

Wojciech BURLIKOWSKI

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej, Zakład Mechatroniki

MODEL MATEMATYCZNY PRZETWORNIKA ELEKTROMECHANICZNEGO OPISANY PRZEZ STRUMIENIOWE ZMIENNE STANU NA PRZYKŁADZIE SILNIKA RELUKTANCYJNEGO

Streszczenie. W artykule przedstawiono model matematyczny przetwornika elektromechanicznego, wykorzystujący w opisie równań stanu zmienne strumieniowe. Założenia przyjęte przy formułowaniu modelu to pominięcie prądów wirowych oraz zjawiska histerezy. Jako przykład zastosowania zaprezentowano wyidealizowany model silnika reluktancyjnego. Analizie poddano wpływ uwzględnienia zjawiska nasycenia obwodu magnetycznego na metodykę formułowania modelu oraz na dokładność otrzymanych wyników. Przedstawiono graficzną interpretację wyznaczenia wielkości występujących w proponowanym modelu przetwornika, korzystając z danych otrzymanych na podstawie modelu wyidealizowanego.

MATHEMATICAL MODEL OF AN ELECTROMECHANICAL ACTUATOR USING FLUX STATE VARIABLES APPLIED TO RELUCTANCE MOTOR

Summary. In the paper mathematical model of an electromechanical actuator using flux state space variables is described. In model formulation eddy currents and hysteresis phenomenon were neglected. As an example of application an idealised model of reluctance motor is presented. Analysis is focused on determination of saturation phenomenon influence on model formulation methodology and on correctness of obtained results. Graphical interpretation of evaluation of quantities occurring in proposed model of an actuator, using data obtained from an idealised model, is presented.

1. WSTĘP

Pojawienie się nowych konstrukcji przetworników elektromechanicznych oraz dążenie do optymalizacji ich parametrów użytkowych (np. sprawność) oraz dynamicznych (np. eliminacja pulsacji momentu elektromagnetycznego) wymaga wykorzystania nowych modeli matematycznych przetworników w procesie projektowania, symulacji i sterowania [2,3,4,5,6,7,8]. Pozwalają one uwzględnić szereg zjawisk fizycznych (nasycenie, uźłobkowanie, drgania) poprzez pośrednie [6,7] lub bezpośrednie [3,4] wykorzystanie metod połowych. Modele stosowane dotychczas wymagały wprowadzenia szeregu założeń upraszczających [1].

W artykule przedstawiono model matematyczny przetwornika elektromechanicznego, umożliwiającą zastosowanie sprzężenia pośredniego z metodami polowymi. Dotychczas w literaturze zastosowanie tego typu modeli ograniczano do przypadku jednej zmiennej stanu związanej z obwodem elektrycznym (zmienna „elektryczna” – prąd [6] lub strumień [7]). W artykule przedstawiono możliwość zastosowania podobnej procedury dla dwóch „elektrycznych” zmiennych stanu. W modelu matematycznym jako zmienne stanu przyjęto strumienie magnetyczne tworząc tzw. model strumieniowy przetwornika. Wynikało to z możliwej niestabilności modelu prądowego w przypadku obciążenia nieliniowego [10]. Jest to związane z postacią macierzy stanu, która dla modelu strumieniowego jest stała (12), natomiast w przypadku modelu prądowego jest funkcją punktu pracy, a jej wyznaczenie wymaga zastosowania różniczkowania numerycznego (13),(14). W układach elektromechanicznych sytuacja taka występuje dla nieliniowego charakteru obciążenia prądnicą (np. przez układ prostownikowy) lub nieliniowej charakterystyki obciążenia silnika [8].

Założenia przyjęte przy formułowaniu modelu to pominięcie prądów wirowych oraz zjawiska histerezy.

Obliczenia sprawdzające wykonano dla wyidealizowanego modelu silnika reluktancyjnego (m.in. o założonym sinusoidalnym rozkładzie uzwojeń stojana, [1]) dla dwóch przykładowych charakterystyk magnesowania obwodu magnetycznego: liniowej i nasycającej się (odcinkowo-liniowej). Pozwoliło to na weryfikację proponowanego modelu przez porównanie otrzymanych wyników z rezultatami dla klasycznego modelu matematycznego silnika sformułowanego w układzie współrzędnych wimika, zwanego w artykule modelem dq silnika [1].

2. ALGORYTM MODELOWANIA

Sformułowanie zaproponowanego modelu matematycznego przetwornika elektromechanicznego obejmuje następujące etapy:

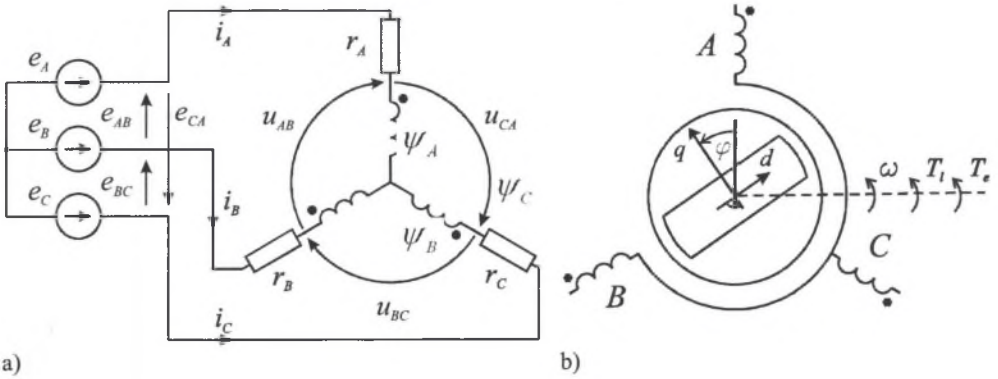
- a) utworzenie symulacyjnego modelu przetwornika elektromechanicznego
 - analitycznego [1] lub
 - polowego [3,6,7].

