ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: ELEKTRYKA z. 193 Nr kol. 1640

Damian KRAWCZYK
Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej, Zakład Mechatroniki

PROCEDURA OKREŚLANIA WARUNKÓW GENEROWANIA MOMENTÓW RELUKTANCYJNYCH W SILNIKACH ELEKTRYCZNYCH O OBUSTRONNIE UŻŁOBKOWANYM OBWODZIE MAGNETYCZNYM

Streszczenie. Przedstawiono w pełni analityczną metodę określania warunków generowania momentów reluktancyjnych w odniesieniu do silników o dwustronnie użłobkowanym obwodzie magnetycznym. Podano procedurę określania rzędów harmonicznych przestrzennych przepływu i permeancyjnych, w wyniku oddziaływania których mogą powstać momenty reluktancyjne. Ponadto pokazano możliwość określania prędkości obrotowych wirnika, przy których momenty te powstaną.

PROCEDURE FOR DETERMINATION OF CONDITIONS FOR RELUCTANCE TORQUE GENERATION IN AN ELECTRIC MOTOR HAVING DOUBLY SLOTTED MAGNETIC CIRCUIT

Summary. The way of an analytical determination of the relationships between the spatial MMF and permeance harmonics describing the reluctance torque generation was presented. The way of the rotor velocity determination for which the torque appears was presented as well.

1. WPROWADZENIE

Na właściwości silników elektrycznych decydujący wpływ ma rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, który jest uwarunkowany sposobem wykonania uzwojeń oraz kształtem obwodu magnetycznego. Duża grupa maszyn elektrycznych ma obwód magnetyczny, charakteryzujący się dwustronnym użłobkowaniem powierzchni przyszczelinowych stojana i wirnika, które jest przyczyną odkształcenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej i może być źródłem generowania momentów reluktancyjnych [1]. W pewnych typach silników elektrycznych (np. silnikach indukcyjnych klatkowych i silnikach pierścieniowych) momenty reluktancyjne mają charakter momentów niepożądanych, natomiast w silnikach reluktancyjnych momenty te mogą być momentami użytecznymi. Istotnym zagadnieniem jest zatem możliwość określania warunków generowania takich momentów. Problem ten polega na określeniu, pomiędzy którymi wyższymi harmonicznymi przestrzennymi przepływu oraz harmonicznymi przestrzennymi permeancji mogą wystąpić

oddziaływania prowadzące do powstawania momentów reluktancyjnych oraz dodatkowo, przy jakich prędkościach wirowania wirnika oddziaływania te występują. Problem ten można rozwiązać sposobem w pełni analitycznym, jednak konieczne są pewne założenia upraszczające. Z punktu widzenia analizy powstawania momentów reluktancyjnych rozpatrywany będzie model maszyny posiadający uzwojenia tylko w stojanie. Ponadto uzwojenia te są uzwojeniami symetrycznymi trójfazowymi. Przyjmując, że obwód magnetyczny stojana i wirnika maszyny ma nieskończenie dużą przenikalność magnetyczną ($\mu_{Fe}=\infty$), moment elektromagnetyczny można wyrazić następująco [2]:

$$T_e = \frac{\partial W_m(\vartheta, i)}{\partial \vartheta}, \tag{1}$$

gdzie: W_m - energia pola magnetycznego zgromadzona w szczelinie powietrznej maszyny.
Energię pola magnetycznego W_m można z kolei wyrazić następująco:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_o \int_V H^2 \mathrm{d}V, \tag{2}$$

gdzie: μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni (powietrza),
V – objętość szczeliny powietrznej maszyny.

Zatem konieczna jest znajomość rozkładu pola magnetycznego w całej objętości szczeliny powietrznej. Przyjmując ponadto występowanie tylko składowej promieniowej pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, rozkład natężenia pola magnetycznego można wyrazić następująco [2]:

$$H(\alpha_s, \vartheta) = \frac{\Theta(\alpha_s)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} + H(0, \vartheta)\frac{\delta(0, \vartheta)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)}, \tag{3}$$

gdzie: α_s - współrzędna kątowa wzdłuż rozwiniętego obwodu maszyny,
ϑ - kąt położenia wirnika względem stojana,
$\Theta(\alpha_s)$ - rozkład przepływu wzdłuż obwodu maszyny,
$\delta(\alpha_s, \vartheta)$ - rozkład grubości szczeliny powietrznej wzdłuż obwodu maszyny,
$\delta(0, \vartheta)$ - grubość szczeliny powietrznej dla $\alpha_s=0$,
$H(0, \vartheta)$ - natężenie pola magnetycznego dla $\alpha_s=0$.

