

Damian KRAWCZYK

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej, Zakład Mechatroniki

## **ANALIZA FUNKCJI GRUBOŚCI SZCZELINY POWIETRZNEJ I JEJ ODWROTNOŚCI PRZY PEŁNYM I NIEPEŁNYM DWUSTRONNYM UŻŁÓBKOWANIU OBWODU MAGNETYCZNEGO MASZYNY ELEKTRYCZNEJ**

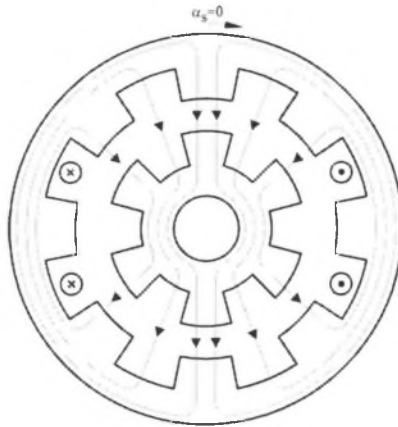
**Streszczenie.** Dokonano analizy funkcji grubości szczeliny powietrznej i jej odwrotności dla przypadków dwustronnego pełnego i niepełnego użłobkowania obwodu magnetycznego. Przeprowadzono analizę harmoniczną obu funkcji oraz wskazano możliwości ich dalszego wykorzystania.

## **ANALYSIS OF THE AIR-GAP LENGTH FUNCTION AND ITS RECIPROCAL FOR AN ELECTRIC MACHINE HAVING DOUBLE FULL AND NON FULL SLOTTING OF THE MAGNETIC CIRCUIT**

**Summary.** An analysis of the air-gap length function of an electric machine having doubly slotted magnetic circuit and its reciprocal is presented. Results of the harmonic analysis of both functions are presented. The full and not full slotting of the magnetic circuit cases are considered. Applications of the presented air-gap length reciprocal function are proposed.

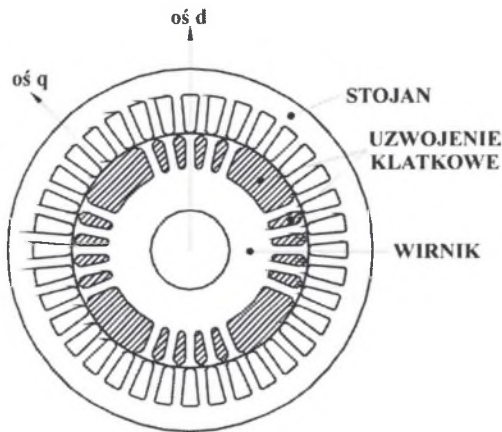
### **1. WPROWADZENIE**

Na właściwości maszyn elektrycznych decydujący wpływ ma rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, który jest uwarunkowany sposobem wykonania uzwojeń oraz kształtem obwodu magnetycznego. Duża grupa maszyn elektrycznych ma obwód magnetyczny, charakteryzujący się dwustronnym użłobkowaniem powierzchni przyszczelinowych stojana i wirnika, jak przykładowo przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Dwustronnie uźłobkowana struktura obwodu magnetycznego maszyny elektrycznej  
Fig. 1. A doubly slotted structure of the magnetic circuit of an electric machine

Dwustronne uźłobkowanie obwodu magnetycznego jest przyczyną odkształcenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej i może być źródłem generowania momentów reluktancyjnych [1]. W pewnych typach silników elektrycznych (np. silnikach indukcyjnych klatkowych i silnikach pierścieniowych) momenty reluktancyjne mają charakter momentów niepożądanych, natomiast w silnikach reluktancyjnych momenty te mogą być momentami użytecznymi. Przykładem silnika, w którym moment reluktancyjny pełni rolę użyteczną, jest silnik asynchroniczny synchronizowany momentem reluktancyjnym (ASMR), którego budowa jest przedstawiona na rys. 2 [6,7].