Odpowiadający mu schemat obwodowy z oznaczeniem napięć, prądów i strumieni oraz uproszczony przekrój poprzeczny dla silnika reluktancyjnego przedstawiono na rys.1,

- b) określenie sposobu dyskretyzacji:

- zbioru prądów $I = \{i_1, \dots, i_{N(I)}\}$ na $N(I)$ punktów, definiującego zbiory $I_A = I_B = I$ dla prądów fazowych i_A, i_B ,
- zbioru położeń $\Theta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ na M punktów.

Definiują one trójwymiarową bazę danych modelu \mathcal{RI} (podprzestrzeń prądów) zawierającą $N_{\mathcal{RI}} = N(I)N(I)M$ punktów (i_A, i_B, φ) , stanowiącą iloczyn kartezyjański $\mathcal{RI} = I_A \times I_B \times \Theta$, gdzie $i_A \in I_A$, $i_B \in I_B$, $\varphi \in \Theta$,



Rys. 1. Schemat zastępczy (a) i uproszczony przekrój poprzeczny (b) silnika reluktancyjnego
 Fig. 1. Equivalent circuit (a) and simplified cross-section of a reluctance motor (b)

c) obliczenie wartości strumieni sprzężonych oraz momentu elektromagnetycznego T_e metodą:

- analityczną ($[\psi] = [L_s(\varphi)][i]$ lub z wykorzystaniem transformacji do układu dq – rys.3), gdzie: $[L_s(\varphi)]$ - macierz indukcyjności stojana zdefiniowana w równaniu (15), $[\psi] = [\psi_A \ \psi_B \ \psi_C]^T$, $[i] = [i_A \ i_B \ i_C]^T$ [1],

- połową lub pomiarową [5,7]

dla wszystkich N_{WT} punktów bazy danych,

d) sformułowanie układu równań stanu:

$$\frac{d\psi_A}{dt} - \frac{d\psi_B}{dt} = \frac{d(\psi_A - \psi_B)}{dt} = \frac{d\psi_{AB}}{dt} = u_{AB} = e_{AB} - r_A i_A + r_B i_B, \quad (1)$$

$$\frac{d\psi_B}{dt} - \frac{d\psi_C}{dt} = \frac{d(\psi_B - \psi_C)}{dt} = \frac{d\psi_{BC}}{dt} = u_{BC} = e_{BC} - r_B i_B + r_C i_C, \quad (2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(T_l + T_e(i_A, i_B, \varphi) - D\omega), \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad (4)$$

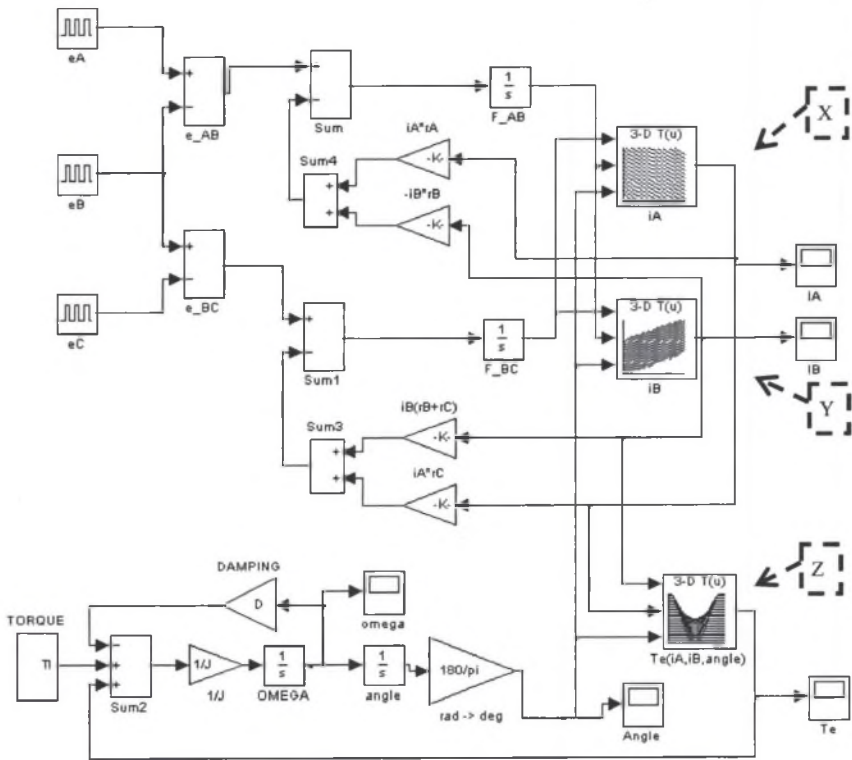
przy uwzględnieniu równania więzów:

$$i_A + i_B + i_C = 0 \Rightarrow i_C = -(i_A + i_B), \quad (5)$$

gdzie: e_j - napięcie zasilania, r_j - rezystancja cewki ($j=A,B,C$), J - moment bezwładności układu (wimnik+obciążenie), φ - kąt położenia osi q wirnika względem osi fazy A , ω - prędkość kątowna wirnika, D - współczynnik tłumienia, T_l - moment obciążenia, $T_e(i_A, i_B, \varphi)$ - moment elektromagnetyczny,

