZJI NA PODSTAWIE TEORII GIER WYKORZYSTUJĄC ZASADY GRY Z NATURĄ

Streszczenie. Praca dotyczy podejmowania decyzji w sytuacjach konfliktowych. Konflikt występuje pomiędzy człowiekiem decydującym o eksploatacji węgla w kopalni a Naturą reprezentowaną przez górotwór. W pracy omówiono trzy zasady podejmowania decyzji:
- zasada minimalnego ryzyka,
- wskaźnik pesymizmu-optymizmu,
- zasada równych prawdopodobieństw.

MAKING DECISIONS ON THE BASIS OF THE GAME THEORY MAKING USE OF THE PRINCIPLES OF THE GAME IN AGREEMENT WITH NATURE

Summary. The paper deals with making decisions in conflict situations. The conflict occurs between a man deciding about coal mining and Nature represented by rock mass. Three principles of making decisions have been discussed in the paper:
- the principle of minimal risk,
- the indicator of pessimism-optimism,
- the principle of equal probabilities.

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ ИГР, ИСПОЛЗУЮЩИХ ПРИНЦИПЫ ИГРЫ С НАТУРОЙ

Резюме. Работа касается принятия решенлия!в конфликтной обстановке. Конфликт выступает между человеком принимающим решение об эксплоатации угля на шахте, и Природой, в лице которой выступает здесь горный массив. В работе представлены три принципа принятия решений:

- принцип минимального риска,
- принцип пессимизма-оптимизма,
- принцип равных вероятностей.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Będziemy zajmowali się podejmowaniem decyzji w sytuacjach konfliktowych. Konflikt będzie występował pomiędzy człowiekiem decydującym o eksploatacji węgla w kopalni a Naturą reprezentowaną przez górotwór. Sytuacje konfliktowe bada teoria gier o sumie zerowej [2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10]. W teorii gier zakłada się, że partnerzy uczestniczący w grze mają do dyspozycji szereg strategii działania do wyboru. W dalszej części naszych rozważań ograniczymy się do gier dwuosobowych. Można je w łatwy sposób zilustrować w postaci macierzy wypłat. Przyjmujemy, że partner 1 (gracz 1) ma do dyspozycji strategie A_1 ,..., A_m, natomiast partner 2 (gracz 2) ma do dyspozycji strategie B_1 ,..., B_n. Pokazane to jest na poniższej macierzy wypłat W.

$$W = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \\ A_M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & & B_N \end{array} \\ \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Ponieważ nam będzie zależało na minimalizacji strat związanych z eksploatacją, to wielkość w_{ij} będzie oznaczała wypłatę dla drugiego gracza w przypadku, gdy gracz 1 zdecyduje się na strategię A_i, a gracz 2 na strategię B_j. Wypłata w_{ij} jest równocześnie stratą dla gracza 1. Innymi słowy, przy zastosowaniu pary strategii (A_i, B_j) gracz 1 płaci graczowi 2 wielkość w_{ij}. Graczowi 2 zależy na maksymalizacji zysku, a graczowi 1 na minimalizacji strat. Metody znajdywania strategii optymalnych są opisane w pracach [2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10]. Dla przypomnienia omówimy tylko krótko trzy podstawowe pojęcia teorii i gier: zasadę dominacji, punkt siodłowy oraz strategie mieszane.

Mówimy, ze strategia A_k dominuje nad strategią A_l gracza pierwszego, gdy

$$\forall_{j} \; w_{kj} \le w_{lj}, \qquad (j=1,\dots,n). \tag{2}$$

Mówimy, że strategia B_r dominuje nad strategią B_s gracza drugiego, gdy

$$\forall_{i} \; w_{ir} \ge w_{is}, \qquad (i=1,\dots,m). \tag{3}$$

O strategii A_l mówimy, ze jest zdominowana przez A_k, a strategia B_s jest zdominowana przez B_r. Z zasady dominacji wynika, że z macierzy wypłat W należy usunąć strategie zdominowane. Pomaga to uprościć grę eliminując z rozważań strategie, które nie będą używane.

Mówimy, że gra posiada punkt siodłowy, jeżeli istnieje para strategii (A_k, B_l) taka, że

$$w_{kl} = \min_{i} \max_{j} (w_{ij}) = \max_{j} \min_{j} (w_{ij}). \tag{4}$$

W tym przypadku strategie (A_k, B_l) spełniające warunek (4) nazywamy optymalnymi dla obydwu graczy.

