

Zygmunt GARCZARCZYK

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej. Zakład Elektrotechniki i Informatyki

## CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE INTERWAŁOWYCH UKŁADÓW LINIOWYCH

**Streszczenie.** W pracy rozpatrzono zagadnienie oszacowania charakterystyki częstotliwościowej transmitancji wymiernej z niepewnością, której licznik i mianownik są wielomianami interwałowymi. W oparciu o układ liniowych równań interwałowych, rodzinę wielomianów Charitonowa oraz algorytm dzielenia prostokątnych interwałów zespolonych możliwe jest oszacowanie obwiedni charakterystyki częstotliwościowej. W pracy przedstawiono wyniki numeryczne celem ilustracji przedstawionych metod i porównania ich własności.

## FREQUENCY RESPONSES OF LINEAR INTERVAL SYSTEMS

**Summary.** This paper deals with the problem of evaluation the frequency response of an uncertain rational transfer function whose numerator and denominator are interval polynomials. Using a system of linear interval equations, Kharitonov polynomials family and complex rectangular interval division it's possible to evaluate the envelopes of the frequency response. Numerical studies are reported in order to illustrate and compare results obtained by applying presented approaches..

### 1. WPROWADZENIE

Analiza właściwości układu stanowi ważny aspekt procesu jego projektowania. Charakterystyki opisujące układ mogą się zmieniać pod wpływem zmian środowiska, zmian warunków pracy, a także wskutek tolerancji wykonania użytych elementów podzespołów. Wynika stąd, że bardziej realistyczny opis układu można uzyskać, jeśli w jego modelu matematycznym będzie uwzględniona niepewność. Analiza właściwości układu z niepewnością związana z określeniem zmian własności obwodu lub układu wywołanych zmianami niektórych jego parametrów ma duże znaczenie w praktyce inżynierskiej. Niepewność parametrów obwodu może być opisana na różne sposoby. W pracy niepewność parametrów oznacza, że ich wartości należą do pewnych zadanych przedziałów, które modelują czynniki wpływające na te parametry.

Wystarczającą informację o właściwościach układu liniowego uzyskuje się rozpatrując jego charakterystykę częstotliwościową. Obliczanie charakterystyki częstotliwościowej układu

o niepewnej transmitancji odgrywa podstawową rolę w analizie i projektowaniu układów odpornych (krzepkich) w dziedzinie częstotliwości. Tematyka ta skupiła wiele uwagi w ostatnich latach. Pojawiło się wiele metod i algorytmów wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych układów o niepewnych parametrach, np. [1] – [16].

W pracy rozpatrywane będą układy liniowe ciągłe, których właściwości są opisane przez interwałowe transmitancje operatorowe postaci:

$$K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n}, \quad (1)$$

gdzie współczynniki wielomianów licznika i mianownika nie są znane dokładnie, ale należą do zadanych przedziałów

$$\begin{aligned} a_i &\in [\underline{a}_i, \overline{a}_i], \underline{a}_i < \overline{a}_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ b_j &\in [\underline{b}_j, \overline{b}_j], \underline{b}_j < \overline{b}_j, \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Zagadnieniem o podstawowym znaczeniu jest możliwość określenia obwiedni charakterystyk modułu i fazy transmitancji widmowej  $K(j\omega)$  odpowiadającej tej rodzinie transmitancji.

Na przykład, dla układu opisanego transmitancją operatorową

$$K(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \beta s + \alpha}, \quad (3)$$

jeśli  $\alpha = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] > 0$  oraz  $\beta = [\underline{\beta}, \overline{\beta}] > 0$ , to dla  $s = j\omega$  otrzymuje się następujące oszacowanie rodziny transmitancji widmowych

$$K(j\omega) \subseteq \frac{[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]}{[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] - \omega^2 + j\omega[\underline{\beta}, \overline{\beta}]}. \quad (4)$$

Widać, że estymacja zmian  $K(j\omega)$  dla ustalonej częstotliwości wymaga wyznaczenia pewnego obszaru na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Prowadzi to do skomplikowanego zadania obliczania zakresu wartości funkcji wielu zmiennych ( $\alpha$  i  $\beta$  w tym przykładzie).

Graniczne wartości charakterystyk modułu i fazy transmitancji widmowej układów liniowych mają prostą interpretację geometryczną: reprezentują one obwiednie charakterystyk Nyquista tych układów.

W pracy przedstawione zostanie wykorzystanie metod analizy interwałowej do określenia obwiedni charakterystyk widmowych na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Porównane zostaną dwie metody wyznaczania obwiedni tych charakterystyk oparte na liniowych równaniach interwałowych oraz interwałowych wielomianach Charitonowa.