- e) wybór „elektrycznych” zmiennych stanu – wybrano strumienie ψ_{AB}, ψ_{BC} , będące kombinacjami liniowymi strumieni fazowych,
- f) utworzenie wtórnej bazy danych $\mathcal{R}\Psi = \Psi_{AB} \times \Psi_{BC} \times \mathcal{O}$, (podprzestrzeń strumieni) zawierającej $N_{\mathcal{R}\Psi} = N(\Psi)N(\Psi)M$ punktów ($\psi_{AB}, \psi_{BC}, \varphi$), opartej na zbiorze strumieni $\Psi = \Psi_{AB} = \Psi_{BC} = \{\psi_1, \dots, \psi_{N(\Psi)}\}$ złożonym z $N(\Psi)$ punktów,
- g) wyznaczenie wielkości wtórnych pojawiających się w modelu zmiennych stanu (m.in. tablica X definiująca $i_A(\psi_{AB}, \psi_{BC}, \varphi)$ na rys.2).

Implementację modelu w programie Matlab\SIMULINK przedstawiono na rys.2 [9]. W celu odwzorowania wielkości macierzowych pojawiających się w modelu (i_A, i_B, T_e) wykorzystano tablice 3-wymiarowe (Look-up table 3-D), które pozwalają na dokonanie interpolacji i ekstrapolacji poszukiwanych wielkości w trakcie realizacji algorytmu całkowania numerycznego równań stanu [9].



Rys. 2. Realizacja modelu silnika w programie Matlab\Simulink
Fig. 2. Implementation of the model in Matlab\SIMULINK environment

3. UTWORZENIE BAZY DANYCH DLA MODELU SYMULACYJNEGO Z WYKORZYSTANIEM WYIDEALIZOWANEGO MODELU SILNIKA

Przyjmując liczne założenia upraszczające [1] układ równań stanu silnika można przedstawić w układzie współrzędnych dq wykorzystując odpowiednią transformację. Ze względu na sposób połączenia uzwojeń stojana nie występuje w nich składowa zerowa prądów

(rys.1). Równania sformułowane przy założeniu, iż nasycenie obwodu magnetycznego silnika występuje jedynie w osi d (rys.6), przyjmują następującą postać [1]:

$$e_q = r_s i_q + \omega_r \psi_d(i_d) + \frac{d\psi_q}{dt}, \tag{6}$$

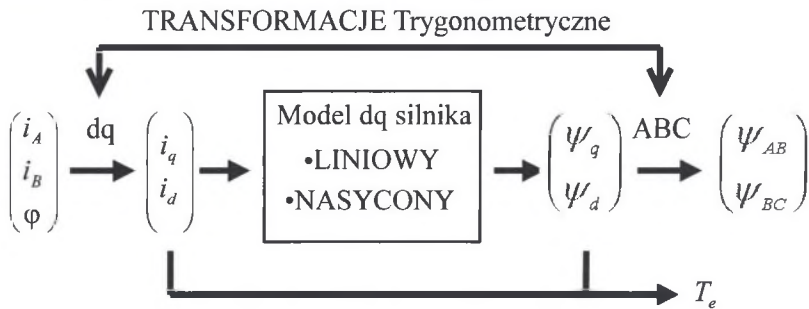
$$e_d = r_s i_d - \omega_r \psi_q + \frac{d\psi_d(i_d)}{dt} \frac{di_d}{dt}, \tag{7}$$

$$T_e = p(i_q \psi_d - i_d \psi_q), \tag{8}$$

$$\psi_d = \psi_d(i_d), \quad \psi_q = (L_{ls} + L_{mq}) i_q, \tag{9,0}$$

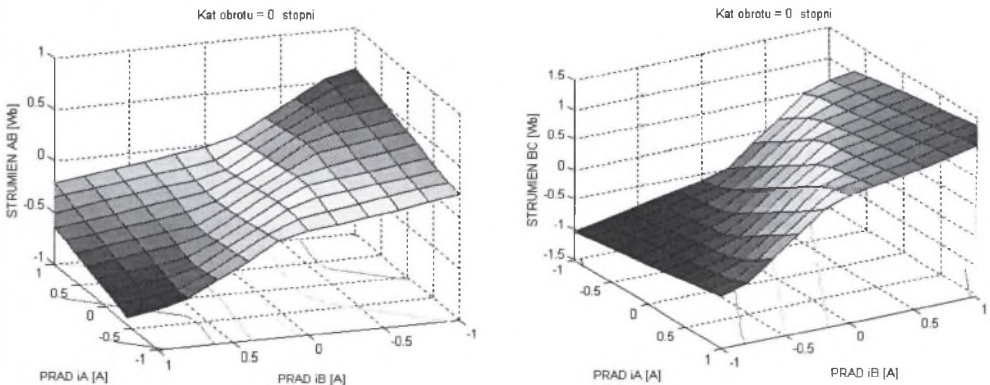
gdzie: $e_d, e_q, i_d, i_q, \psi_d, \psi_q$ – napięcia/prądy/strumienie silnika w układzie współrzędnychdq, $r_s = r_A = r_B = r_C$ – rezystancja cewki stojana, L_{ls} – indukcyjność rozproszenia stojana, L_{md}, L_{mq} – indukcyjność magnesująca w osi d,q, p – liczba par biegunów silnika, $\omega_r = p\omega$.