Wartość składnika $H(0, \vartheta)$ można wyznaczyć na podstawie warunku bezźródłowości pola magnetycznego z następującej zależności:

$$H(0, \vartheta) = -\frac{\int_0^{2\pi} \frac{\Theta(\alpha_s)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} \mathrm{d}\alpha_s}{\int_0^{2\pi} \frac{\delta(0, \vartheta)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} \mathrm{d}\alpha_s}. \tag{4}$$

2. ROZKŁAD NATĘŻENIA POLA MAGNETYCZNEGO W SZCZELINIE POWIETRZNEJ

Rozkład natężenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej można wyznaczyć zgodnie z zależnością (3) na podstawie znanych funkcji rozkładu przepływu $\Theta(\alpha_s)$ oraz odwrotności wypadkowej grubości szczeliny powietrznej $\gamma(\alpha_s,\vartheta)=\frac{1}{\delta(\alpha_s,\vartheta)}$. Funkcję rozkładu przepływu dla trójfazowego uzwojenia symetrycznego zasilanego trójfazowym symetrycznym prądem można wyrazić następująco [3]:

$$\Theta(\alpha_s,t)\cong\sum_{\nu_\Theta}^{\infty}\Theta_{m\nu_\Theta}\cos(\omega t-\nu_\Theta\alpha_s), \tag{5}$$

gdzie: $\nu_\Theta = kp$; k=1,-5,7,-11,13,...-(6a-1),(6a+1) ; a=0,1,2,...,∞,

p - liczba par biegunów.

Funkcję odwrotności wypadkowej grubości szczeliny powietrznej dla maszyny posiadającej pełne i niepełne (jak w silnikach typu ASMR [7,8]) dwustronne użłobkownie można przedstawić następująco [4,5,6]:

$$\gamma(\alpha_s,\vartheta)=\frac{1}{\delta(\alpha_s,\vartheta)}=\gamma_0-\sum_{\nu_s}^{\infty}\gamma_{\nu_s}^{s}\cos(\nu_s\alpha_s)-\sum_{\nu_r}^{\infty}\gamma_{\nu_r}^{r}\cos\nu_r(\alpha_s-\vartheta)+ \tag{6}$$

$$+\sum_{\nu_s}^{\infty}\sum_{\nu_r}^{\infty}\gamma_{\nu_d}^{d}\cos\left(|\nu_s\pm\nu_r|\alpha_s-\mathrm{sgn}(\nu_r\pm\nu_s)\nu_r\vartheta\right),$$

gdzie: $\nu_s=kQ_s$; $\nu_r=kQ_r$; k=1,2,3,...,∞

Q_s, Q_r - liczba żłobków odpowiednio stojana i wirnika (w przypadku silnika ASMR Q_r oznacza liczbę grup dużych zębów wirnika).

Zależność ta jest słuszna przy założeniu prostokątnego kształtu żłobków. Zależność (6) dla celów dalszej analizy można przedstawić w następującej zwartej formie:

$$\gamma(\alpha_s,\vartheta)=\gamma_o+\sum_{\nu_\gamma}^{\infty}c_{\nu_\gamma}^{\gamma}\cos\left(\nu_\gamma\alpha_s-\varphi_{\nu_\gamma}(\vartheta)\right). \tag{7}$$