## 2. CHARAKTERYSTYKI WIDMOWE A LINIOWE RÓWNANIA INTERWAŁOWE

Niech  $G(s)$  oznacza odwrotność transmitancji operatorowej  $K(s)$ . Oznaczając sygnał na wejściu przez  $x(j\omega)$ , a sygnał na wyjściu przez  $y(j\omega)$  relację wejście-wyjście dla liniowego układu ciągłego, można zapisać następująco:

$$x_1(\omega) + jx_2(\omega) = (\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\})(y_1(\omega) + jy_2(\omega)), \quad (5)$$

gdzie:

$$x_1(\omega) = \operatorname{Re}\{x(j\omega)\}, \quad x_2(\omega) = \operatorname{Im}\{x(j\omega)\}, \\ a \quad y_1(\omega) = \operatorname{Re}\{y(j\omega)\}, \quad y_2(\omega) = \operatorname{Im}\{y(j\omega)\}.$$

Przyjmując  $x_1(\omega)=1$ ,  $x_2(\omega)=0$  (sinusoidalny sygnał wejściowy  $x(t) = \cos(\omega t)$ ), można przepisać zależność (5) jako układ dwóch równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} & -\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} \\ \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} & \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\omega) \\ y_2(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Założenie, że współczynniki transmitancji  $K(s)$  mogą przyjmować wartości należące do zadanych przedziałów (2), powoduje zmiany elementów macierzy współczynników układu (6). Zatem dla ustalonej częstotliwości otrzymuje się układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} [a, b] & -[c, d] \\ [c, d] & [a, b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

W tym równaniu zakresy wartości  $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$  i  $\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$  są reprezentowane odpowiednio przez interwały  $[a, b]$  i  $[c, d]$ .

Równanie (7) tworzy układ liniowych równań interwałowych. Można go oznaczyć następująco:

$$\mathbf{A}y = \mathbf{b}. \quad (8)$$

Układ ten reprezentuje rodzinę zwykłych równań liniowych, którą można z niego uzyskać przyjmując wartości elementów macierzy współczynników z określonych przedziałów.

Układy te, przy założeniu że każda macierz  $A \in \mathbf{A}$  jest nieosobliwa, ma jednoznaczne rozwiązanie, a wszystkie te rozwiązania tworzą tzw. zbiór rozwiązań S.

Zbiór rozwiązań układu (8) można zatem scharakteryzować następująco:

$$S = \{y : Ay = b, A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\}. \quad (9)$$

Zbiór ten tworzy pewien dwuwymiarowy obszar reprezentujący wartości sygnału wyjściowego układu liniowego, ciągłego w stanie ustalonym przy pobudzeniu na wejściu sygnałem sinusoidalnym.

Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest regularna, tzn. jeżeli  $\det \mathbf{A} \neq 0$  dla każdego  $A \in \mathbf{A}$ , zbiór rozwiązań jest opisany przez słynną formułę Oettli - Pragera [17, 18]:

$$y \in S \Leftrightarrow |Ay - b| \leq \Delta |y| + \delta \quad (10)$$

gdzie  $\Delta = m(\mathbf{A})$ ,  $\delta = m(\mathbf{b})$ , a  $\Delta = w(\mathbf{A}/2)$ ,  $\delta = w(\mathbf{b}/2)$ .

Tutaj  $m(\mathbf{x})$  i  $w(\mathbf{x})$  oznaczają odpowiednio wartość środkową i szerokość interwału  $\mathbf{x}$ . Stosując formułę Oettli-Pragera do równania (8) otrzymuje się następującą nierówność:

$$\left\| \begin{bmatrix} m_1 & -m_2 \\ m_2 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| \leq \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 \end{bmatrix} \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\|, \quad (11)$$

gdzie:  $m_1 = (a+b)/2$ ,  $m_2 = (c+d)/2$ ,  
oraz  $\rho_1 = (b-a)/2$ ,  $\rho_2 = (d-c)/2$ .

Obliczenie obszarów wartości dla  $y_1$  i  $y_2$ , dla których nierówność (11) jest spełniona, daje informację o zmianach transmitancji widmowej wywołanych zmianami pewnych parametrów układu dla wybranej częstotliwości. Aby otrzymać informację o układzie w określonym paśmie

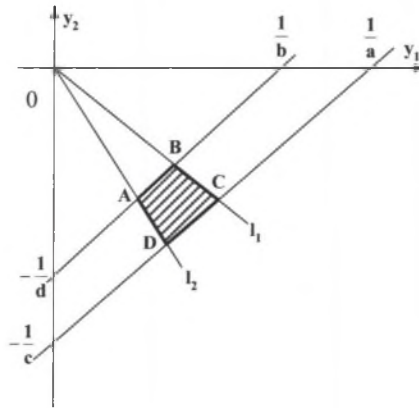
częstotliwości, rozwiązuje się nierówność (11) dla dyskretnych wartości częstotliwości z tego pasma.