Rys. 2. Silnik asynchroniczny synchronizowany momentem reluktancyjnym  
Fig. 2. The asynchronous motor synchronised by reluctance torque

Obwód magnetyczny wirnika takiego silnika charakteryzuje się obecnością dużych oraz małych zębów (uźłobkowanie niepełne). Po przyjęciu pewnych założeń upraszczających (liniowość obwodu magnetycznego, uwzględnienie tylko składowej promieniowej pola

magnetycznego) rozkład natężenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej można opisać następująco [4]:

$$H(\alpha_s, \vartheta) = \frac{\Theta(\alpha_s)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} + H(0, \vartheta) \frac{\delta(0, \vartheta)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)}, \quad (1)$$

gdzie:  $\alpha_s$  - współrzędna kątowna wzdłuż rozwiniętego obwodu maszyny,

$\vartheta$  - kąt położenia wirnika względem stojana,

$\Theta(\alpha_s)$  - rozkład przepływu wzdłuż obwodu maszyny,

$\delta(\alpha_s, \vartheta)$  - rozkład grubości szczeliny powietrznej wzdłuż obwodu maszyny,

$\delta(0, \vartheta)$  - grubość szczeliny powietrznej dla  $\alpha_s=0$ ,

$H(0, \vartheta)$  - natężenie pola magnetycznego dla  $\alpha_s=0$ .

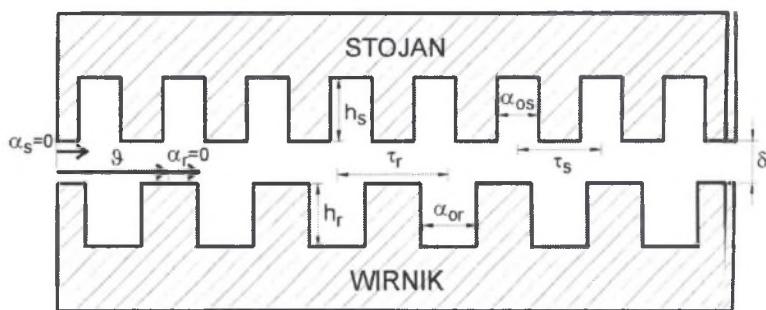
Wartość  $H(0, \vartheta)$  można wyznaczyć z warunku bezźródłowości pola magnetycznego [3,4].

Z zależności (1) wynika zatem konieczność znajomości funkcji przepływu  $\Theta(\alpha_s)$  oraz funkcji grubości szczeliny powietrznej  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$ . Funkcje rozkładu przepływu  $\Theta(\alpha_s)$  dla różnych typów uzwojeń są znane [5]. Dalej przedstawiona zostanie analiza funkcji  $\delta(\alpha_s, \vartheta)$  oraz jej odwrotności w odniesieniu do maszyn elektrycznych posiadających pełne dwustronne uźłobkowanie obwodu magnetycznego (rys. 1) oraz niepełne dwustronne uźłobkowanie (rys. 2).

## 2. FUNKCJA ZASTĘPCZEJ GRUBOŚCI SZCELINY POWIETRZNEJ

### 2.1. Uźłobkowanie pełne

Rozpatrzony zostanie obwód magnetyczny przedstawiony na rys. 3, posiadający pełne dwustronne uźłobkowanie i łożki prostokątne bez skosu.



Rys. 3. Struktura obwodu magnetycznego o dwustronnym, pełnym uźłobkowaniu  
 Fig. 3. The structure of a magnetic circuit having full double slotting

Wypadkową grubość szczeliny powietrznej dla takiego obwodu magnetycznego można opisać następującą funkcją:

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = \delta + \delta_s(\alpha_s) + \delta_r(\alpha_s, \vartheta), \quad (2)$$

gdzie  $\delta$  - minimalna grubość szczeliny powietrznej.

Funkcje  $\delta_s(\alpha_s)$  i  $\delta_r(\alpha_s, \vartheta)$  występujące w zależności (2) można z kolei wyrazić następująco:

$$\delta_s(\alpha_s) = h_s \delta_{su}(\alpha_s), \quad (3)$$

$$\delta_r(\alpha_s, \vartheta) = h_r \delta_{ru}(\alpha_s, \vartheta), \quad (4)$$

gdzie:  $h_s$  - głębokość żłobków stojana,

$h_r$  - głębokość żłobków wirnika.