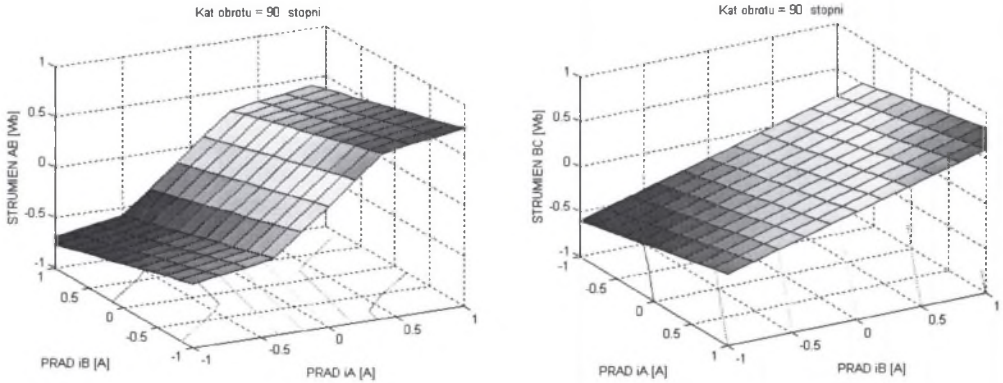
Wykorzystanie modelu dq silnika umożliwiło budowę bazy danych dla proponowanego modelu, obejmującej wszystkie występujące w nim wielkości (rys.2), na podstawie algorytmu przedstawionego na rys.3. Uwzględnione w nim TRANSFORMACJE Trygonometryczne dotyczą transformacji „do i z” układu współrzędnych dq [1].



Rys. 3. Metodyka wyznaczenia wielkości w modelu dq silnika
 Fig. 3. Determination methodology of quantities in dq motor model

Przykładowe charakterystyki strumieniowo-prądowe silnika otrzymane z wykorzystaniem powyższej metodyki przedstawiono na rys.4.

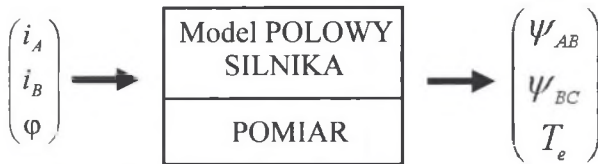




Rys. 4. Strumienie $\psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)$, $\psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)$ dla przypadku odcinkowo-liniowej charakterystyki magnesowania dla kątów $\varphi=0^\circ$, $\varphi=90^\circ$

Fig. 4. Fluxes $\psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)$, $\psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)$ in case of piece-wise linear magnetisation characteristic for angles $\varphi=0^\circ$, $\varphi=90^\circ$

Przedstawiona metodyka nie ogranicza zastosowania proponowanego modelu jedynie do przypadku wyidealizowanego. Wyznaczenie poszczególnych wielkości występujących w modelu może bowiem zostać przeprowadzone również z wykorzystaniem metod połowych lub pomiarów, co prowadziłoby do procedury symbolicznie przedstawionej na rys.5.



Rys. 5. Metodyka wyznaczenia strumieni magnetycznych i momentu elektromagnetycznego

Fig. 5. General methodology of determination of magnetic fluxes and electromagnetic torque

4. WYNIKI SYMULACJI

Badania symulacyjne przedstawionego modelu miały na celu ocenę poprawności otrzymanych na jego podstawie wyników. Dodatkowo analizie poddano wpływ parametrów określających rozmiary bazy danych modelu i metodę jej wykorzystania w procesie rozwiązywania równań stanu na otrzymane wyniki (rys.7).

W trakcie symulacji zmianie poddawano następujące parametry:

a) dyskretyzację zmiennych prądowych I przy zachowaniu niezmiennego zbioru położeń $\Theta = \{0^\circ, 10^\circ \dots 90^\circ\}$, $M = 10$,

(1) - $I = \{-1, -0.8 \dots 1\}$ A ; $N(I) = 11$, $N_{\mathcal{M}} = 1210$,

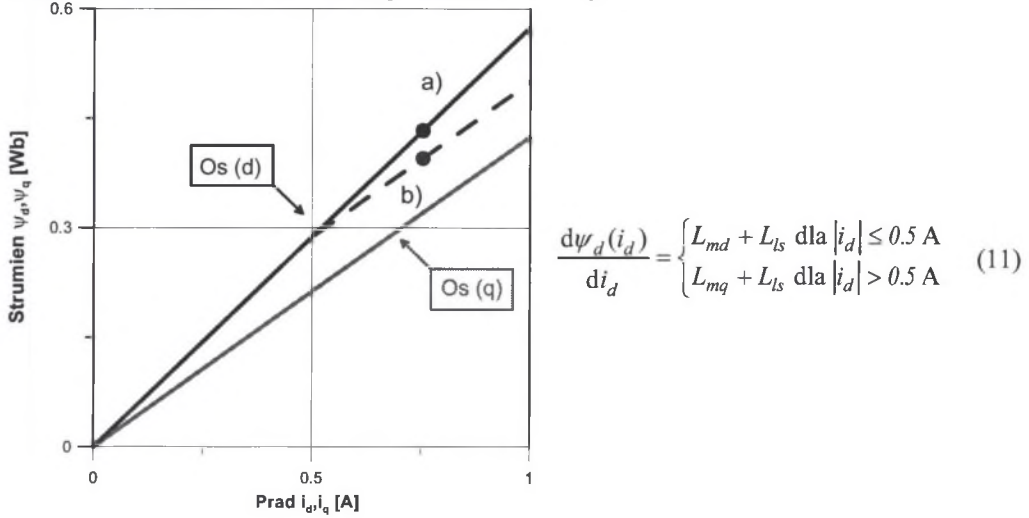
(2) - $I = \{-1, -0.9 \dots 1\}$ A ; $N(I) = 21$, $N_{\mathcal{M}} = 4410$