Na rys.1 pokazany jest obszar niepewności transmitancji widmowej (obszar rozwiązań dla  $y_1$  i  $y_2$ ) leżący w IV ćwiartce płaszczyzny zespolonej, który jest reprezentowany przez czworobok ABCD. Linie proste  $l_1$  i  $l_2$  na rysunku są zdefiniowane następująco:

$$l_1:y_2 = -\frac{c}{b}y_1, \quad l_2:y_2 = -\frac{d}{a}y_1. \quad (12)$$

Obliczenie współrzędnych wierzchołków czworoboku (A, B, C, D) w każdej ćwiartce płaszczyzny zespolonej prowadzi wprost do oszacowania wartości modułu  $K$  i fazy  $\Phi$  transmitancji widmowej

$$K(j\omega) = Ke^{j\Phi} \quad (13)$$



Rys. 1. Obszar niepewności transmitancji widmowej  
Fig. 1. Region of uncertainty of the frequency response

Stosując to podejście uzyskano następujące oszacowania dla kolejnych ćwiartek płaszczyzny zespolonej:

$$(I) \quad b > a > 0, \quad c < d < 0$$

$$\begin{aligned} K_{\min} &= \min \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ab + c^2}, \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{b^2 + cd} \right), \\ K_{\max} &= \max \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a^2 + cd}, \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{ab + d^2} \right), \\ \phi_{\min} &= \arctg \frac{|d|}{b}, \phi_{\max} = \arctg \frac{|c|}{a}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$(II) \quad a < b < 0, \quad c < d < 0$$

$$K_{\min} = \min \left( \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{a^2 + cd}, \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{ab + c^2} \right),$$

$$K_{\max} = \max \left( \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{ab + d^2}, \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + cd} \right), \quad (15)$$

$$\phi_{\min} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{c}{b}, \phi_{\max} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{d}{a}.$$

(III)  $a < b < 0, \quad d > c > 0$

$$K_{\min} = \min \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a^2 + cd}, \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{ab + d^2} \right),$$

$$K_{\max} = \max \left( \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{ab + c^2}, \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{b^2 + cd} \right), \quad (16)$$

$$\phi_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{d}{|b|} - \pi, \phi_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{c}{|a|} - \pi.$$

(IV)  $b > a > 0, \quad d > c > 0$

$$K_{\min} = \min \left( \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{ab + d^2}, \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + cd} \right),$$

$$K_{\max} = \max \left( \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{a^2 + cd}, \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{ab + c^2} \right), \quad (17)$$

$$\phi_{\min} = -\operatorname{arctg} \frac{c}{b}, \phi_{\max} = -\operatorname{arctg} \frac{d}{a}.$$

Na granicy dwóch ćwiartek płaszczyzny zespolonej struktura zbioru rozwiązań jest całkiem inna. Na rys. 2 pokazany jest obszar niepewności na granicy III i IV ćwiartki, tzn. jeśli  $m_1=0$  ( $a=-b$ ) i  $m_2>0$ .

Linie proste  $l_1$  i  $l_2$  są opisane następująco:

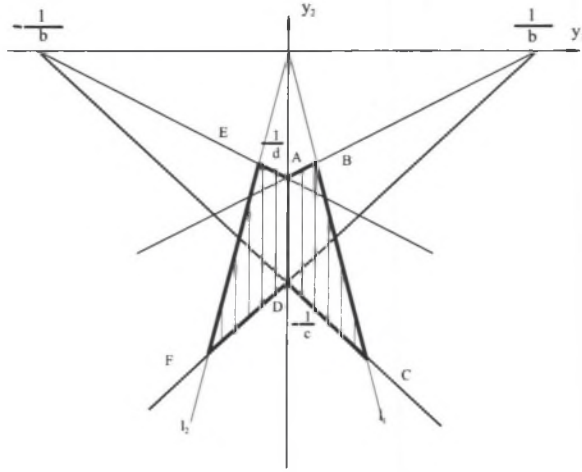
$$l_1: y_2 = -\frac{c}{b} y_1, \quad l_2: y_2 = \frac{c}{b} y_1. \quad (18)$$

Zakresy wartości modułu i fazy transmitancji widmowej określone na podstawie analizy wartości współrzędnych punktów A, B, C, D, E, F na granicy poszczególnych ćwiartek są następujące:

(III/IV)  $a = -b, b > 0, \quad d > c > 0$

$$K_{\min} = \frac{r}{s}, K_{\max} = \frac{r}{t}, \quad c > |a|, \quad (19)$$

$$\Phi_{\min} = -\operatorname{arctg} \frac{c}{b}, \Phi_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{c}{b} - \pi.$$