Funkcję  $\delta_{su}(\alpha_s)$  występującą w zależności (3) można wyrazić następująco:

$$\delta_{su}(\alpha_s) = \begin{cases} 1; & k_s \tau_s + \frac{\tau_s}{2} - \frac{\alpha_{os}}{2} \leq \alpha_s < k_s \tau_s + \frac{\tau_s}{2} + \frac{\alpha_{os}}{2}, \\ 0; & \text{dla pozostałych } \alpha_s \end{cases}, \quad (5)$$

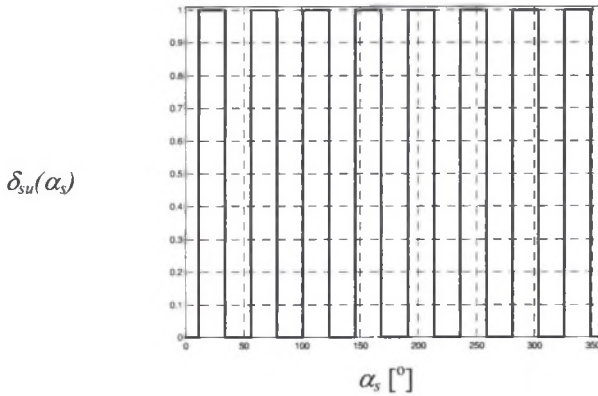
gdzie:  $\tau_s = \frac{2\pi}{Q_s}$  - kątowa podziałka żłobkowa stojana,

$Q_s$  - liczba żłobków stojana,

$\alpha_{os}$  - szerokość kątowa żłobka stojana,

$k_s = 0, 1, \dots, Q_s - 1$ .

Na rysunku 4 przedstawiono przykładowy wykres funkcji  $\delta_{su}(\alpha_s)$  opisanej zależnością (5) dla przypadku  $Q_s = 8$  żłobków stojana, których szerokość kątowa  $\alpha_{os}$  jest równa połowie kątowej podziałki żłobkowej  $\tau_s$ .



Rys. 4. Przebieg funkcji  $\delta_{su}(\alpha_s)$  dla  $Q_s=8$ ,  $\alpha_{os}=0,5\tau_s$

Fig. 4. The function  $\delta_{su}(\alpha_s)$  for  $Q_s=8$ ,  $\alpha_{os}=0,5\tau_s$

Funkcję (5) jako funkcję okresową, o okresie równym  $2\pi$ , przy dowolnym przyjęciu początku układu współrzędnych, można rozwinąć w szereg Fouriera o następującej ogólnej postaci [3]:

$$\delta_{su}(\alpha_s) \cong \frac{a_0^{\delta_{su}}}{2} + \sum_{\nu_s} \left( a_{\nu_s}^{\delta_{su}} \cos(\nu_s \alpha_s) + b_{\nu_s}^{\delta_{su}} \sin(\nu_s \alpha_s) \right). \quad (6)$$

W widmie harmonicznym funkcji  $\delta_{su}(\alpha_s)$ , oprócz składowej stałej, pojawią się harmoniczne przestrzenne o rządach:

$$\nu_s = kQ_s, \quad (7)$$

gdzie:  $k=1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Harmoniczne przestrzenne o rządach  $\nu_s$ , wynikających z zależności (7), są związane z użłobkowaniem stojana. Przyjmując początek układu współrzędnych  $\alpha_s=0$  w osi zęba stojana

(rys. 3) wyrażenie (6) można ostatecznie zapisać następująco:

$$\delta_{su}(\alpha_s) \cong \frac{a_0^{\delta_{su}}}{2} + \sum_{v_s} c_{v_s}^{\delta_{su}} \cos v_s \alpha_s . \quad (8)$$

