ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: ELEKTRYKA z. 191 Nr kol. 1633

Zygmunt PIĄTEK*, Bernard BARON**, Borys BOROWIK***

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE WEWNĄTRZ PRZEWODZĄCEGO CYLINDRYCZNEGO WSADU RUROWEGO W PODŁUŻNYM RÓWNOMIERNYM POLU MAGNETYCZNYM

Streszczenie. W pracy wyznaczono pole elektromagnetyczne w przewodzącym wsadzie rurowym umieszczonym w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym poprzez rozwiązanie równania Bessela we współrzędnych walcowych. Na podstawie otrzymanych wzorów wykonano obliczenia i rysunki rozkładów przestrzenno – czasowych, tłumienia i wnikania natężenia pola magnetycznego i gęstości prądu w rurze. Otrzymane wzory opisujące pole elektromagnetyczne w rozważanym wsadzie mogą być wykorzystane do opisu zjawisk zachodzących w procesie nagrzewania wsadów rurowych (gęstości mocy, temperatury, parametrów zastępczych wzbudników itp.). W zakończeniu porównano otrzymane rozwiązania ze wzorami podanymi przez Wajnberga w monografii [12] oraz przedstawiono rozkłady pola elektromagnetycznego w przypadku wsadu walcowego umieszczonego w sinusoidalnie zmiennym podłużnym polu magnetycznym

ELECTROMAGNETIC FIELD IN A CYLINDRICAL TUBULAR CONDUCTOR IN LONGITUDINAL UNIFORM MAGNETIC FIELD

Summary. In the paper we determine the electromagnetic field in a tubular conductor placed in external longitudinal sinusoidal magnetic field using the solution of Bessell equation in cylindrical co-ordinates. The resulting equations are the basis for calculation and graphs of space-time distributions, attenuation and diffusion of the magnetic field strength and of current density in the tubular conductor. The resulting equations describing the electromagnetic field in the considered conductor can be used to describe the phenomena taking place during the process of the tubular conductors heating (power density, temperature, replacement parameters of the inductors etc.). Finally we compare our solutions with the formulas given by Weinberg in the monograph [12] and we show the electromagnetic field distributions for the case of a cylindrical conductor placed in sinusoidal longitudinal magnetic field.

* Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, Katedra Elektrotechniki
** Politechnika Śląska, Wydział Elektryczny, Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej
*** Politechnika Częstochowska, Wydział Inżynierii Mech. i Informatyki, Instytut Technologii Maszyn i Automatyzacji Produkcji

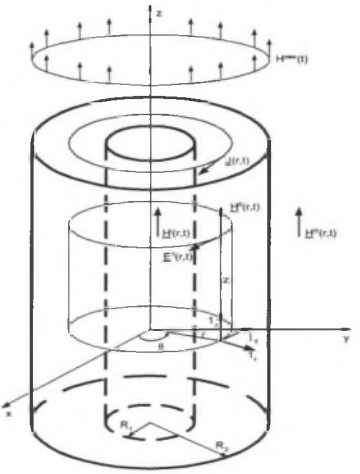
1. WSTĘP

Przypadek rurowego wsadu przewodzącego w podłużnym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym występuje w procesie nagrzewania indukcyjnego metali. Pole magnetyczne wytwarzane jest przez wzbudnik zasilany z tyrystorowego przemiennika o częstotliwościach znamionowych od $16\frac{2}{3}$ Hz do 27,12 M·Hz.

W przypadku nieskończenie długiego rurowego wsadu przewodzącego w zewnętrznym podłużnym polu magnetycznym (rys.1) wielkości charakteryzujące pole elektromagnetyczne, ze względu na symetrię układu, zależą tylko od współrzędnej r walcowego układu współrzędnych. Chodzi zatem o zagadnienie jednowymiarowe ze stałą przenikalnością magnetyczną bezwzględną walca $\mu = \mu_0\, \mu_r$ i jego stałą konduktywnością γ.

Ze względu na to, że pole $\boldsymbol{H}^{zew}(t)$ ma tylko jedną składową wzdłuż osi z, na mocy drugiego równania Maxwella $\mathbf{rot}\boldsymbol{E}^{zew}(r,t) = -\mu \dfrac{\partial \boldsymbol{H}^{zew}(t)}{\partial t}$, natężenie pola elektrycznego ma również jedną składową wzdłuż osi Θ, tzn. $\boldsymbol{E}^{zew}(r,t) = -\mathbf{1}_{\Theta} E_{\Theta}^{zew}(r,t)$. Wtedy mamy do czynienia z zagadnieniem padania fali cylindrycznej na powierzchnię boczną rurowego wsadu przewodzącego. Średnie i wielkie częstotliwości pola magnetycznego wytwarzanego przez wzbudnik wymagają stosowania metod polowych w opisie pola elektromagnetycznego we wsadzie rurowym [1, 2, 3, 4, 11, 13]. W przypadku wsadu cylindrycznego pole to opisane jest równaniami Bessela. W literaturze fachowej poświęconej nagrzewaniu indukcyjnemu rozwiązanie tych równań podawane jest zazwyczaj w postaci wzorów uproszczonych, np. w pracy M. Heringa [1] lub Cz. Sajdaka i E. Semka [11]. Zdaniem autorów współczesne pakiety obliczeniowe umożliwiają korzystanie z pełnych rozwiązań, gdyż funkcje Bessela są standardowymi elementami bibliotek tych pakietów, np. w *Mathematica* czy *MatLab*.