Wstawiając zależności (5) i (7) do (3) i (4) otrzymuje się następujące wyrażenie opisujące rozkład natężenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej:

$$H(\alpha_s,\vartheta)=\underbrace{\sum_{\nu_\Theta}^{\infty}c_{\nu_\Theta}^{H}\cos(\nu_\Theta\alpha_s-\omega t)}_{A}+\underbrace{\sum_{\nu_\Theta}^{\infty}\sum_{\nu_\gamma}^{\infty}c_{\nu_{\Theta\gamma}}^{H}\cos\left[\omega t-\varphi_{\nu_\gamma}(\vartheta)-(\nu_\Theta-\nu_\gamma)\alpha_s\right]}_{B}+$$

$$+\underbrace{\sum_{\nu_\Theta}^{\infty}\sum_{\nu_\gamma}^{\infty}c_{\nu_{\Theta\gamma}}^{H}\cos\left[\omega t+\varphi_{\nu_\gamma}(\vartheta)-(\nu_\Theta+\nu_\gamma)\alpha_s\right]}_{C}+\underbrace{\sum_{\nu_\gamma}^{\infty}c_{\nu_\gamma}^{H}\cos\left[\nu_\gamma\alpha_s-\varphi_{\nu_\gamma}^{\gamma}(\vartheta)\right]}_{D}. \tag{8}$$

3. ENERGIA POLA MAGNETYCZNEGO

Na postawie zależności (2) i (6) można wyznaczyć całkowitą energię zgromadzoną w szczelinie powietrznej. Elementarny element objętości dV szczeliny powietrznej występujący w zależności (2) można wyrazić następująco:

$$dV = lrdrd\alpha_s, \tag{9}$$

gdzie: l - długość osiowa maszyny,

r - odległość elementu dV od osi wirnika.

Wstawiając zależność (9) do (2) i uwzględniając strukturę obwodu magnetycznego zależność (2) można przedstawić w postaci następującej całki podwójnej:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_o l \int_0^{2\pi} H^2(\alpha_s, \vartheta) \int_{R_r - \delta_r(\alpha_s, \vartheta)}^{R_s + \delta_s(\alpha_s)} rdrd\alpha_s, \tag{10}$$

gdzie: R_r - promień zewnętrzny wirnika,

R_s - promień wewnętrzny stojana.

Przy obliczaniu całki (10) należy uwzględnić następujące zależności [4,5,6]:

$$\delta_s^2(\alpha_s) = h_s^2 \delta_{su}(\alpha_s), \tag{11a}$$

$$\delta_r^2(\alpha_s, \vartheta) = h_r^2 \delta_{ru}(\alpha_s, \vartheta). \tag{11b}$$

Następnie po rozwiązaniu całki względem r zależność (10) można przedstawić następująco:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_o l \int_0^{2\pi} H^2(\alpha_s, \vartheta) \left(\underbrace{\frac{1}{2}\left(R_s^2 - R_r^2\right)}_{E} + \underbrace{h_s\left(R_s + \frac{1}{2}h_s\right)\delta_{su}(\alpha_s)}_{F} + \underbrace{+h_r\left(R_r - \frac{1}{2}h_r\right)\delta_{ru}(\alpha_s, \vartheta)}_{G} \right) d\alpha_s. \tag{12}$$

Korzystając z oznaczeń wprowadzonych w równaniach (8) i (12) energię pola magnetycznego zgromadzoną w szczelinie powietrznej można przedstawić następująco:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_o l \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{A^2 E}_{1} + \underbrace{A^2 F}_{2} + \underbrace{A^2 G}_{3} + \underbrace{B^2 E}_{4} + \ldots \right) d\alpha_s. \tag{13}$$