Jeżeli gra nie posiada punktu siodłowego oraz jest wielokrotnie powtarzana, stosuje się strategie mieszane. Strategia mieszana polega na tym, że gracz stosuje na przemian różne swoje strategie z określoną częstotliwością. Znajdywanie tych częstotliwości opisane jest w pracach [2; 3; 4; 9; 10]. My nie będziemy się tym zajmować, ponieważ nie to jest naszym celem.

Jeżeli gra nie posiada punktu siodłowego i jest wykonywana tylko jeden raz, to gracz 1 powinien obliczyć cenę gry V_1 określoną wzorem

$$V_1 = \max_{j} \min_{i} (w_{ij}). \tag{5}$$

Wskaźnik "i" występujący przy wyznaczeniu dolnej ceny V_1 określa strategię maksyminową A_i dla gracza 1. Gracz 2 powinien obliczyć górną cenę V_2 według wzoru

$$V_2 = \min_{i} \max_{j} (w_{ij}). \tag{6}$$

Wskaźnik "j" występujący w cenie V_2 określa strategię minimaksową B_j dla gracza 2.

Przyjmujemy teraz, że graczem 2 będzie Natura reprezentowana przez górotwór. Naturę będziemy traktowali jako naszego rywala, który stwarza sytuacje niebezpieczne dla pracy górników. Zjawiskami niebezpiecznymi, z którymi spotykają się górnicy na dole w kopalni, mogą być wstrząsy, tąpnięcia, wycieki wody, ulatnianie się gazu itp. Te zjawiska są skierowane przeciwko bezpieczeństwu górników. Naszym zadaniem będzie podejmowanie decyzji minimalizujących poziom zagrożenia. Ponieważ Natura nie potrafi rozumować tak jak człowiek, nie potrafi stosować zasady dominacji czy określać punkt siodłowy, możemy więc przypuszczać, że nie zawsze będzie stosowała swoją strategię najgorszą dla górników. W związku z tym powstały pewne metody wykorzystujące ten fakt [2].

2. ZASADA MINIMALNEGO RYZYKA

Nasze rozważania rozpoczniemy od prostego przykładu ilustrującego istotę zagadnienia.

Przykład 1

Niech gracz 1, tzn. My, ma do dyspozycji dwie strategie:

A_1 - urabianie calizny węglowej materiałem wybuchowym,

A_2 - urabianie calizny węglowej maszyną.

Gracz 2, tj. Natura, ma następujące strategie:

B_1 - wyrzuty gazów i skał,

B_2 - wypływ wody,

B_3 - wypływ kurzawki,

B_4 - opad skał z nie zabezpieczonego stropu lub ociosu,

B_5 - opad skał z nie zabezpieczonej calizny,

B_6 - zagrożenie gazowe dwutlenkiem węgla,

B_7 - zagrożenie metanowe,

B_8 - tąpania.

My przy wyborze naszej strategii musimy kierować się stopniem zagrożenia pracujących górników dla każdej naszej strategii w odniesieniu do sytuacji niebezpiecznych określonych strategiami Natury. Ten stopień zagrożenia będziemy określali w procentach, np. 0% oznacza, że dane zjawisko niekorzystne w określonej naszej strategii nie wystąpi, czyli bezpieczeństwo górników ze względu na to niekorzystne zjawisko jest całkowite, tj. stuprocentowe. W celu zilustrowania tego zagadnienia przyjmujemy konkretne wartości liczbowe w naszej przykładowej grze.

$$
W = My \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \overset{\displaystyle \text{Natura}}{\begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{array}} \atop \begin{bmatrix} 24 & 15 & 25 & 25 & 29 & 17 & 20 & 25 \\ 22 & 19 & 26 & 5 & 16 & 20 & 25 & 15 \end{bmatrix} \qquad (7)
$$

Jest to macierz wypłat W dla gracza 2, tzn, dla Natury. Klasyczna teoria gier nakazuje zbadać, czy są strategie dominujące, a następnie znaleźć punkt siodłowy gry (o ile jest). Analizując macierz wypłat W widzimy, że Natura posiada strategie dominującą B_3 nad pozostałymi, ponieważ

$$
\forall_i \; w_{i3} \geq w_{ij} \qquad (8)
$$

Po wyeliminowaniu z gry strategii zdominowanych Nam pozostaje jedynie zdecydować się na strategię A_1 gwarantującą, że stopień zagrożenia górników nie przekroczy 25%. Natomiast strategia A_2 gwarantuje, że zagrożenie nie przekroczy 26%. Tak więc strategiami optymalnymi w tej grze w myśl klasycznej teorii gier są A_1 dla Nas i B_3 dla Natury. Gwarantuje to poziom zagrożenia górników nie większy od 25%.