Pełną postać tych wzorów zawierają m. in. monografie E. Langera [4] oraz A. M. Wajnberga [13]. W pierwszej z nich autor wykorzystuje związek między natężeniem pola magnetycznego a indukowanym polem elektrycznym na powierzchni wewnętrznej wsadu rurowego (s. 181-182). Wajnberg wzory te wyprowadza (zostanie to szczegółowo skomentowane w zakończeniu niniejszej pracy) przy założeniu niezerowych wartości prądu przesunięcia w obszarze $0 \le r \le R_1$ rozważanego układu (rys.1). Zdaniem autorów, w przypadku indukcyjnych urządzeń grzejnych częstotliwość pola elektromagnetycznego jest rzędu kilkunastu MHz, prądy przesunięcia są pomijalnie małe w stosunku do indukowanych we wsadzie prądów przewodzenia i dlatego te pierwsze prądy można pominąć. Przy tym założeniu autorzy uzyskują również pełne wzory wyrażone poprzez funkcje Bessela. Ponadto autorzy przedstawiają rozkłady przestrzenno-czasowe, wnikanie i tłumienie pola elektromagnetycznego oraz rozwiązanie opisujące pole w obszarze $0 \le r \le R_1$, co może być przydatne w obliczeniach parametrów indukcyjnych urządzeń grzejnych do wsadów cylindrycznych.



Rys. 1. Rurowy wsad przewodzący w zewnętrznym podłużnym sinusoidalnie zmiennym równomiernym polu magnetycznym
Fig. 1. Tubular conductor in the external longitudinal sinusoidal uniform magnetic field

2. POLE ELEKTROMAGNETYCZNE

W rozważanym przypadku wsadu rurowego pole magnetyczne jest polem zewnętrznym w stosunku do rury, ma jedną składową wzdłuż osi z (rys.1) i określa się je następującym wzorem [2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10]:

$$\boldsymbol{H}^{zew}(t) = \mathbf{1}_z H_z^{zew}(t)\,, \tag{1}$$

w którym składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi z

$$H_z^{zew}(t) = H_0 \sin(\varpi\, t + \xi)\ , \tag{1a}$$

gdzie: H_0 - amplituda zewnętrznego pola magnetycznego w A·m^{-1},

ω - pulsacja w rad,

s^{-1}, ξ - faza początkowa natężenia pola magnetycznego w rad.

Zewnętrzne pole magnetyczne jest polem harmonicznym, więc możemy je przedstawić jako część urojoną funkcji zespolonej pola zewnętrznego, tzn. w postaci wzoru

$$H_z^{zew}(t) = Im\{\underline{H}_z^{zew}(t)\}, \tag{2}$$

w którym to wzorze

$$\underline{H}_z^{zew}(t) = \underline{H}_0\ e^{j\varpi t}\ , \tag{2a}$$

gdzie amplituda zespolona pola magnetycznego zewnętrznego

$$\underline{H}_0 = H_0\, e^{j\xi}. \tag{2b}$$

W zapisie zespolonym mamy zatem

$$\underline{\boldsymbol{H}}^{zew} = \mathbf{1}_z \underline{H}_z^{zew} = \mathbf{1}_z \underline{H}_0 . \tag{2c}$$

W przypadku ogólnym przewodnika o dowolnej postaci, umieszczonym w zmiennym polu elektromagnetycznym, siłą rzeczy muszą powstać prądy, gdyż pole elektryczne całkowite nie może być równe zeru wszędzie w całym przewodniku. Prądy te noszą nazwę prądów Foucaulta [7] i są określone przez wektor gęstości prądu $\underline{\boldsymbol{J}}(r)$ - rys.1. Prądy te wytwarzają tzw.

pole magnetyczne oddziaływania zwrotnego $\underline{\boldsymbol{H}}^{oz}(r)$, które w badanym układzie ma jedną składową wzdłuż osi z, czyli

$$\underline{\boldsymbol{H}}^{oz}(r) = \mathbf{1}_z \underline{H}_z^{oz}(r). \tag{3}$$

Zatem dla $r > R_2$ całkowite natężenie pola magnetycznego

$$\underline{\boldsymbol{H}}^{III}(r) = \boldsymbol{H}^{zew}(t) + \underline{\boldsymbol{H}}^{oz}(r). \tag{4}$$

Konduktywność w obszarze $r > R_2$ (powietrze) jest równa zeru, a stąd pierwsze równanie Maxwella dla pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego $\boldsymbol{H}^{oz}(r,t)$, przy jednoczesnym pominięciu prądów przesunięcia (pole quasi-statyczne), ma postać

$$\mathbf{rot}\,\underline{\boldsymbol{H}}^{oz}(r) = 0. \tag{5}$$

Po uwzględnieniu wzoru (3) równanie (5) sprowadza się do

$$\frac{d\underline{H}_z^{oz}(r)}{dr} = 0, \tag{5a}$$

co oznacza, że składowa $\underline{H}_z^{oz}(r)$ nie zależy od zmiennej r walcowego układu współrzędnych. Zatem ze wzoru (4) pole magnetyczne dla $r > R_2$

$$\underline{H}_z^{III}(r) = \underline{H}_z^{zew}(r) + \underline{H}_z^{oz}(r). \tag{6}$$