Utworzenie bazy danych w przypadku wykorzystania modelu połowego (rys.5) wymagałoby $N_{\mathcal{M}}$ symulacji;

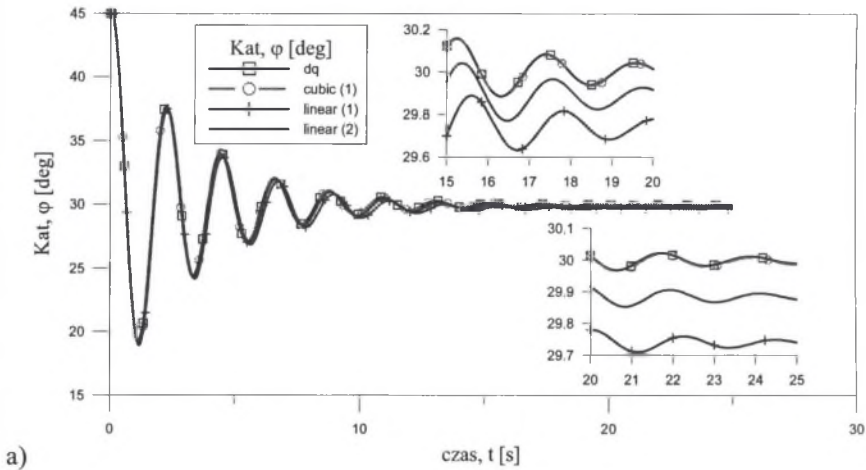
b) sposób interpolacji i ekstrapolacji danych w tablicach X, Y, Z (*cubic spline / linear*).

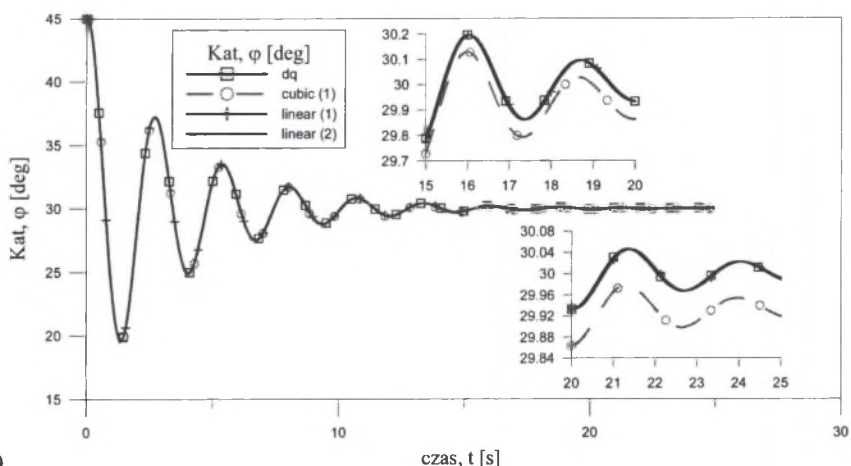
Dla uproszczenia rozważań przyjęto, iż $N(I) = N(\Psi)$ oraz założono równomierny rozkład danych w zbiorach $I/\Psi/\Theta$. Jako dokładne przyjęto wyniki dla wyjściowego modelu dq silnika (rys.7). Symulacje wykonano przy następujących parametrach wymuszenia: $e_A = e_C = 0$ V,

$e_B(t>0)=12\text{ V}$ i warunkach początkowych: $\varphi(t=0)=45^\circ$, $\omega(t=0)=0\text{ rad/s}$, $i_A(t=0)=i_B(t=0)=i_C(t=0)=0\text{ A}$. Parametry modelu silnika: $L_{ls}=0.05\text{ H}$, $L_{md}=0.525\text{ H}$, $L_{mq}=0.375\text{ H}$, $r_s=13\ \Omega$, $J=0.01\text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $D=0.005\text{ N}\cdot\text{m s/rad}$, $T_l=0\text{ N}\cdot\text{m}$ [4]. Wyjątek stanowią wyniki przedstawione na rys.4,9,10, gdzie w celu uwydatnienia występujących różnic charakterystyk przyjęto $L_{md}=0.75\text{ H}$, $L_{mq}=0.15\text{ H}$. Położenie równowagi wirnika to $\varphi(t=\infty)=30^\circ$. Charakterystyki magnesowania silnika w osiach d,q przedstawiono na rys.6.



Rys. 6. Charakterystyki magnesowania silnika w osi d i q dla przypadku liniowego (a) i nasyconego (b) obwodu magnetycznego. Punkty (●) odpowiadają stanowi ustalonemu dla obu przypadków
 Fig. 6. Magnetisation characteristic of the motor in d,q axes in linear (a) and saturated (b) case.
 Points (●) represent steady-state conditions in both cases





b)