W naszych rozważaniach braliśmy pod uwagę to, że Natura celowo i świadomie wybierze strategię B_3 lepszą dla siebie, a gorszą dla Nas w tym celu, aby zwiększyć nasze zagrożenie. Zasada minimalnego ryzyka nie czyni takiego założenia. Przyjmuje się tu, że Natura równie dobrze może wybrać inną strategię. My natomiast przy wyborze strategii będziemy kierowali się minimalnym ryzykiem dla Nas. Analizując jeszcze raz macierz wypłat W wydaje się, że lepiej zdecydować się nam na strategię A_2. Ryzykujemy tu zwiększenie zagrożenia o 1% przy zastosowaniu przez Naturę strategii B_3 (26% zamiast 25%), ale możemy zmniejszyć zagrożenie przy zastosowaniu innych strategii B_j.

Zasadę minimalnego ryzyka określił pierwszy L. Savage [7]. Polega ona na tym, że dla każdej strategii Bj Natury określamy wielkość ryzyka pierwszego gracza przy poszczególnych jego strategiach. Prześledzimy to na macierzy W z przykładu 1.

Zakładając, że Natura zastosuje strategię B_1, My ryzykujemy utratę 2% obierając strategię A_1, natomiast nic nie ryzykujemy obierając strategię A_2. Przyjmując teraz, że Natura zastosuje strategię B_2, My nic nie ryzykujemy obierając A_1, natomiast ryzykujemy utratę 4% w przypadku obrania A_2 itd. W ten sposób tworzymy macierz ryzyka R.

$$
R = My \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \overset{\displaystyle \text{Natura}}{\begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{array}} \atop \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)
$$

Do tej macierzy stosujemy strategie minimaksową W każdym wierszu znajdujemy element największy. Z tych elementów wybieramy najmniejszy. Numer wiersza tak wybranego elementu wskazuje na strategię, którą mamy zastosować. W naszym przypadku mamy

$$\min_{i} \max_{j} (w_{ij}) = \min(20 \cdot 5) = 5. \tag{10}$$

Liczba 5 występuje w drugim wierszu. Tak więc wybrana strategię w myśl zasady minimalnego ryzyka jest strategia A_2.

3. WSKAŹNIK PESYMIZMU-OPTYMIZMU

Zasada wskaźnika pesymizmu-optymizmu została opracowana przez L. Hurwicza [1]. Wynika z niej, że w każdym wierszu macierzy wypłat W należy znaleźć elementy minimalne i maksymalne:

$$wmin_i = \min (w_{ij}), \tag{11}$$

$$wmax_i = \max (w_{ij}), \tag{12}$$

$$(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n).$$

Wielkości $wmin_i$ oraz $wmax_i$ stanowią oceny: optymistyczna i pesymistyczna strategii A_i. Dla każdej decyzji A_i gracza pierwszego, tj. dla Nas określamy λ ocenę, która jest kombinacją liniową wielkości $wmin_i$ oraz $wmax_i$, tj. kombinacją oceny optymistycznej i pesymistycznej. λ-ocenę strategii A_i określamy jako

$$\lambda\text{-ocena } A_i = \lambda \cdot wmin_i + (1 - \lambda) \cdot wmax_i \tag{13}$$

Wielkość λ może przybierać wartości z przedziału [0,1]. Dla λ=0 odpowiada to pesymistycznej zasadzie minimaksowych strategii, tj. strategii bezpiecznych i traktowaniu gry jako zerowej. Dla λ=1 odpowiada to poszukiwaniu strategii minimalizujących wypłatę przy współudziale partnera, tj. Natury. Wszystkim pozostałym wartościom λ odpowiadają pewne fazy pośrednie. Dobór współczynnika λ zależy od nas. Możemy uznać, że przypadki optymistyczne mają większą szansę wystąpienia niż pesymistyczne lub odwrotnie. Po obliczeniu wszystkich λ-ocen wybieramy strategię A_i, która uzyskała najniższą ocenę