Rys. 2. Struktura obszaru niepewności na granicy dwóch ćwiartek  
Fig. 2. Structure of uncertainty region at the border of two quadrants

(II/III)  $a < b < 0$ ,  $c = -d$ ,  $d > 0$

$$K_{\min} = \frac{r}{u}, K_{\max} = \frac{r}{v}, |a| > |c|, \quad (20)$$

$$\Phi_{\min} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{d}{|a|}, \Phi_{\max} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{d}{|a|} - \pi.$$

(I/II)  $a = -b$ ,  $b > 0$ ,  $c < d < 0$

$$K_{\min} = \frac{r}{s}, K_{\max} = \frac{r}{t}, |c| > |a|, \quad (21)$$

$$\Phi_{\min} = \operatorname{arctg} \frac{|c|}{b}, \Phi_{\max} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{|c|}{b}.$$

(I/IV)  $b > a > 0$ ,  $c = -d$ ,  $d > 0$

$$K_{\min} = \frac{r}{u}, K_{\max} = \frac{r}{v}, a > |c|, \quad (22)$$

$$\Phi_{\min} = -\operatorname{arctg} \frac{d}{a}, \Phi_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{d}{a},$$

gdzie:

$$r = \sqrt{a^2 + c^2}, s = a^2 + cd, \\ t = -v = c^2 - a^2, u = ab + c^2.$$

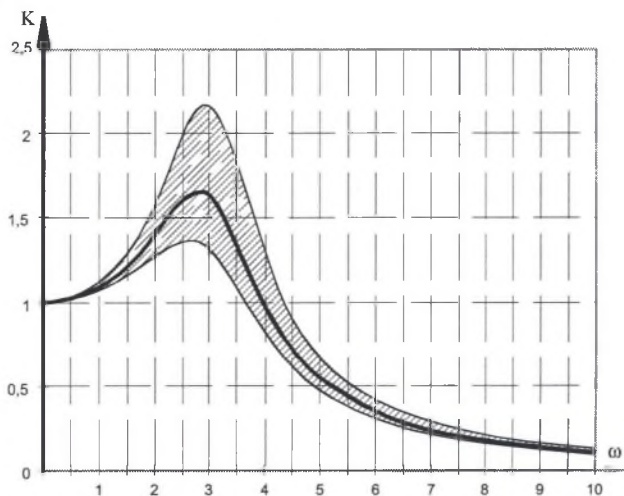
PRZYKŁAD 1. Rozpatrzmy układ opisany transmitancją operatorową (3) i zastosujmy przedstawione wyżej podejście do obliczenia oszacowania (4). W tym przypadku

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\underline{\alpha}}, 1 - \frac{\omega^2}{\bar{\alpha}} \right],$$

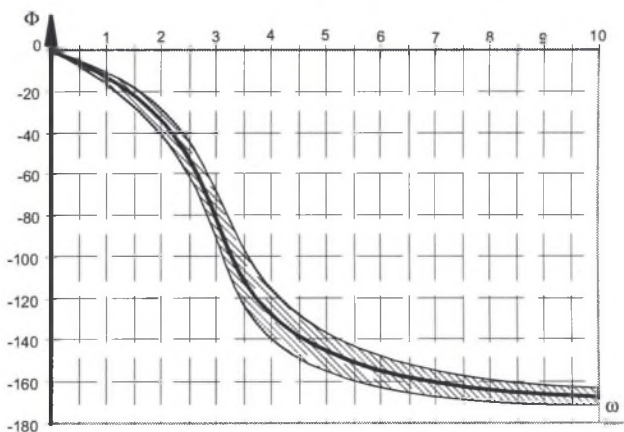
$$\text{Im}\{G(j\omega)\} = \left[ \frac{\beta}{\alpha} \omega, \frac{\bar{\beta}}{\underline{\alpha}} \omega \right].$$

Na rys. 3 przedstawiony jest wykres modułu i fazy transmitancji widmowej tego układu dla następujących danych modelujących niepewność parametrów  $\alpha = \alpha_0 [0.9, 1.1]$ ,  $\beta = \beta_0 [0.9, 1]$ , gdzie  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  reprezentują wartości nominalne parametrów,  $\alpha_0 = 10$ ,  $\beta_0 = 2$ .

(a)



(b)



Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe układu o niepewnych parametrach

Fig. 3. Frequency responses of the system with uncertain parameters

Pogrubione linie wewnątrz zakreskowanych obszarów reprezentują charakterystyki częstotliwościowe modułu i fazy dla wartości nominalnych parametrów układu  $\alpha_0$  i  $\beta_0$ .