Na zewnątrz wsadu rurowego, podobnie jak w pracy [4], przyjmujemy, że pole $\underline{H}_z^{III}(r) \to \underline{H}_z^{zew}(r) = \underline{H}_0$, a stąd wynika, że $\underline{H}_z^{oz}(r) = 0$ i wtedy całkowite pole magnetyczne

$$\underline{\boldsymbol{H}}^{III}(r) = \mathbf{1}_z \underline{H}_z^{III}(r) = \underline{\boldsymbol{H}}^{zew}(r) = \mathbf{1}_z \underline{H}_0. \tag{6a}$$

Zerowa wartość pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego w obszarze $r > R_2$ wynika z faktu, że linie gęstości prądu $\underline{\boldsymbol{J}}(r)$ indukowanego we wsadzie rurowym są okręgami koncentrycznymi o osi Oz – rys.1. Zatem nie wytwarzają one na zewnątrz rury żadnego pola magnetycznego, podobnie jak prąd w nieskończenie długim solenoidzie.

Pole elektryczne w rozważanym obszarze ($r > R_2$) spełnia drugie równanie Maxwella, skąd po uwzględnieniu wzoru (6a), otrzymujemy

$$\frac{d}{dr}\left[r\,\underline{E}_\Theta^{III}(r)\right] = -j\,\varpi\,\mu\,r\,\underline{H}_0. \tag{7}$$

W rozwiązaniu powyższego równania mamy

$$\underline{E}_\Theta^{III}(r) = -\frac{1}{2}\,j\,\varpi\,\mu\,r\,\underline{H}_0 + \frac{\underline{A}_1}{r}, \tag{7a}$$

W obszarze II ($R_1 \le r \le R_2$) obowiązuje pierwsze i drugie równanie Maxwella, skąd otrzymujemy [2] równanie falowe w zapisie zespolonym

$$\frac{d^2\underline{H}_z^{II}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\underline{H}_z^{II}(r)}{dr} - \underline{\Gamma}^2\,\underline{H}_z^{II}(r) = 0, \tag{8}$$

w którym kwadrat zespolonej stałej propagacji fali elektromagnetycznej w ośrodku dobrze przewodzącym $\underline{\Gamma}^2 = j\,\varpi\,\mu\,\gamma$, skąd mamy, że

$$\underline{\Gamma} = \sqrt{j}\,\sqrt{\varpi\,\mu\,\gamma} = k + j\,k = \sqrt{2j}\,k, \tag{8a}$$

gdzie współczynnik

$$k = \sqrt{\frac{\varpi \mu \gamma}{2}}, \tag{8b}$$

zaś jego odwrotność jest głębokością wnikania fali do ośrodka dobrze przewodzącego i wynosi

$$\delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\varpi \mu \gamma}}. \tag{8c}$$

Równanie (8) jest równaniem Bessela zerowego rzędu zmiennej r, którego rozwiązaniem [7] jest funkcja

$$\underline{H}_z^{II}(r) = \underline{A}_2 I_0(\underline{\Gamma} r) + \underline{A}_3 K_0(\underline{\Gamma} r), \tag{9}$$

gdzie funkcje $I_0(\underline{\Gamma} r)$ i $K_0(\underline{\Gamma} r)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela zmiennej zespolonej $\underline{\Gamma} r$ odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zerowego rzędu, zaś $\underline{A}_2$ i $\underline{A}_3$ są zespolonymi stałymi całkowania, które zostaną dalej wyznaczone z odpowiednich warunków brzegowych.

Poszukiwane natężenie pola elektrycznego $\underline{E}_\Theta^{II}(r)$ w obszarze II ($R_1 \le r \le R_2$) wyznaczamy* z pierwszego równania Maxwella, otrzymując

$$\underline{E}_\Theta^{II}(r) = -\frac{\underline{\Gamma}}{\gamma}\left[\underline{A}_2 I_1(\underline{\Gamma} r) - \underline{A}_3 K_1(\underline{\Gamma} r)\right], \tag{10}$$

W obszarze I ($0 \le r \le R_1$) konduktywność $\gamma = 0$ i wtedy pole magnetyczne opisane jest, na podstawie (11), równaniem Eulera

$$\frac{d^2 \underline{H}_z^I(r)}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d \underline{H}_z^I(r)}{d r} = 0, \tag{11}$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie

$$\underline{H}_z^I(r) = \underline{A}_5 \ln r + \underline{A}_4. \tag{11a}$$

Dla $r \to 0$ funkcja $\ln r \to \infty$, zaś pole magnetyczne musi być skończone, a stąd wynika, że stała $\underline{A}_5 = 0$. Zatem natężenie pola magnetycznego w obszarze I ($0 \le r \le R_1$)

$$\underline{H}_z^I(r) = \underline{A}_4 \tag{11b}$$

Pola elektryczne i magnetyczne spełniają w tym obszarze drugie równanie Maxwella, z którego po uwzględnieniu (11b) otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{d r}\left[r \underline{E}_\Theta^I(r)\right] = -j \varpi \mu r \underline{A}_4. \tag{12}$$

W rozwiązaniu powyższego równania mamy

$$\underline{E}_\Theta^I(r) = -\frac{1}{2} j \varpi \mu r \underline{A}_4 + \frac{\underline{A}_6}{r}. \tag{12a}$$

---

* Ze wzoru (168), s. 281 [5] $\frac{d}{d z}\left[I_0(z)\right] = I_1(z)$ po podstawieniu $z = \underline{\Gamma} r$ mamy, że $d z = \underline{\Gamma} d r$ i ostatecznie $\frac{d}{d r}\left[I_0(\underline{\Gamma} r)\right] = \underline{\Gamma} I_1(\underline{\Gamma} r)$. Podobnie ze wzoru (213), s. 285 [5] $\frac{d}{d z}\left[K_0(z)\right] = -K_1(z)$ oraz po podstawieniu jak wyżej, otrzymujemy $\frac{d}{d r}\left[K_0(\underline{\Gamma} r)\right] = -\underline{\Gamma} K_1(\underline{\Gamma} r)$.