Przykład 2

Mamy do dyspozycji następujące strategie dotyczące sposobu kierowania stropem przy robotach wybierkowych eksploatacyjnych:

A_1 - na zawał

A_2 - z podsadzką suchą,

A_3 - z podsadzką hydrauliczną

Natura będzie miała te same strategie, co w przykładzie 1. Macierz W przedstawia się następująco:

$$W = \begin{array}{cc} & \text{Natura} \\ & \begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{array} \\ \text{My} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 22 & 15 & 20 & 32 & 30 & 10 & 6 & 31 \\ 18 & 17 & 23 & 22 & 26 & 10 & 5 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 27 & 25 & 10 & 4 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \tag{14}$$

Należy wyznaczyć, którą strategię przeciw Naturze ma wybrać gracz 1 (tzn. My), wykorzystując wskaźnik pesymizmu-optymizmu.

Dla strategii A_1, A_2 i A_3 obliczamy λ-oceny:

$$\lambda\text{-ocena } A_1 = \lambda \cdot \text{wmin}_1 + (1 - \lambda) \cdot \text{wmax}_1 = 6\lambda + 32(1 - \lambda), \tag{15}$$

$$\lambda\text{-ocena } A_2 = \lambda \cdot \text{wmin}_2 + (1 - \lambda) \cdot \text{wmax}_2 = 5\lambda + 25(1 - \lambda), \tag{16}$$

$$\lambda\text{-ocena } A_3 = \lambda \cdot \text{wmin}_3 + (1 - \lambda) \cdot \text{wmax}_3 = 4\lambda + 25(1 - \lambda). \tag{17}$$

Na podstawie doświadczenia ustalono, że λ powinno wynosić 0,6. Uwzgledniając tę liczbę otrzymujemy:

$$\lambda\text{-ocena } A_1 = 6 \cdot 0{,}6 + 32 \cdot 0{,}4 = 16{,}4, \tag{18}$$

$$\lambda\text{-ocena } A_2 = 5 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}4 = 13{,}0, \tag{19}$$

$$\lambda\text{-ocena } A_3 = 4 \cdot 0{,}6 + 30 \cdot 0{,}4 = 14{,}4. \tag{20}$$

Najlepszą ocenę uzyskała strategia A_2. Tak więc zasada wskaźnika pesymizmu-optymizmu wskazała, że powinniśmy zastosować strategię A_2.

4. ZASADA RÓWNYCH PRAWDOPODOBIEŃSTW

Jeżeli w grze przeciw Naturze nie mamy żadnych danych czy przesłanek, które strategie Natury są bardziej lub mniej prawdopodobne, to stosujemy zasadę tzw. równych prawdopodobieństw. Uważamy, że jeżeli Natura dysponuje n strategiami $B_1, \ldots, B_n$, to każda z tych strategii ma prawdopodobieństwo wystąpienia 1/n. Zasada równych prawdopodobieństw zakłada, że Natura stosuje strategię mieszaną ze współczynnikami dla każdej strategii czystej 1/n. Dla każdej strategii A_i obliczamy jej wartość stosując wzór

$$\text{wartość } A_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}, \quad (i=1, \ldots, m). \tag{21}$$

Wybieramy strategie, która ma najmniejszą wartość.

Przykład 3

Mamy do dyspozycji dwie strategie dotyczące wiercenia w węglu lub skale płonnej:

A_1 - wiercenie wiertarką elektryczną,

A_2 - wiercenie wiertarką pneumatyczną.

Natura będzie miała te same strategie, co w przykładzie 1. Macierz W przedstawia się następująco:

$$W = My \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \text{Natura} \\ \begin{array}{cccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 20 & 18 & 20 & 15 & 10 & 40 & 20 \\ 9 & 10 & 14 & 24 & 15 & 10 & 14 & 24 \end{bmatrix} \end{array} \tag{22}$$

Należy wyznaczyć strategię, którą powinien zastosować gracz 1 wykorzystując zasadę równych prawdopodobieństw.

Dla strategii A_1 i A_2 obliczamy wartości:

$$\text{wartości } A_1 = (9+20+18+20+15+10+40+20)/8 = 19, \tag{23}$$

$$\text{wartości } A_2 = (9+10+14+24+15+10+14+24)/8 = 15. \tag{24}$$

Mniejszą wartość posiada strategia A_2 i tę wybieramy.