### 3. WIELOMIANY INTERWAŁOWE CHARITONOWA

Problem oszacowania obwiedni charakterystyk częstotliwościowych można traktować jako zadanie znajdowania maksimum i minimum  $|P(j\omega)|$  i  $\text{Arg}\{P(j\omega)\}$  rodziny wielomianów

$$P(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_k s^k, \quad (23)$$

$$\alpha_i \in [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i], \underline{\alpha}_i \leq \overline{\alpha}_i, i = 0, \dots, k.$$

Zbiór wartości wielomianu z niepewnymi współczynnikami przy określonej pulsacji  $\omega$  jest wyznaczony przez obszar płaszczyzny zespolonej, który obejmuje wszystkie wartości wielomianu dla wszystkich dopuszczalnych wartości współczynników. Z (23) wynika, że

$$P(j\omega) = \text{Re}\{P(j\omega)\} + j \text{Im}\{P(j\omega)\}. \quad (24)$$

Formuła (24) definiuje dla każdego  $\omega \in R$  liniową transformację  $(k+1)$ -wymiarowego zbioru, rzeczywistych współczynników na płaszczyznę zespoloną. Przyjmując, że współczynniki interwałowe są niezależne,  $(k+1)$ -wymiarowy wektor interwałowy jest odwzorowywany w zespolony, prostokątny interwał (prostokąt o bokach równoległych do osi płaszczyzny zespolonej).

W pracy [19] pokazano, że wierzchołki takiego prostokątnego interwału są wyznaczone przez wartości czterech wielomianów Charitonowa [20]:

$$\begin{aligned} P_1(j\omega) &= \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 s + \underline{\alpha}_2 s^2 + \underline{\alpha}_3 s^3 + \dots \Big| s = j\omega, \\ P_2(j\omega) &= \underline{\alpha}_0 + \underline{\alpha}_1 s + \overline{\alpha}_2 s^2 + \overline{\alpha}_3 s^3 + \dots \Big| s = j\omega, \\ P_3(j\omega) &= \underline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1 s + \overline{\alpha}_2 s^2 + \underline{\alpha}_3 s^3 + \dots \Big| s = j\omega, \\ P_4(j\omega) &= \overline{\alpha}_0 + \underline{\alpha}_1 s + \underline{\alpha}_2 s^2 + \overline{\alpha}_3 s^3 + \dots \Big| s = j\omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Z (25) widać, że zbiory wartości wielomianów  $N(j\omega)$  i  $D(j\omega)$  należą do zbioru zespolonych interwałów prostokątnych, które oznaczono tutaj przez  $R(C)$ .

Mają one postać:

$$N(j\omega) = N = N_1 + jN_2 = [\underline{n}_1, \overline{n}_1] + j[\underline{n}_2, \overline{n}_2], \quad (26)$$

oraz

$$D(j\omega) = D = D_1 + jD_2 = [\underline{d}_1, \overline{d}_1] + j[\underline{d}_2, \overline{d}_2]. \quad (27)$$

Aby obliczyć zbiór wartości interwałowej transmittancji widmowej, należy wykonać operację dzielenia tych dwóch interwałów zespolonych. Zespolone operacje interwałowe powinny realizować najbliższą inkluzję zbioru wszystkich możliwych wartości, tzn.

$$\{a : b \mid a \in N, b \in D\} \subseteq N : D. \quad (28)$$

Działania dodawania, odejmowania i mnożenia dla prostokątnych interwałów zespolonych są optymalne w tym sensie, natomiast dzielenie nie jest [18]. W pracy zostanie zastosowana ulepszona wersja dzielenia prostokątnych interwałów zespolonych, a mianowicie [17, 18]:

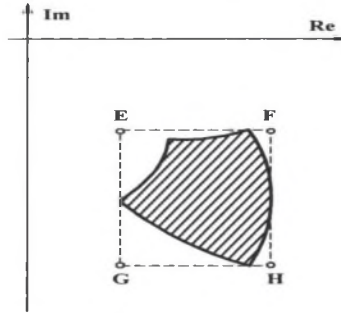
$$N : D = N \cdot \frac{1}{D}, \quad (29)$$

gdzie

$$\frac{1}{D} = \inf \left\{ X \in R(C) \mid \left\{ \frac{1}{b} \mid b \in D \right\} \subseteq X \right\}. \quad (30)$$



Relacja (30) jest zilustrowana na rys. 4 dla interwału  $D$  z pierwszej ćwiartki płaszczyzny zespolonej. Optymalne otoczenie ma postać prostokąta EFGH. Krzywoliniowy, zakreskowany obszar, który uzyskano przez odwzorowanie konforemne brzegów interwału  $D$ , odpowiada dokładnemu zbiorowi wartości  $D^{-1}$ . Kształt dokładnego zbioru wartości i wynikające stąd optymalne otoczenie prostokątne zależą od położenia interwału  $D$  na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.