Dla $r \to 0$ funkcja $\frac{1}{r} \to \infty$, zaś pole elektryczne musi być skończone, a stąd wynika, że stała $\underline{A}_6 = 0$. Zatem natężenie pola elektrycznego w obszarze I ($0 \le r \le R_1$)

$$\underline{E}_{\Theta}^{I}(r) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{j}\varpi\,\mu\, r\,\underline{A}_4 = -\frac{1}{2}\frac{\underline{\Gamma}^2}{\gamma}\, r\,\underline{A}_4 . \tag{12b}$$

W celu opisu pola elektromagnetycznego w poszczególnych obszarach wsadu rurowego wyznaczamy stałe $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$, $\underline{A}_3$, $\underline{A}_4$ z następujących warunków brzegowych

$$\left.\begin{aligned} &\underline{E}_{\Theta}^{III}(r=R_2) = \underline{E}_{\Theta}^{II}(r=R_2), \qquad \underline{H}_z^{III}(r=R_2) = \underline{H}_z^{II}(r=R_2) \\ &\underline{H}_z^{II}(r=R_1) = \underline{H}_z^{I}(r=R_1), \qquad \underline{E}_{\Theta}^{II}(r=R_1) = \underline{E}_{\Theta}^{I}(r=R_1) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

W rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy:

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{\Gamma} R_2}{\gamma}\left\{\frac{K_1(\underline{\Gamma} R_2)\left[2I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1)\right] - I_1(\underline{\Gamma} R_2)\left[2K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1)\right]}{\underline{D}} + \frac{\underline{\Gamma} R_2}{2}\right\}\underline{H}_0 , \tag{14}$$

$$\underline{A}_2 = \frac{2K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1)}{\underline{D}}\underline{H}_0 , \tag{14a}$$

$$\underline{A}_3 = \frac{2I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1)}{\underline{D}}\underline{H}_0 , \tag{14b}$$

$$\underline{A}_4 = \frac{2\left[I_1(\underline{\Gamma} R_1) K_0(\underline{\Gamma} R_1) + I_0(\underline{\Gamma} R_1) K_1(\underline{\Gamma} R_1)\right]}{\underline{D}}\underline{H}_0 , \tag{14c}$$

w których

$$\underline{D} = I_0(\underline{\Gamma} R_2)\left[2K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1)\right] + K_0(\underline{\Gamma} R_2)\left[2I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1)\right]. \tag{14d}$$

3. OPIS POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W JEDNOSTAKACH WZGLĘDNYCH

W celu graficznej prezentacji rozkładu czasowo-przestrzennego pola elektromagnetycznego w przewodzącym wsadzie rurowym umieszczonym w podłużnym równomiernym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym wprowadzamy parametr określający względną grubość ścianki rury w postaci $\beta = \frac{R_1}{R_2}$, $0 \le \beta \le 1$. Częstotliwość sinusoidalnie zmiennego zewnętrznego pola magnetycznego oraz konduktywność wsadu w odniesieniu do jego promienia zewnętrznego zostaną uwzględnione przez współczynnik $\alpha = \frac{R_2}{\delta} = k\,R_2$. Ponadto wprowadzimy zmienną względną x odpowiadającą zmiennej r walcowego układu współrzędnych w postaci $x = \frac{r}{R_2}$.

Względne zmiany pola elektromagnetycznego wyrażamy odnosząc natężenie pola magnetycznego do wartości $\underline{H}_0$, natężenie pola elektrycznego do wartości $\frac{\underline{H}_0}{\gamma R_2}$, gęstość prądu do wartości $\frac{\underline{H}_0}{R_2}$. Odpowiednie współczynniki są wtedy dane następującymi wzorami:

- dla obszaru I, tzn. dla $0 \le r \le R_1$, czyli $0 \le x \le \beta$, mamy

$$\underline{k}_H^I(x) = \frac{\underline{H}_z^I(x)}{\underline{H}_0} = \frac{\underline{A}_4}{\underline{H}_0}, \quad \underline{k}_E^I(x) = \frac{\underline{E}_\Theta^I(x)}{\dfrac{\underline{H}_0}{\gamma R_2}} = -\frac{j\alpha^2 \underline{A}_4}{\underline{H}_0} x \tag{15}$$

- dla obszaru II, tzn. dla $R_1 \le r \le R_2$, czyli $\beta \le x \le 1$, otrzymujemy

$$\underline{k}_H^{II}(x) = \frac{\underline{H}_z^{II}(x)}{\underline{H}_0} = \frac{\underline{A}_2 I_0(\sqrt{2j}\,\alpha x) + \underline{A}_3 K_0(\sqrt{2j}\,\alpha x)}{\underline{H}_0}, \tag{16}$$

$$\underline{k}_E^{II}(x) = \frac{\underline{E}_\Theta^{II}(x)}{\dfrac{\underline{H}_0}{\gamma R_2}} = -\frac{\sqrt{2j}\,\alpha}{\underline{H}_0}\left[\underline{A}_2 I_1(\sqrt{2j}\,\alpha x) - \underline{A}_3 K_1(\sqrt{2j}\,\alpha x)\right], \tag{16a}$$