Do określenia funkcji  $\delta_{ru}(\alpha_r, \vartheta)$  występującej w zależności (4) wprowadzamy funkcję  $\delta_{ru}(\alpha_r)$  zdefiniowaną następująco:

$$\delta_{ru}(\alpha_r) = \begin{cases} 1; & k_r \tau_r + \frac{\tau_r}{2} - \frac{\alpha_{or}}{2} \leq \alpha_r < k_r \tau_r + \frac{\tau_r}{2} + \frac{\alpha_{or}}{2} , \\ 0; & \text{dla pozostałych } \alpha_r \end{cases} \quad (9)$$

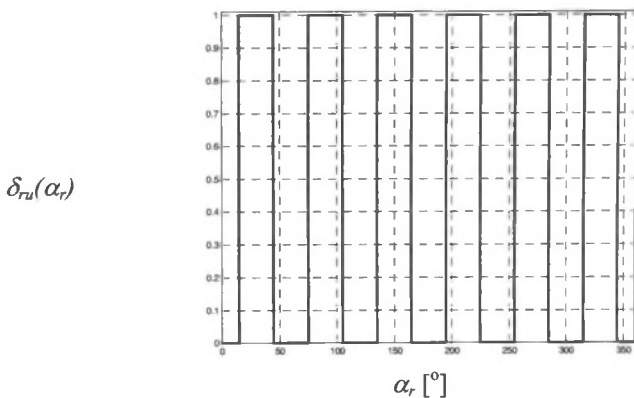
gdzie:  $\tau_r = \frac{2\pi}{Q_r}$  - kątowa podziałka żłobkowa wimika,

$Q_r$  - liczba żłobków wimika,

$\alpha_{or}$  - szerokość kątowna żłobka wimika,

$k_r=0,1,\dots,Q_r-1$ .

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowy wykres funkcji  $\delta_{ru}(\alpha_r)$  opisaney zależnością (9) dla przypadku  $Q_r=6$  żłobków wimika, których szerokość kątowna  $\alpha_{or}$  jest równa połowie kątowej podziałki żłobkowej  $\tau_r$ .



Rys. 5. Przebieg funkcji  $\delta_{ru}(\alpha_r)$  dla  $Q_r=6, \alpha_{or}=0,5\tau_r$

Fig. 5. The function  $\delta_{ru}(\alpha_r)$  for  $Q_r=6, \alpha_{or}=0,5\tau_r$

Funkcję (9) jako funkcję okresową, o okresie równym  $2\pi$ , można również rozwinąć w szereg Fouriera o następującej ogólnej postaci:

$$\delta_{ru}(\alpha_r) \cong \frac{a_0^{\delta_{ru}}}{2} + \sum_{v_r} \left( a_{v_r}^{\delta_{ru}} \cos(v_r \alpha_r) + b_{v_r}^{\delta_{ru}} \sin(v_r \alpha_r) \right) . \quad (10)$$

W widmie harmonicznym funkcji  $\delta_{ru}(\alpha_r)$ , oprócz składowej stałej pojawiają się harmoniczne przestrzenne o rzędach:

$$v_r = k Q_r . \quad (11)$$

Harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v_r$  wynikających z (11) są związane z użłobkowaniem wimika. Przyjmując początek układu współrzędnych związanego z wimikiem w osi zęba wimika, zależność (10) można przestawić w następującej formie [3]:

$$\delta_{ru}(\alpha_r) \cong \frac{a_0^{\delta_{ru}}}{2} + \sum_{v_r} c_{v_r}^{\delta_{ru}} \cos v_r \alpha_r. \quad (12)$$