Rys. 4. Optymalne otoczenie prostokątne  
Fig. 4. Optimal rectangular enclosure

#### 4. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Aby porównać własności przedstawionych metod wyznaczania obszarów niepewności transmitancji widmowych, przeprowadzono obliczenia dla dwóch przykładów. Pierwszy przykład odnosi się do transmitancji postaci (1), w drugim przypadku rozważa się transmitancję odpowiadającą relacji (30).

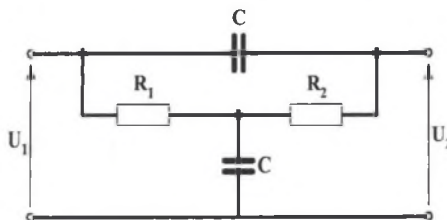
**PRZYKŁAD 2.** Rozpatruje się czwórnik kształtu T z mostkiem pokazany na rys. 5. Charakterystyka częstotliwościowa jest reprezentowana przez transmitancję operatorową [23]:

$$K(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}$$

Założono, że  $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon = 0.05$ .

Dla tych parametrów interwałowa transmitancja jest następująca:

$$K(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{[0.9025, 1.1025]s^2 + [1.9, 2.1]s + 1}{[0.9025, 1.1025]s^2 + [2.85, 3.15]s + 1}$$



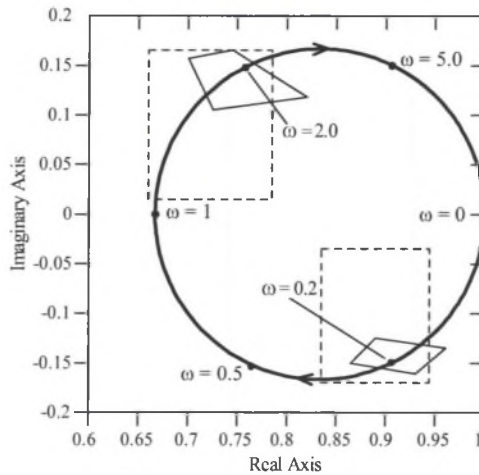
Rys. 5. Czwórnik T z mostkiem  
Fig. 5. Bridget-T circuit

Zakresy wartości dla  $\text{Re}\{G(j\omega)\}$  i  $\text{Im}\{G(j\omega)\}$  są obliczane w oparciu o metodę przedstawioną w pracy [25], gdzie do obliczania zakresu wartości funkcji wymiernej wykorzystuje się równania liniowe Toeplitza i wielomiany Bernsteina.

$$\text{Re}\{G(j\omega)\} \in 1 + \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \text{dla } x = [0.95\omega, 1.05\omega],$$

$$\text{Im}\{G(j\omega)\} \in \frac{(1-x^2)x}{(1+x^2)^2}, \quad \text{dla } x = [0.95\omega, 1.05\omega].$$

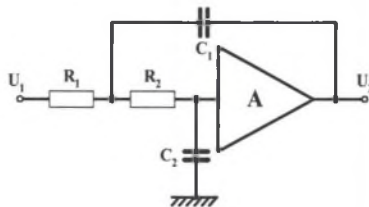
Na rys. 6 przedstawiony jest wykres Nyquista transmitancji widmowej dla nominalnej wartości  $RC = 1$  i obszary: ABCD (czworobok) i EFGH (prostokąt) dla dwóch częstotliwości  $\omega = 0.2$  i  $\omega = 2.0$ . Obliczone obszary niepewności pozwalają wyznaczyć granice obwiedni charakterystyki Nyquista dla tych częstotliwości.



Rys. 6. Obszary niepewności i nominalna charakterystyka Nyquista  
Fig. 6. Regions of uncertainty against a background of the Nyquist plot

Widoczne jest, że metoda oparta na wielomianach Charitonowa prowadzi do pewnej nadestymacji obszarów niepewności transmitancji widmowej.

**PRZYKŁAD 3.** Na rys. 7 przedstawiony jest analizowany układ filtra dolnoprzepustowego drugiego rzędu, który zaproponowali Sallen i Key [23].



Rys. 7. Ogniwo filtra dolnoprzepustowego drugiego rzędu  
Fig. 7. Second-order low-pass filter section

Transmitancja operatorowa rozpatrywanego układu jest następująca:

$$K(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 + R_2) C_2 s + 1}.$$

Przyjmując, że  $R_1 C_1 = R_2 C_2 / 2 = RC = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon = 0.1$ , otrzymuje się interwałową transmitancję

$$K(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{[1.62, 2.42]s^2 + [2.7, 3.3]s + 1},$$

dla której

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} &\in 1 - x, \quad \text{dla } x = [1.62\omega^2, 2.42\omega^2], \\ \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} &= x, \quad \text{dla } x = [2.7\omega, 3.3\omega]. \end{aligned}$$

Na rys. 8a i 8b są pokazane wykresy Nyquista dla wartości nominalnej  $RC = 1.0$  i odpowiednie obszary niepewności dla częstotliwości  $\omega = 0.2$  i  $\omega = 1.0$ .