- dla obszaru III, tzn. dla $r \ge R_2$, czyli $x \ge 1$, zachodzi

$$\underline{k}_H^{III}(x) = \frac{\underline{H}_z^{III}(x)}{\underline{H}_0} = 1, \quad \underline{k}_E^{III}(x) = \frac{\underline{E}_\Theta^{III}(x)}{\dfrac{\underline{H}_0}{\gamma R_2}} = -\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{2j}\,\alpha x\right)^2 - \frac{\gamma \underline{A}_1}{\underline{H}_0}\right] \tag{17}$$

4. ROZKŁAD POLA MAGNETYCZNEGO

Współczynnik $\underline{k}_H(x)$ określający rozkład pola magnetycznego w różnych obszarach wsadu rurowego jest liczbą zespoloną

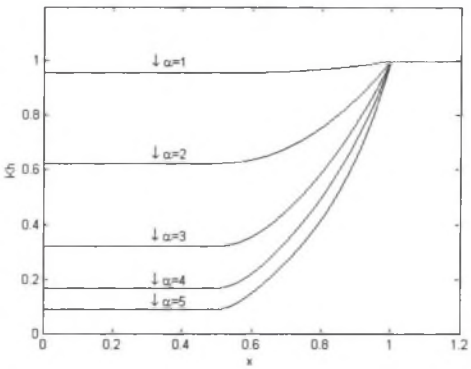
$$\underline{k}_H(x) = \frac{\underline{H}_z(x)}{\underline{H}_0} = k_H(x)\,exp[j\,\varphi_{kH}(x)], \tag{18}$$

gdzie $\varphi_{kH}(x)$ jest argumentem tego współczynnika, zaś $k_H(x)$ jego modułem, przy czym $k_H(x) = \dfrac{H_z(x)}{H_0}$. Za pomocą tego współczynnika przedstawiamy rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w różnych obszarach wsadu rurowego dla różnych wartości parametru α – rys. 2.

Rozkład natężenia pola magnetycznego możemy także przedstawiać w postaci funkcji zmiennych x oraz czasu t. W tym celu wprowadzamy współczynnik zespolony w postaci funkcji zespolonej powyższych zmiennych rzeczywistych

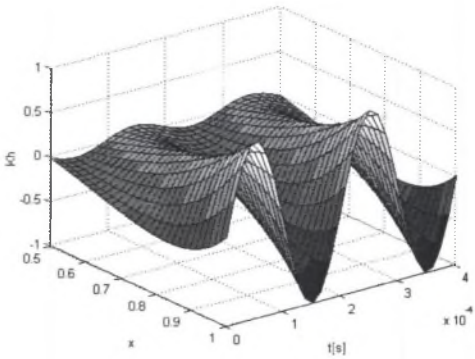
$$\underline{k}_H(x,t) = \frac{\underline{H}_z(x,t)}{\underline{H}_0} exp[j\,\varpi\,t)] = \underline{k}_H(x)\,exp[j\,\varpi\,t)]. \tag{19}$$

Przebieg rzeczywisty zmian pola magnetycznego określamy wtedy współczynnikiem $k_H(x,t) = Im\left[\underline{k}_H(x,t)\right]$. Powyższe określenie współczynnika $k_H(x,t)$ pozwala nam na przedstawienie rozkładu przestrzenno-czasowego pola magnetycznego - rys.3.



Rys.2. Rozkład modułu pola magnetycznego w różnych obszarach przewodzącego wsadu rurowego dla $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\beta = 0{,}6$, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$ i różnych wartości parametru α

Fig.2. Distribution of the magnetic field module in different areas of a tubular conductor for $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\beta = 0{,}6$, $\xi = 0$ and for different values of the parameter α



Rys. 3. Rozkład czasowo – przestrzenny pola magn. w przewodzącym wsadzie rurowym dla α=5, β=0,6, $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

Fig. 3. Time-space distribution of the magnetic field in a tubular conductor for α=5, β=0,6, $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

5. ROZKŁAD POLA ELEKTRYCZNEGO

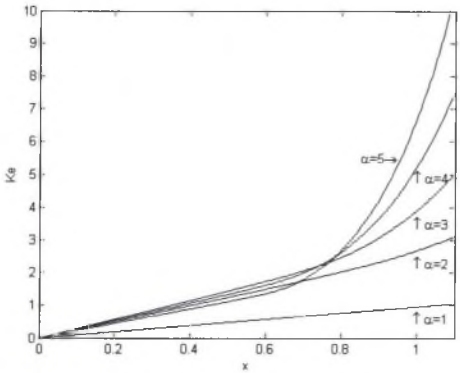
Współczynnik $\underline{k}_E(x)$ określający rozkład pola elektrycznego w różnych obszarach wsadu rurowego jest liczbą zespoloną

$$\underline{k}_E(x) = \frac{\underline{E}_\Theta(x)}{\dfrac{\underline{H}_0}{\gamma R_2}} = k_E(x)\, exp[j\ \varphi_{kE}(x)] \tag{20}$$

gdzie $\varphi_{kE}(x)$ jest argumentem tego współczynnika, zaś $k_E(x)$ jego modułem, przy czym $k_E(x) = \gamma R_2 \dfrac{E_\Theta(x)}{H_0}$. Za pomocą tego współczynnika przedstawiamy rozkład modułu natężenia pola elektrycznego w różnych obszarach wsadu rurowego dla różnych wartości parametru α – rys. 4. Rozkład natężenia pola elektrycznego możemy także przedstawiać w postaci funkcji zmiennych x oraz czasu t. W tym celu, podobnie jak we wzorach (2), (2a) i (2b), wprowadzamy współczynnik zespolony w postaci funkcji zespolonej powyższych zmiennych rzeczywistych