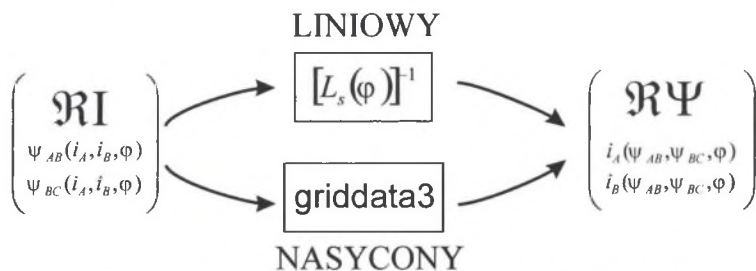
Rys. 7. Kąt położenia wirnika w funkcji czasu dla różnych wielkości bazy danych (1),(2) i metod aproksymacji (cubic, linear) dla liniowej (a) i nieliniowej (b) charakterystyki magnesowania
 Fig. 7. Rotor angle vs. time for different sizes of the database (1),(2) and different interpolation methods (linear, cubic) in case of linear (a) and saturated (b) magnetic circuit

5. ANALIZA WYNIKÓW

Otrzymane wyniki symulacji dowodzą poprawności proponowanego modelu zarówno dla przypadku liniowej, jak i nieliniowej charakterystyki magnesowania obwodu magnetycznego. Zaobserwowane błędy (tzn. różnice w stosunku do modelu dq) są bardzo niewielkie (mieszczą się w zakresie 0.1°) i są pomijalne w zastosowaniach praktycznych. Porównanie wyników dla obu rozważanych przypadków charakterystyki magnesowania wskazuje jednak na pewne istotne różnice.

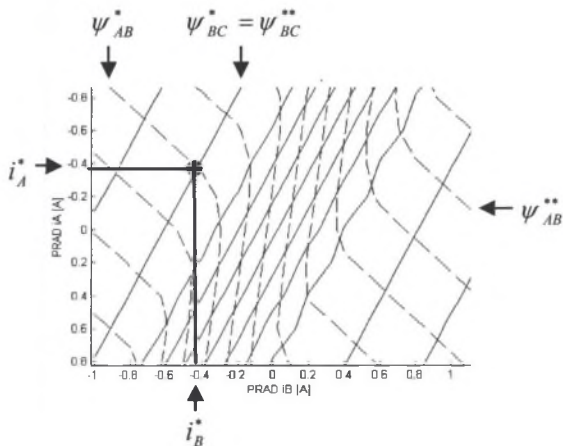
Dla liniowej charakterystyki magnesowania zmiana metody interpolacji parametrów w trakcie procesu numerycznego całkowania równań stanu z *linear* na *cubic* daje widoczną poprawę wyników przy zachowaniu stosunkowo rzadkiej bazy danych (1). Zagęszczenie bazy danych (2) z interpolacją typu *linear* również poprawia dokładność jednak w mniejszym stopniu. Wynik ten pozwalał sądzić, iż wykorzystanie interpolacji *cubic* pozwoli na znaczną oszczędność czasu przy tworzeniu bazy danych z użyciem metody polowej jak i pamięci w układzie sterowania wykorzystującym przedstawiony model [6].

Rezultaty otrzymane dla nieliniowej charakterystyki magnesowania nie potwierdziły tych wyników. W tym przypadku interpolacja typu *linear* dała lepsze wyniki. Brak wpływu wielkości bazy danych wynikał prawdopodobnie z przyjęcia bardzo uproszczonej odcinkowo-liniowej charakterystyki magnesowania. Pogorszenie wyników w przypadku interpolacji typu *cubic* wiązało się z pojawieniem się w bazach danych pól nieokreślonych (NaN – Not a Number), co nie miało miejsca w przypadku obliczeń dla liniowej charakterystyki magnesowania.



Rys. 8. Transformacja baz danych z podprzestrzeni prądów w podprzestrzeni strumieni
 Fig. 8. Tranformation of databases from current subspace to flux subspace

Istotne znaczenia miała metodyka wyznaczenia wielkości wtórnych pojawiających się w proponowanym modelu, przedstawiona na rys.8. W przypadku analizy liniowego obwodu magnetycznego wykorzystano możliwość odwrócenia macierzy indukcyjności. W przypadku nieliniowym posłużono się standardową procedurą „griddata3” [9,11]. Algorytm zaimplementowany we wspomnianej procedurze wykorzystuje triangulację Delaunay [11]. Jego uproszczona interpretacja geometryczna została przedstawiona na rys.9. Polega ona na znalezieniu punktów przecięcia izolinii strumienia ψ_{AB} o wartościach ψ_{AB}^* , ψ_{AB}^{**} z izolinią strumienia ψ_{BC} o wartości $\psi_{BC}^* = \psi_{BC}^{**}$. Wynikiem są współrzędne punktu (i_A^*, i_B^*) . Punkt (i_A^{**}, i_B^{**}) , określony przez przecięcie izolinii ψ_{AB}^{**} , ψ_{BC}^{**} , nie znajduje się w obszarze dopuszczalnym, określonym przez wyjściową bazę danych \mathcal{RI} (podprzestrzeń prądów). Wówczas w bazie danych pojawia się pole nieokreślone NaN (rys.9).



Postać komórek wtórnych baz danych:

$$\begin{aligned}
 i_A(\psi_{AB}^*, \psi_{BC}^*, \varphi = 0) &= i_A^* \\
 i_B(\psi_{AB}^*, \psi_{BC}^*, \varphi = 0) &= i_B^* \\
 i_A(\psi_{AB}^{**}, \psi_{BC}^{**}, \varphi = 0) &= NaN \\
 i_B(\psi_{AB}^{**}, \psi_{BC}^{**}, \varphi = 0) &= NaN
 \end{aligned}$$

Rys. 9. Graficzna interpretacja wyznaczenia wtórnych baz danych ($\varphi=0^\circ$).