Położenie wirnika można następnie wyrazić w układzie współrzędnych związanym ze stojanem poprzez następujące wyrażenie:

$$\alpha_r = \alpha_s - \vartheta. \quad (13)$$

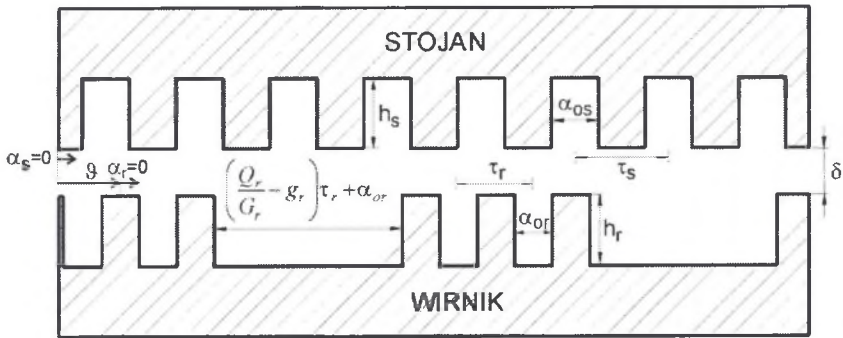
Uwzględniając równanie (13) w równaniu (12) ostatecznie otrzymuje się:

$$\delta_{ru}(\alpha_s, \vartheta) \cong \frac{a_0^{\delta_{ru}}}{2} + \sum_{v_r} c_{v_r}^{\delta_{ru}} \cos v_r (\alpha_s - \vartheta). \quad (14)$$

Z zależności (14) wynika zatem, że harmoniczne o rzędach  $v_r$ , w przeciwieństwie do harmonicznych o rzędach  $v_s$ , przesuwają się wraz z obrotem wirnika o kąt mechaniczny  $\vartheta$  równy kątowi obrotu wirnika względem stojana.

## 2.2. Uźłobkowanie niepełne

Przez uźłobkowanie niepełne rozumiany będzie obwód magnetyczny o strukturze jak przedstawiono na rys. 2. Do dalszej analizy przyjęte zostaną tylko przypadki, gdy zęby wirnika usuwa się w taki sposób, aby powstała parzysta liczba grup zębów składających się z pewnej liczby małych zębów.



Rys. 6. Struktura obwodu magnetycznego o dwustronnym, niepełnym uźłobkowaniu  
Fig. 6. The structure of a magnetic circuit having non full double slotting

Wypadkową grubość szczeliny powietrznej dla takiego obwodu magnetycznego, podobnie jak dla przypadku pełnego uźłobkowania, można opisać następującą funkcją:

$$\delta(\alpha_s, \vartheta) = \delta + \delta_s(\alpha_s) + \delta'_r(\alpha_s, \vartheta). \quad (15)$$

Funkcję  $\delta'_r(\alpha_s, \vartheta)$  występującą w równaniu (15) wyraża się następująco:

$$\delta'_r(\alpha_s, \vartheta) = h_r \delta'_{ru}(\alpha_s, \vartheta). \quad (16)$$

Funkcję  $\delta'_{ru}(\alpha_s, \vartheta)$  można wyrazić poprzez wprowadzenie pomocniczej funkcji  $\delta'_{ru}(\alpha_r)$  określonej następująco:

$$\delta'_{ru}(\alpha_r) = \begin{cases} 1; & (k_1\tau_{G_r} + k_2\tau_r - \alpha_{or} \leq \alpha_r < k_1\tau_{G_r} + k_2\tau_r) \wedge \\ & \wedge (k_1\tau_{G_r} + g_r\tau_r - \alpha_{or} \leq \alpha_r < (k_1 + 1)\tau_{G_r}), \\ 0; & \text{dla pozostałych } \alpha_r. \end{cases} \quad (17)$$

gdzie:  $\tau_{G_r} = \frac{2\pi}{G_r}$  - kątowa podziałka grupowa (związana z liczbą grup małych zębów)

wirnika,

$G_r$  - liczba grup małych zębów wirnika,

$g_r$  - liczba małych zębów przypadających na jedną grupę,

$k_1=0,1,\dots,G_r-1; k_2=1,2,\dots,g_r-1$ .