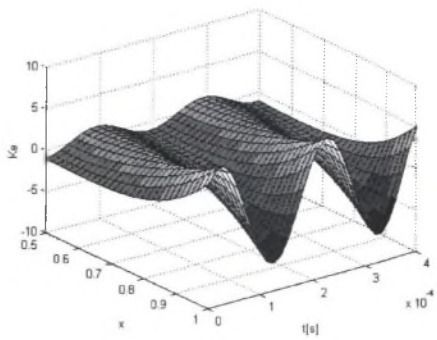
$$\underline{k}_E(x,t) = \frac{\underline{E}_\Theta(x)}{\dfrac{\underline{H}_0}{\lambda R_2}}\, exp[j\ \varpi\ t)] = \underline{k}_E(x)\, exp[j\ \varpi\ t)]\ , \tag{21}$$

Przebieg rzeczywisty zmian pola elektrycznego określamy wtedy współczynnikiem $k_E(x,t) = Im\left[\underline{k}_E(x,t)\right]$. Powyższe określenie współczynnika $k_E(x,t)$ pozwala nam na przedstawienie rozkładu przestrzenno-czasowego pola elektrycznego - rys.5.



Rys.4. Rozkład modułu pola elektrycznego w różnych obszarach przewodzącego wsadu rurowego dla $\beta = 0{,}6$, $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$ i różnych wartości parametru α

Fig.4. Distribution of the electric field module in different areas of a tubular conductor for $\beta = 0{,}6$ $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\xi = 0$ $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1} and for different α



Rys. 5. Rozkład czasowo – przestrzenny pola elektrycznego w przewodzącym wsadzie rurowym dl α=5, β=0,6, $\xi = 0$, $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}

Fig. 5. Time-space distribution of the electric field in a tubular conductor for α=5, β=0,6, $\omega = \pi \cdot 10^4$ rad·s^{-1}, $\xi = 0$, $\gamma = 58 \cdot 10^6$ S·m^{-1}, $\xi = 0$

6. ZAKOŃCZENIE

Uzyskane powyżej pełne postacie wzorów opisujące pole elektromagnetyczne we wszystkich obszarach rurowego wsadu cylindrycznego mogą być podstawą do obliczeń parametrów indukcyjnych urządzeń grzejnych do wsadów cylindrycznych. Pozwalają również, na mocy twierdzenia Poyntinga, na wyznaczenie mocy wnikającej do wsadu przez jego powierzchnię boczną i w konsekwencji do określenia w nim rozkładu temperatury.

Rozkład natężenia pola elektrycznego przedstawiony na rys.5 wyznaczono na podstawie wzoru (21) biorąc go do obliczeń ze znakiem przeciwnym, tzn. uwzględniając rzeczywisty zwrot wektora $\underline{\boldsymbol{E}}^{II}(r,t)$ (przeciwny do zwrotu wektora jednostkowego $\mathbf{1}_\Theta$), a tym samym uwzględniając rzeczywisty kierunek propagacji fali elektromagnetycznej – przeciwny do zwrotu wektora jednostkowego $\mathbf{1}_r$ walcowego układu współrzędnych – rys.1. Wtedy też porównując rys.3 z rys.5 zauważa się, że przebieg chwilowy gęstości prądu wyprzedza przebieg natężenia pola magnetycznego o kąt $\varphi_{H,J} = \varpi\,\Delta t \cong \dfrac{\pi}{4}$, co odpowiada przesunięciu fazowemu między $J_\Theta(r,t)$ a $H_z^I(r,t)$ dla monochromatycznej fali cylindrycznej w ośrodku dobrze przewodzącym (podobnie jak dla fali płaskiej w środowisku dobrze przewodzącym – [2], s. 225).

Wpływ prądów przesunięcia na rozkład pola magnetycznego w rozważanym przypadku nagrzewania indukcyjnego wsadów metalowych można określać odnosząc te prądy do prądów przewodzenia za pomocą współczynnika $\kappa = \dfrac{J_D}{J_C} = \dfrac{\varpi\,\varepsilon}{\gamma}$. Dla częstotliwości rzędu 20 MHz i

wsadów miedzianych $\kappa_{Cu} \cong 10^{-11}$, zaś wsadów stalowych $\kappa_{Fe} \cong 10^{-10}$. Stąd wynika, że o rozkładzie pola magnetycznego we wszystkich obszarach metalowego wsadu cylindrycznego, oprócz zewnętrznego pola magnetycznego $\underline{H}_0$, decydują wirowe prądy przewodzenia indukowane w tym wsadzie. Zatem wprowadzenie w obszarze *I*, tzn. dla $0 \le r \le R_1$, do opisu pola magnetycznego równania (11) jest uzasadnione. Odmiennie postępuje Wajnberg w pracy [13]. Uwzględnia on mianowicie prądy przesunięcia w obszarze *I* otrzymując w efekcie dla tego obszaru równanie Bessela (równanie (5-3'a) ze str. 107 po niezbędnej korekcie oznaczeń)