Chociaż szerokości interwałów modelujących niepewności parametrów obwodu są większe niż w przykładzie 2, w obydwu metodach uzyskuje się mniejsze obszary niepewności. Są dwa powody takich wyników. Po pierwsze, różne współczynniki transmitancji są czasami zależne, po drugie, ulepszony algorytm dzielenia prostokątnych interwałów zespolonych zdefiniowany przez zależność (29) nie jest optymalny w sensie (28), podczas gdy relacja (30) prowadzi do optymalnego otoczenia prostokątnego.

## UWAGI KOŃCOWE

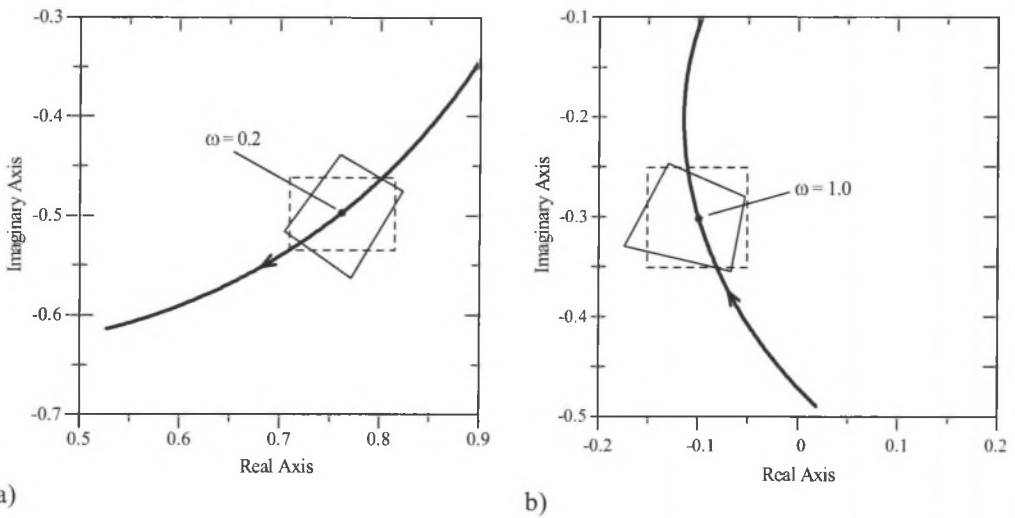
Wyniki przedstawione w pracy wskazują, że stosując stosunkowo proste algorytmy, można wyznaczyć aproksymacje obwiedni charakterystyk Nyquista (odpowiednio obwiedni amplitudy i fazy) interwałowych transmitancji wymiernych układów liniowych, ciągłych. Daje to możliwość szybkiej oceny, czy układ z niepewnościami modelowanymi interwałami spełnia wymagane dla charakterystyki częstotliwościowej specyfikacje projektowe.

W pracy analizuje się ten problem przyjmując konsekwentnie podejście oparte na analizie interwałowej, który wydaje się być obiecującym narzędziem do odpornej analizy układów liniowych.

Obliczenia numeryczne wskazują, że w odniesieniu do metody opartej na wielomianach interwałowych Charitonowa konieczny jest następny krok, oparty na „bardziej” optymalnym, w sensie (28), algorytmie dzielenia zespolonych interwałów prostokątnych [27].

Niezbędne są także dalsze prace pozwalające określić, kiedy zbiór wartości  $K(j\omega)$  przy ustalonym  $\omega > 0$  leży w otoczeniu wyznaczonym przy użyciu przedstawionych metod.

Metoda oparta na układzie dwóch liniowych równań interwałowych może także znaleźć zastosowanie do wyznaczania obwiedni charakterystyk częstotliwościowych liniowych układów dyskretnych, dla których transmitancje widmowe są wymiernymi funkcjami  $\exp(-j\omega T)$ , gdzie  $T$  oznacza okres próbkowania [28]. Podobnie jak dla układów ciągłych konieczne jest tu wyznaczenie zakresu wartości dla  $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$  oraz  $\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$ . Zależnie od postaci funkcji opisujących  $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$  i  $\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$  można tu zastosować podejście oparte tzw. formach centrowanych, formach wynikających z twierdzenia o wartości średniej funkcji, rozkładzie funkcji na szereg potęgowy Taylora i wykorzystaniu wielomianów Bernsteina [25, 26]. Stosunkowo proste formuły (14)–(22) wiążące graniczne wartości modułu i fazy transmitancji widmowych z zakresami wartości  $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}$  i  $\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$  mogą być wykorzystane w syntezie układów liniowych o zadanych obwiedniach w wybranym paśmie częstotliwości.