Funkcję (17) jako funkcję okresową po uwzględnieniu zależności (13) można przedstawić w postaci następującego rozwinięcia:

$$\delta'_{ru}(\alpha_s, \vartheta) \cong \frac{a_0^{\delta'_{ru}}}{2} + \sum_{\nu_{G_r}} c_{\nu_{G_r}}^{\delta'_{ru}} \cos \nu_{G_r} (\alpha_s - \vartheta). \quad (18)$$

W widmie harmonicznym funkcji  $\delta'_{ru}(\alpha_s, \vartheta)$  oprócz składowej stałej pojawiają się harmoniczne o rzędach:

$$\nu_{G_r} = kG_r. \quad (19)$$

Funkcje (14) i (18) opisujące odpowiednio pełne i niepełne uźłobkowanie wirnika mają taką samą postać. Różnice w obu przypadkach sprowadzają się do innych rzędów harmonicznym pojawiających się w widmach. Ponadto współczynniki szeregu Fouriera (14) zależą od 2 parametrów ( $Q_r, \alpha_{or}$ ), podczas gdy współczynniki szeregu (18) są funkcją 4 parametrów ( $Q_r, \alpha_{or}, G_r, g_r$ ).

### 3. FUNKCJA ODWROTNOŚCI ZASTĘPCZEJ GRUBOŚCI SZCELINY POWIETRZNEJ

Jak wynika z zależności (1), większe znaczenie dla wyznaczenia rozkładu natężenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej ma funkcja odwrotności wypadkowej grubości szczeliny powietrznej  $1/\delta(\alpha_s, \vartheta)$ . Odwrotność funkcji wypadkowej grubości szczeliny powietrznej można przedstawić w następującej formie analitycznej [2]:

$$\gamma(\alpha_s, \vartheta) = \frac{1}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} = \frac{1}{\delta} - \frac{h_s}{\delta(\delta + h_s)} \delta_{su}(\alpha_s) - \frac{h_r}{\delta(\delta + h_r)} \delta_{ru}(\alpha_s, \vartheta) + \left( \frac{h_r}{\delta(\delta + h_r)} - \frac{h_r}{(\delta + h_s)(\delta + h_s + h_r)} \right) \delta_{su}(\alpha_s) \delta_{ru}(\alpha_s, \vartheta). \quad (20)$$

#### 3.1. Uźłobkowanie pełne

Na podstawie zależności (20) można dokonać analizy harmonicznym funkcji odwrotności wypadkowej grubości szczeliny powietrznej. Na podstawie zależności (8) i (12) równanie (20) można przedstawić następująco [3]:

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha_s, \vartheta) = & \gamma_0 - \sum_{v_s}^{\infty} \gamma_{v_s}^s \cos(v_s \alpha_s) - \sum_{v_r}^{\infty} \gamma_{v_r}^r \cos v_r (\alpha_s - \vartheta) + \\ & + \sum_{v_s}^{\infty} \sum_{v_r}^{\infty} \gamma_{v_d}^d \cos(|v_s \pm v_r| \alpha_s - \text{sgn}(v_r \pm v_s) v_r \vartheta). \end{aligned} \quad (21)$$

Z równania (21) wynika, że w widmie harmonicznym funkcji odwrotności grubości szczeliny powietrznej poza składową stałą  $\gamma_0$  pojawiają się harmoniczne o rzędach  $v_s$ ,  $v_r$  oraz dodatkowe, tak zwane harmoniczne różnicowe. Rzędy harmonicznym różnicowych wynoszą:

$$v_d = |k_s Q_s \pm k_r Q_r|. \quad (22)$$

Harmoniczne różnicowe, podobnie jak harmoniczne o rzędach  $v_r$ , przemieszczają się wraz z obrotem wirnika.

### 3.2. Uźłobkowanie niepełne

Funkcję odwrotności wypadkowej grubości szczeliny powietrznej w odniesieniu do przypadku niepełnego uźłobkowania obwodu magnetycznego wirnika na podstawie zależności (8), (18) i (20) można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \gamma'(\alpha_s, \vartheta) = & \gamma'_0 - \sum_{v_s}^{\infty} \gamma_{v_s}^s \cos(v_s \alpha_s) - \sum_{v_{G_r}}^{\infty} \gamma_{v_{G_r}}^r \cos v_{G_r} (\alpha_s - \vartheta) + \\ & + \sum_{v_s}^{\infty} \sum_{v_{G_r}}^{\infty} \gamma_{v_d}^d \cos(|v_s \pm v_{G_r}| \alpha_s - \text{sgn}(v_{G_r} \pm v_s) v_{G_r} \vartheta). \end{aligned} \quad (23)$$

Również w tym przypadku w widmie harmonicznym, poza składową stałą i harmonicznymi o rzędach  $v_s$  i  $v_{G_r}$ , pojawiają się harmoniczne różnicowe.