$$\frac{d^2 \underline{H}_z^I(r)}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d \underline{H}_z^I(r)}{d r} - (\underline{\Gamma}^I)^2 \underline{H}_z^I(r) = 0, \tag{22}$$

w którym zespolona stała propagacji w dielektryku $\underline{\Gamma}^I = j\varpi\sqrt{\mu\varepsilon}$. W rozwiązaniu równania (22) otrzymuje się natężenie pola magnetycznego (wzór (5-4в) ze str. 107; rozwiązanie to cytowane jest także w pracy [11] na str. 58)

$$\underline{H}_z^I(r) = \underline{A}_4\, I_0(\underline{\Gamma}^I r), \tag{22a}$$

oraz natężenie pola elektr. (wzór (5-4г) ze str. 107; rozwiązanie to cytowane jest także w pracy [11] na str. 58)

$$\underline{E}_\Theta^I(r) = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \underline{A}_4\, I_1(\underline{\Gamma}^I r). \tag{22b}$$

Mając rozwiązanie w obszarze *II* ($R_1 \le r \le R_2$) w postaci wzoru (9) i (10), Wajnberg, stawiając następnie warunki brzegowe (13), wyznacza stałe $\underline{A}_2$ *i* $\underline{A}_3$ (ograniczając rozwiązanie tylko do obszaru *II*). Złożona struktura tych stałych podana jest w [13] na str. 108-109. Następnie wzory te zostają uproszczone (str. 109) dla przypadków praktycznych, tzn. częstotliwości $f < 10$ MHz oraz R_1 rzędu 200 -300 mm. Ostateczna ich postać (wzory (5-5) ze str. 110 po odpowiednich przekształceniach) jest następująca:

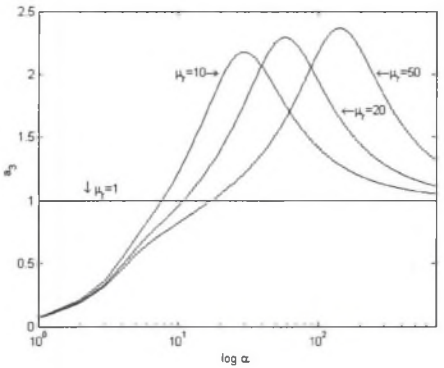
$$\underline{A}_2 = \frac{2\mu_r K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1)}{\underline{D}} \underline{H}_0, \quad \underline{A}_3 = \frac{2\mu_r I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1)}{\underline{D}} \underline{H}_0, \tag{23}$$

$$\underline{D} = I_0(\underline{\Gamma} R_2)\left[2\mu_r K_1(\underline{\Gamma} R_1) + \underline{\Gamma} R_1 K_0(\underline{\Gamma} R_1)\right] + K_0(\underline{\Gamma} R_2)\left[2\mu_r I_1(\underline{\Gamma} R_1) - \underline{\Gamma} R_1 I_0(\underline{\Gamma} R_1)\right]. \tag{23a}$$

Jeśli w powyższych wzorach podstawi się $\mu_r = 1$, to otrzyma się odpowiednio wzory (14a), (14b) i (14d), co oznacza, że rozwiązanie otrzymane przez autorów niniejszej pracy pokrywa się z rozwiązaniem otrzymanym przez Wajnberga dla dowolnych wartości $\alpha = \frac{R_2}{\delta} = k R_2 = \frac{\underline{\Gamma}}{\sqrt{2j}} R_2$. Gdy zaś μ_r jest rzędu $10^2 - 10^3$, to rozbieżność między tymi rozwiązaniami zależy silnie od wartości parametru α. Rozbieżność tę określamy stosunkami wartości bezwzględnych odpowiednich stałych otrzymanych przez autorów do stałych wyznaczonych przez Wajnberga jako funkcje (rys.11) argumentu α, tzn.

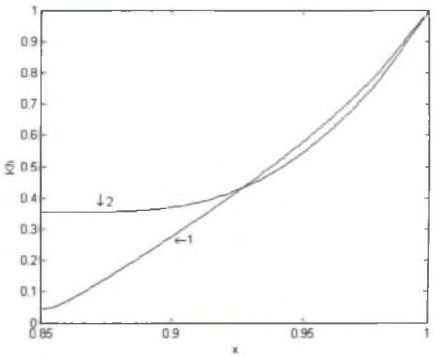
$$a_2(\alpha) = \frac{A_2^{(18a)}}{A_2^{(34)}} \text{ oraz } a_3(\alpha) = \frac{A_3^{(18b)}}{A_3^{(34a)}}. \tag{24}$$

Na podstawie obliczeń numerycznych stwierdzamy, że wartość $a_2(\alpha) \cong 1$ dla praktycznie dowolnej wartości parametru α lub/i względnej przenikalności magnetycznej μ_r. Zależność $a_3(\alpha)$ przedstawiono na rys.6.