Rys. 8. Obszary niepewności i wykres Nyquista ogniwa filtra dolnoprzepustowego  
 Fig. 8. Regions of uncertainty and the Nyquist plot of the low-pass filter section

#### LITERATURA

1. Ackermann J., Kaesbauer D., Sienel W., Steihauser R.: *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, London 1994.
2. Bhattacharyya S.P., Chapatel H., Keel L.H.: *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice Hall, New York, 1995.
3. Bartlett A.C., Tesi A., Vicino A.: *Frequency response of uncertain systems with interval plants*. „IEEE Trans. Automat. Contr.” 1993, vol.38, p. 929-933.
4. Levkovich A., Zeheb E., Cohen N.: *Frequency response envelopes of a family of uncertain continuous-time systems*. „IEEE Trans. Circuits Syst. I” 1995, vol.42, p.156-165.
5. Chen J.-J., Hwang C.: *Computing frequency responses of uncertain systems*. „IEEE Trans. Circuits Syst I” 1998, vol.45, p.304-307.
6. Chen J.-J., Hwang C.: *Value sets of polynomial families with coefficients depending nonlinearly on perturbed parameters*. „IEE Proc. Part D” 1998, vol. 145, p. 73-82.
7. Hwang C., Chen J.-J.: *Computation of the frequency response of interval systems*. „Circuits Systems Signals Processing” 1996, vol. 15, No. 6, p. 807-818.
8. Hwang C., Yang S.-F.: *Generation of frequency-response templates for linear systems with an uncertain time delay and multilinearly-correlated parameter perturbation responses of uncertain systems*. „IEEE Trans. Circuits Syst. I” 2002, vol. 49, p. 378-383.
9. Tan N.: *Computing of the frequency response of multilinear affine systems*. „IEEE Trans. Automat. Contr.” 2002, vol. 47, p. 1691-1696.
10. Tan N., Atherton D. P.: *Frequency response of uncertain systems: A 2q-convex parpolygonal approach*. „IEE Proc.-Control Theory Appl.” 2000, vol. 147, p. 547-555.
11. Nataraj P. S. V., Barve J. J.: *Generation of Bode and Nyquist plots for nonrational transfer functions to prescribed accuracy*. A SIAM Workshop on Validated Computing., Toronto, 2002.

12. Busłowicz M.: *Frequency responses of linear interval plants with delay*. „Control & Cybernetics” 1999, vol. 28, no.2, p.281-9.
13. Busłowicz M.: *Zastosowania analizy przedziałowej w teorii obwodów elektrycznych*. Mat. XXVII IC-SPETO, tom I, s. 3, Niedzica, 2004.
14. Garczarczyk Z.: *Frequency responses of linear systems with interval parameters*. Proc. ECCTD'99, vol.1, Stresa, Italy, 1999, s.615-18.
15. Garczarczyk Z.: *Frequency response envelopes of interval systems: A comparative study*. Proc. ECCTD'03, vol.1, Kraków, 2003, s. 201-204.
16. Trzasko W.: *Charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistych obwodów elektrycznych RLC*. Mat. XXVI IC-SPETO, tom II, Niedzica, 2003, s. 233-237.
17. Oetli W., Prager W.: *Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides*. Numer. Math., vol. 6, 1964, s.405-409.
18. Neumaier A.: *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
19. Dasgupta S.: *Kharitonov's theorem revisited*. „Syst. Contr. Lett.” 1988, vol. 11, s. 381-384.
20. Kharitonov V. L.: *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*. „Diff. Equations” 1979, vol.14, s.1483-1485.
21. Petkovic M. S., Petkovic L. D.: *Complex Interval Arithmetic and Its Applications*, Berlin, Wiley-VCH, 1998.
22. Rokne J., Lancaster P.: *Complex interval arithmetic*. „Comm. ACM” 1971, vol. 14, p. 111-112.
23. Chen W.-K.: *The Circuits and Filters Handbook*, CRC Press, Boca Raton, 1995.
24. Ratschek H., Rokne J.: *Computer Methods for the Range of Functions*, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
25. Garczarczyk A.: *An efficient method for computing the range values of a rational function with application*. Proc. ECCTD'95, Istanbul, Turkey, 1995, p. 459-462.
26. Garczarczyk Z.: *A method for evaluation the range values of a bivariate function*. Proc. NOLTA'98, vol.3, Crans-Montana, Switzerland, 1998, p. 907-910.
27. Lohner R., Wolff von Gudenberg J.: *Complex interval division with maximal accuracy*. Proc. 7th Symposium on Computer Arithmetic, Urbana, 1985, IEEE Computer Society, p. 332-36.
28. Cunningham E.P.: *Digital Filtering*. Houghton Mifflin, Boston, 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 maja 2004 r.