5. ZAKOŃCZENIE

Jak widać na przykładzie 1, zaprezentowane metody mogą wskazać inną strategię, niż to wynikało z zasady minimaksu. W przykładzie 1 zasada minimalnego ryzyka wskazała na strategię A_2, jako korzystniejszą dla nas. Klasyczna teoria gier wskazała na strategie A_1. Zaprezentowane metody w grach przeciw Naturze wykorzystują fakt, że Natura nie jest istotą myślącą i nie zawsze złośliwie stawia nas w najgorszej sytuacji. W klasycznej teorii gier wykorzystującej pojęcie punktu siodłowego wyznaczamy strategie bezpieczna dla nas, która gwarantuje, że wypłata nie będzie wyższa pomimo stosowania dowolnych strategii przeciwnika. W grach przeciw Naturze te wypłatę możemy zmniejszyć stosując prezentowane metody.

LITERATURA

[1] Hurowicz L.: Optimality Criteria for Decision Making Under Ignorance. Cowles Commission Discussion Paper. Statistics No 370, 1951.
[2] Kofler E.: Wstęp do teorii gier. PZWS, Warszawa 1963.
[3] Luce R.D., Raiffa H.: Gry i decyzje. PWE, Warszawa 1964.
[4] Owen G.: Teoria gier. PWN, Warszawa 1975.
[5] Potocki Cz., Przybyła H.: Badania operacyjne w górnictwie. Skrypt Pol. Śl. nr 906, ser. Górnictwo, Gliwice 1980.
[6] Sadowski W.: Teoria podejmowania decyzji. PWE, Warszawa 1976.
[7] Savage L.J.: The theory of statistical decision. Journal of the Amercan Statistical Associoation No 46. 1951.
[8] Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Skrypt Pol. Śl. Nr 1420, Automatyka, Gliwice 1988.
[9] Tyszka T.: Konflikty i strategie, WNT, Warszawa 1978.
[10] Williams J.D.: Strateg doskonały. Wprowadzenie do teorii gier. PWN, Warszawa 1965.

Recenzent: Dr hab. Józef **DREWNIAK**

Wpłyneło do Redakcji w październiku 1993 r.

Abstract

The paper deals with making decisions in conflict situations. The conflict occurs between a man deciding about coal mining and Nature represented by rock mass. The conflict situations are examined by the theory of zero-sum games [2], [3], [4], [5], [6], [8], [9], [10]. It is assumed in the theory of games that the partners taking part in a game have some strategies of action at their disposal. We asssume that the partner 1 (the player 1) has strategies $A_1 ,..., A_m$, at his disposal, while the partner 2 (the player 2) has strategies $B_1 ,..., B_n$ at his disposal. The paper presents three basic notions of the theory of games: domination principle, saddle point and mixed strategies.

Nature represented by rock mass has been assumed to be the player 2. We treat Nature as our rival that creates situations dangerous for miners' work. Miners working underground may face the following dangerous phenomena: tremors, bursts, water-courses, gas escape and the like. Our task is to make decisions maximizing the safety level. Since Nature cannot reason like a man and cannot apply domination principle or determine saddle point, we can presume it will not always use the strategy which is the worst for the miners. Certain methods making use of this fact [2] have been created, The paper presents theree principlres of taking decisions which make use of the theory of the game against Nature:
- the principle of minimal risk,
- the indicator of pessimism-optimism,
- the principle of equal probabilities.

The principle of minimal risk consista in determining the degree of the risk of the first player in each of his strategies for each strategy B_j of Nature. In this way the matrix of the risk R is formed. The minimax strategy is applied to the matrix. We find the greatest element in every line. Then we choose the least element from the greatest elements. The number of the line of the element chosen in that way points at the strategy that we are to apply.

In order to determine the indicator of pessimism-optimism it is necessary to find minimal and maximal elements in every line of the payoff matrix W. These elements are pessimistic and optimistic estimates for every strategy A_i. We determine λ-estimate for every strategy A_i. That estimate is a linear combination of the pessimistic estimate and the optimistic one. We choose the strategy which has gained the highest λ-estimate.

The principle of equal probabilities assumes that Nature applies its strategies $B_1,...,B_n$ with the same probability 1/n. We calculate the value equal to the arithmetic mean from i-line of the matrix W for every strategy Ai. We choose the strategy that has the greatest value.