Rys. 6. Zależność $a_3(\alpha)$ stosunku modułów stałych określających pole elektromagnetyczne od parametru α

Fig. 6. Dependence $a_3(\alpha)$ of the relation of the constant modules defining the electromagnetic field from the parameter α



Rys. 7. Rozkład modułu pola magn. we wsadzie rurowym: 1 – wg autorów, 2 – wg Wajnberga; α=12, β=0,85, μ_r =500

Fig. 7. Distribution of the magn. field module in a tubular conductor: 1 – according to the authors, 2 – according to Wajnberg ; α=12, β=0,85, μ_r =500

Rozbieżność w odniesieniu do modułów natężenia pola magnetycznego ilustruje rys.7. Największa różnica tych wartości zachodzi na powierzchni wewnętrznej wsadu rurowego i jest tym większa, im większa jest wartość $\beta = \frac{R_1}{R_2}$ (wsady cienkościenne). Dla wartości parametru $\alpha > 100$ różnica ta praktycznie zanika i wykresy te pokrywają się w całym zakresie x. Wartość parametru α jest tym większa im większa jest częstotliwość lub/i promień zewnętrzny R_2 wsadu rurowego. W praktyce nagrzewania wsadów stalowych (f < 10 MHz oraz R_2 rzędu 200 - 400 mm) wartość α jest rzędu 10^4 –10^5. Zatem z rys.7 wynika, że dla wsadów o względnie dużych wymiarach poprzecznych i przy wysokiej częstotliwości opis pola elektromagnetycznego zaproponowany w niniejszej pracy jest równoważny opisowi podanemu przez Wajnberga w [12]. Dla niższych częstotliwości (rzędu 10 – 100 kHz) lub/i mniejszych wymiarów wsadu autorzy sugerują stosowanie wzorów przez nich wyprowadzonych.

Wyprowadzone wzory dla wsadu rurowego mogą być wykorzystane także do opisu pola elektromagnetycznego w przypadku wsadu walcowego. Przyjmując mianowicie $R_2 = R$ i uwzględniając, że przy $R_1 \to 0$ funkcja $\underline{\Gamma} R_1 \to 0$, $I_0(\underline{\Gamma} R_1) \to 1$, $I_1(\underline{\Gamma} R_1) \to 0$, $K_0(\underline{\Gamma} R_1) \to \infty$, $K_1(\underline{\Gamma} R_1) \to \infty$, otrzymujemy

$$\underline{H}_z^{II}(r) = \frac{I_0(\underline{\Gamma} r)}{I_0(\underline{\Gamma} R_2)} \underline{H}_0, \tag{25}$$

co jest wzorem dla przewodzącego walca metalowego umieszczonego w równomiernym podłużnym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym – [2], s. 199, wzór (9.109) lub wzór (5), s. 104 w [3].

W podobny sposób otrzymujemy wzór na natężenie pola elektrycznego w walcu przewodzącym, a mianowicie

$$\underline{E}_{\Theta}^{II}(r) = -\frac{\underline{\Gamma}}{\gamma}\frac{I_1(\underline{\Gamma}r)}{I_0(\underline{\Gamma}R)}\underline{H}_0, \tag{26}$$

co jest wzorem (9.110) z [2], s. 199.

LITERATURA

1. Hering M.: *Podstawy elektrotermii. Część II.* WNT, Warszawa 1998.
2. Krakowski M.: *Elektrotechnika teoretyczna. Tom 2. Pole elektromagnetyczne.* Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 1995.
3. Kurbiel A., Waradzyn Z.: *A Method for Determining Electric Quantities in a Workpiece Heated by Induction.* „Electrical Power Quality and Utilisation" 2003, Vol. IX, No 1, p. 103-108.
4. Langer E.: *Teorie indukčniho a dielektrickeho tepla.* Wyd. Academia, Praha 1964.
5. Mc Lachlan N. W.: *Funkcje Bessela dla inżynierów.* PWN, Warszawa 1964.
6. Piątek Z., Baron B., Kałuża A.: *Pole elektromagnetyczne wewnątrz walca przewodzącego umieszczonego w podłużnym równomiernym polu magnetycznym o charakterze sinusoidy tłumionej.* Zesz. Nauk.. Pol. Śl. s. Elektryka z. 182, Gliwice 2002, s. 27-46.
7. Piątek Z., Baron B., Kałuża A.: *Pole elektromagnetyczne wewnątrz walca przewodzącego w procesie kształtowania impulsowym polem magnetycznym.* „Przegląd Elektrotechniczny" 2002, nr 9, s. 278-282.
8. Piątek Z, Baron B.: *Stan nieustalony pola elektromagnetycznego w walcu przewodzącym w zewnętrznym podłużnym równomiernym sinusoidalnie zmiennym polu magnetycznym.* XXV IC SPETO, Gliwice – Ustroń 2002, ss. 89-96.
9. Piątek Z, Baron B.: *Longitudinal Magnetic Field of a Character of an Attenuated Sinusoid in a Conducting Cylinder.* Moderní směry výuky elektrotechniky a elektroniky – STO-8, Brno, Czech Republic, 25.-26. září 2002, pp. 141-148.
10. Piątek Z, Baron B.: *Diffusion of Longitudinal Magnetic Field of a Character of an Attenuated Sinusoid into a Conducting Cylinder.* IV-th International Workshop „Computational Problems of Electrical Engineering" Zakopane, Poland, September 2-5, 2002, p. 117-122.
11. Sajdak Cz., Semek E.: *Nagrzewanie indukcyjne. Podstawy teoretyczne i zastosowania.* Wyd. Śląsk, Katowice 1987.
12. Turowski J.: *Elektrodynamika techniczna.* WNT, Warszawa 1993.
13. Wajnberg A.M.: *Indukcjonnyje pławilnyje pieczi.* „Energia", Moskwa 1967

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Mieczysław Hering

Wpłynęło do Redakcji dnia 2 marca 2004 r.