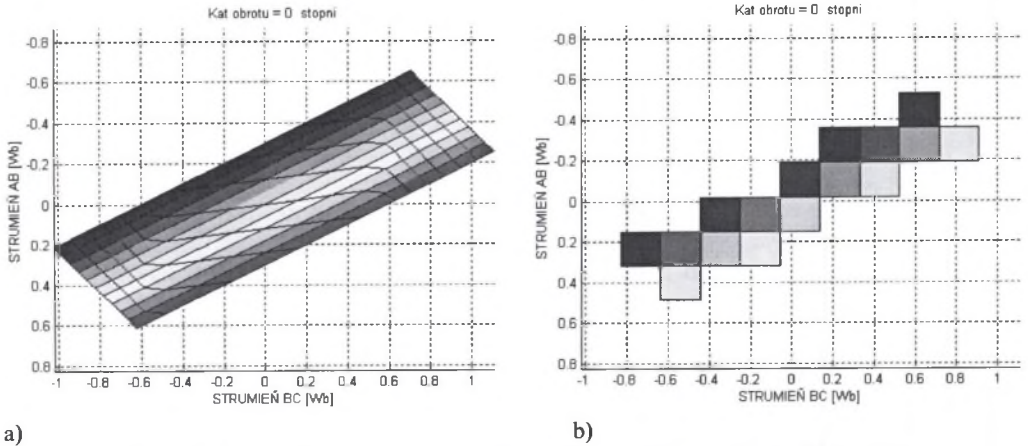
Izolynie: ψ_{AB} – linie przerywane, ψ_{BC} – linie ciągłe

Fig. 9. Graphical interpretation of evaluation of secondary databases ($\varphi=0^\circ$).

Isolines: ψ_{AB} – dashed lines, ψ_{BC} – continuous lines

Jest to szczególnie dobrze widoczne na rys.10, który przedstawia obszar dopuszczalny strumieni, związany z ograniczonością podprzestrzeni prądów \mathcal{RI} , na tle całej podprzestrzeni strumieni \mathcal{RP} dla kąta $\varphi=0^\circ$. Pozostała część komórek baz danych (rys.10b) miała przypisaną

wartość nieokreśloną NaN. Wielkość obszaru wynikała z przyjęcia zbioru strumieni $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_{N(\Psi)}\}$, dla którego wartości skrajne stanowiły wartości ekstremalnych strumieni $\psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)$, $\psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)$ jako: $\psi_1 = \text{Min}\{\text{Min}[\psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)], \text{Min}[\psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)]\}$, $\psi_{N(\Psi)} = \text{Max}\{\text{Max}[\psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)], \text{Max}[\psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)]\}$.



Rys. 10. Obszar dopuszczalny strumieni: wyjściowy (a) i wynikowy (b) ($\varphi=0^\circ$)
Fig. 10. Allowable flux region: initial (a) and final (b) ($\varphi=0^\circ$)

6. WNIOSKI

Proponowany model matematyczny przetwornika elektromechanicznego może być zaimplementowany w formie bloku bibliotecznego w programie Matlab/SIMULINK (lub jego odpowiedniku). Sposób jego sformułowania pozwala na jego zastosowanie m.in. w modelowaniu reluktancyjnych silników przełączalnych o uzwojeniach skupionych (SRM) i rozłożonych (MCSRМ, [3]) oraz maszyn z magnesami trwałymi [2,3,5]. Ponadto może być również użyty w roli obserwatora zmiennych stanu w układzie sterowania [6].

Przedstawione wyniki pozwalają na określenie następujących problemów wymagających dalszej analizy:

- sposobu dyskretyzacji bazy danych (równomierna/nierównomierna) dla realistycznych warunków nasycenia, co może mieć szczególnie duże znaczenie w przypadku przetworników o znacznym stopniu nasycenia, dla których zbiór strumieni powinien być znacznie zagęszczony w obszarze wzrostu nasycenia,
- metodyki interpolacji parametrów w tak utworzonych bazach danych,
- metod pomiarowej identyfikacji charakterystyk wykorzystywanych w modelu,
- zastosowania modelu w praktycznym układzie sterowania w celu porównanie czasów symulacji z innym modelem, np. dq.

Najbardziej obiecującą metodą pozwalającą na rozwiązanie problemów związanych z bazami danych w przedstawionym modelu wydaje się metoda Sekwencyjnej Interpolacji Liniowej (SLI - Sequential Linear Interpolation), wykorzystywana w przypadku analizy silnie nieliniowych funkcji wielowymiarowych (m.in. w kalibracji drukarek kolorowych) [13].

Wielkości macierzowe i równania stanu

- Równanie stanu dla modelu strumieniowego

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\psi_{AB}}{dt} \\ \frac{d\psi_{BC}}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{AB} \\ e_{BC} \\ T_l \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_e(i_A, i_B, \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_A & r_B & 0 & 0 \\ -r_C & -(r_B+r_C) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A(\psi_{AB}, \psi_{BC}, \varphi) \\ i_B(\psi_{AB}, \psi_{BC}, \varphi) \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (12)$$

- Równanie stanu dla modelu prądowego

$$[M(i_A, i_B, \varphi)] \begin{bmatrix} \frac{di_A}{dt} \\ \frac{di_B}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{AB} \\ e_{BC} \\ T_l \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_e(i_A, i_B, \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_A & r_B & 0 & 0 \\ -r_C & -(r_B+r_C) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (13)$$