## 4. PODSUMOWANIE

Na podstawie analitycznego przedstawienia funkcji odwrotności grubości szczeliny powietrznej dokonana została jej analiza harmoniczna dla przypadków pełnego i niepełnego uźłobkowania obwodu magnetycznego wirnika. Uzyskane rozwinięcia mają taką samą ogólną postać, różnią się natomiast pod względem rzędów harmonicznym występujących w ich widmach oraz ilością parametrów wpływających na wartości współczynników szeregu Fouriera. Uzyskane funkcje (21) i (23) posłużą do przeprowadzenia dalszej analizy wpływu uźłobkowania obwodu magnetycznego na właściwości maszyn elektrycznych posiadających dwustronnie uźłobkowany obwód magnetyczny. Analiza taka ukierunkowana będzie na określenie warunków występowania oraz wartości momentów reluktancyjnych. Na podstawie funkcji (21) i (23) i znanej funkcji opisującej rozkład przepływu uzwojeń ( $\mathcal{O}(\alpha_s)$  w równaniu (1)) możliwe jest wyznaczenie warunków generowania momentów reluktancyjnych oraz wyznaczenie zależności na indukcyjności własne i wzajemne.



## LITERATURA

1. Szymański D.: *Uźłobkowanie stojana i wirnika maszyny elektrycznej jako przyczyna: odkształcenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej oraz generowania dodatkowych momentów elektromagnetycznych*. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 2001.
2. Hesse H.: *Air gap permeance in doubly slotted asynchronous machines*. IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.7, No. 3, September 1992.
3. Krawczyk D.: *Qualitative and quantitative analysis of the air gap length function of an electric machine*. Materiały XVI Seminarium BSE „Proc. of Seminar on Electrical Engineering”, Archives of PTETiS Conferences, 2002.
4. Krawczyk D., Kluszczyński K.: *Analityczne rozwinięcie funkcji odwrotności grubości szczeliny powietrznej maszyny elektrycznej z dwustronnie uźłobkowanym obwodem magnetycznym*. Wybrane Zagadnienia Elektrotechniki i Elektroniki WZEE'2003, Warszawa-Jadwisin, 12-15 maja 2003.
5. Turowski J.: *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych*. WNT, Warszawa 1982.
6. Glinka T., Jakubiec M., Wieczorek A.: *Silnik asynchroniczny synchronizowany momentem reluktancyjnym*. Wiadomości Elektrotechniczne 2'2001.
7. Glinka T., Jakubiec M., Wieczorek A.: *Wpływ rozwiązań konstrukcyjnych obwodu elektromagnetycznego na parametry silnika asynchronicznego synchronizowanego momentem reluktancyjnym*. Wiadomości Elektrotechniczne 6'2001, s. 234-237.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Pochanke, Prof. Politechniki Warszawskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 maja 2004 r.

**Abstract**

Properties of electric machines mostly depend on the magnetic field distribution in the air-gap. The magnetic field distribution is influenced by the MMF distribution and the magnetic circuit structure as it results from relation (1). Most electric machines have doubly slotted magnetic circuits. The slotting can be full, as shown in fig. 1. or non full as shown in fig. 2. From the point of view of magnetic field distribution determination the reciprocal of the air-gap length function has to be expressed. An analytical form of the function can be determined according to the equation (20) [2]. Basing on the equations (6), (10) and (20) the properties of the harmonic spectrum of the air-gap length reciprocal function were determined. The obtained results can be used to derive the general conditions for the reluctance torque generation as well as the self and mutual inductances can be derived.