- Jakobian dla modelu prądowego [10]

$$[M(i_A, i_B, \varphi)] = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)}{\partial i_A} \right|_{\substack{i_B=const \\ \varphi=const}} & \left. \frac{\partial \psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)}{\partial i_B} \right|_{\substack{i_A=const \\ \varphi=const}} & 0 & \left. \frac{\partial \psi_{AB}(i_A, i_B, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\substack{i_A=const \\ i_B=const}} \\ \left. \frac{\partial \psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)}{\partial i_A} \right|_{\substack{i_B=const \\ \varphi=const}} & \left. \frac{\partial \psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)}{\partial i_B} \right|_{\substack{i_A=const \\ \varphi=const}} & 0 & \left. \frac{\partial \psi_{BC}(i_A, i_B, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\substack{i_A=const \\ i_B=const}} \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

- Macierz indukcyjności stojana

$$[L_s(\varphi)] = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_A & -0,5L_A & -0,5L_A \\ -0,5L_A & L_{ls} + L_A & -0,5L_A \\ -0,5L_A & -0,5L_A & L_{ls} + L_A \end{bmatrix} - L_B \begin{bmatrix} \cos 2p\varphi & \cos 2(p\varphi - \pi/3) & \cos 2(p\varphi + \pi/3) \\ \cos 2(p\varphi - \pi/3) & \cos 2(p\varphi - 2\pi/3) & \cos 2(p\varphi + \pi) \\ \cos 2(p\varphi + \pi/3) & \cos 2(p\varphi + \pi) & \cos 2(p\varphi + 2\pi/3) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie: L_A - wartość średnia indukcyjności fazowej,
 L_B - amplituda zmian indukcyjności fazowej,
 $L_{md} = 1,5 (L_A + L_B)$, $L_{mq} = 1,5 (L_A - L_B)$.

LITERATURA

1. Krause P.: *Analysis of Electric Machinery* McGraw-Hill, 1986.
2. Daikoku A., Yamaguchi S.: *Design of Tooth-wound Permanent Magnet Synchronous Motors for Reducing Torque Ripples*, (*).
3. Hu Y., Torrey D.A.: *Study of the mutually coupled switched reluctance machine using the finite element-circuit coupled method*, IEE Proceedings – Electric Power Applications, Vol.149, No.2, March 2002.
4. Schlensok Ch., Henneberger G.: *Simulation of a PMSM with SIMPLORER-FLUX2D-Coupling*, (*).

5. Łukaniszyn M., Jagieła M., Wróbel R.: *Influence of Magnetic Circuit Modifications on the Torque of a Disc Motor with Co-axial Flux in the Stator*, (*).
6. Schmid J., Kaiserseder M., Amrhein W., Schumacher A., G.Knecht, *Model based Open Loop Observer for the Phase Current of Switched Reluctance Motors*, (*).
7. Risse S., Henneberger G.: *Design and Optimization of a Switched Reluctance Motors for Electric Vehicle Propulsion*, Proc. of XIVth ICEM'2000, Espoo Finland, August 2000.
8. Dudzikowski I., Pawlaczyk L. *Analiza pracy układu napędowego z nieliniowym obciążeniem*, Zeszyty Problemowe Maszyny Elektrycznych, Nr 66, str.119-124, Wyd. BOBRME Komel 2003.
9. Matlab on-line Manual, Release 12.
10. Chua L.O., Lin P.M.: *Komputerowa Analiza Układów Elektronicznych – algorytmy i metody obliczeniowe*. WNT, Warszawa 1981.
11. <http://www.thesa.com/software/qhull/>
12. Burlikowski W.: *Model matematyczny silnika reluktancyjnego pozwalający na pośrednie sprzężenie metody zmiennych stanu i metod polowych*. Przegląd Elektrotechniczny 12'2003.
13. Chang J.Z., Allenbach J.P., Bouman Ch.A. *Sequential Linear Interpolation of Multidimensional Functions*, IEEE Trans. on Image Processing, Vol.6, No.9, September 1997.

(*) CD-ROM Proc. of XVth ICEM'2002, Brugge - Belgium, August 2002

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Marian Łukaniszyn

Wpłynęło do Redakcji dnia 24 maja 2004 r.

Abstract

Introduction of new designs of electromechanical actuators and optimisation of their parameters both for steady-state (e.g. efficiency, weight) and transient operation (e.g. reduction of ripple/cogging torque) creates a necessity for new mathematical models of actuators to be implemented in their design, simulation and control [3,4,5]. In the paper mathematical model of an electromechanical actuator using flux state space variables is described. In model formulation eddy currents and hysteresis phenomenon were neglected. Exemplary results were obtained for idealised model of reluctance motor. It enabled to verify the structure of the proposed model by comparing obtained results with results obtained using classical mathematical model of the motor formulated in rotor reference frame (dq) [1]. Analysis is focused on determination of saturation phenomenon influence on model formulation methodology and on correctness of obtained results. In-depth graphical interpretation of evaluation of quantities occurring in proposed model of an actuator is presented. Implementation of the model in Matlab\SIMULINK environment is presented in (Fig.2). Various interpolation/extrapolation method (*cubic/linear*) of the data during integration of the state-space equations are compared for different sizes of databases (Fig.7). Proposed model can be implemented as a library block in Matlab\SIMULINK. The same modelling procedure can be applied in case of Switched Reluctance Motors (SRM, MCSRМ [3]), and Permanent Magnet motors (PM) [2,3,6,7]. Additionally proposed model can be employed as state observer in a control scheme [6]. Most important problem which needs further investigation is determination of database discretisation and interpolation. The most promising algorithm seems to be the SLI (Sequential Linear Interpolation) [13].

Artykuł finansowany częściowo z grantu KBN nr 4T10A 002 24