W dalszej kolejności, z punktu widzenia zależności (1) należy przeanalizować, które ze składników podcałkowych w równaniu (13) są funkcją kąta ϑ położenia wirnika wzgldem stojana, a które nie. Składniki *1* i *2* nie zależą od kąta ϑ (wyrażenia A, E i F nie są funkcjami kąta ϑ), w związku z czym można je w dalszej analizie pominąć. Składnik *3* w wyrażeniu (13) jest zależny od ϑ, dlatego należy przeprowadzić jego analizę. Składnik ten można mianowicie przekształcić do następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
W_{m3} = \frac{1}{2}\mu_0 l h_r \left(R_r - \frac{1}{2} h_r \right) \cdot \Bigg[& \frac{a_0^{\delta_{ru}}}{2} \sum_{\nu_\Theta}^{\infty} \left(c_{\nu_\Theta}^H \right)^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\nu_\Theta \alpha_s - \omega t\right) \mathrm{d}\alpha_s}_{3.1} + \\
& + \sum_{\nu_\Theta}^{\infty} \sum_{\nu_r}^{\infty} \frac{1}{4} \left(c_{\nu_\Theta}^H \right)^2 c_{\nu_r}^{\delta_{ru}} \int_0^{2\pi} \Bigg[\underbrace{\cos\left(\left(2\nu_\Theta + \nu_r\right)\alpha_s - \left(2\omega t + \nu_r \vartheta\right)\right)}_{3.2} + \\
& + \underbrace{\cos\left(\left(2\nu_\Theta - \nu_r\right)\alpha_s - \left(2\omega t - \nu_r \vartheta\right)\right)}_{3.3} + 2 \underbrace{\cos \nu_r \left(\alpha_s - \vartheta\right)}_{3.4} \Bigg] \mathrm{d}\alpha_s + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k}^{\infty} \sum_{l}^{\infty} \sum_{\nu_r}^{\infty} c_k^H c_l^H c_{\nu_r}^{\delta_{ru}} \int_0^{2\pi} \Bigg[\underbrace{\cos\left(\left(k + l + \nu_r\right)\alpha_s - \left(2\omega t + \nu_r \vartheta\right)\right)}_{3.5} + \\
& + \underbrace{\cos\left(\left(k - l + \nu_r\right)\alpha_s - \nu_r \vartheta\right)}_{3.6} + \underbrace{\cos\left(\left(-k + l + \nu_r\right)\alpha_s - \nu_r \vartheta\right)}_{3.7} + \\
& k, l \in \left\{\nu_\Theta\right\} \wedge k \neq l .
\end{aligned}
\tag{14}
$$

4. MOMENTY RELUKTANCYJNE

Następnie w wyrażeniu (14) należy wykluczyć z dalszej analizy wyrażenia nie będące funkcją kąta ϑ (w tym przypadku będzie to tylko składnik 3.1 w wyrażeniu (14)). Pozostałe wyrażenia, będące całkami od 0 do 2π, są zależne od ϑ. Całki te będą równe 0 z wyjątkiem przypadku, gdy wyrażenia stojące przy α_s będą równe 0. Na tej podstawie z dalszej analizy można wyeliminować składnik 3.4 w wyrażeniu (14). Przyrównując wyrażenia stojące przy α_s do zera można otrzymać warunki powstawania momentów. Dodatkowo należy przeanalizować, czy dany moment elektromagnetyczny będzie miał stałą w czasie wartość. W tym celu należy przeanalizować pozostałą część argumentu podcałkowych funkcji trygonometrycznych występujących w zależności (14) pod kątem jej niezależności względem czasu. Tam, gdzie pojawia się pulsacja ω, moment osiągnie stałą wartość przy prędkości wirowania wirnika różnej od 0, natomiast w pozostałych przypadkach będzie to miało miejsce przy zatrzymanym wirniku. Wyniki pełnej analizy dla wyrażenia (14) zestawiono w tab. 1.

Tabela 1

Warunki generowania synchronicznych momentów reluktancyjnych wynikające z zależności (14)

Lp.	Warunki generowania momentów reluktancyjnych	Prędkość kątowa wirnika
1.	$2\nu_\Theta + \nu_r = 0 \Leftrightarrow \nu_\Theta < 0 \wedge 2\nu_\Theta = -\nu_r$	$\omega_m = -\dfrac{2\omega}{\nu_r}$
	$2\nu_\Theta - \nu_r = 0 \Leftrightarrow \nu_\Theta > 0 \wedge 2\nu_\Theta = \nu_r$	$\omega_m = \dfrac{2\omega}{\nu_r}$
2.	$k + l + \nu_r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} & (k < 0 \wedge l > 0 \wedge \lvert k\rvert > l \wedge l - \lvert k\rvert = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k > 0 \wedge l < 0 \wedge \lvert l\rvert > k \wedge k - \lvert l\rvert = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k < 0 \wedge l < 0 \wedge \lvert k\rvert + \lvert l\rvert = \nu_r) \end{cases}$	$\omega_m = -\dfrac{2\omega}{\nu_r}$
3.	$k - l + \nu_r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} & (k > 0 \wedge l > 0 \wedge k < l \wedge k - l = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k < 0 \wedge l < 0 \wedge \lvert k\rvert > \lvert l\rvert \wedge \lvert l\rvert - \lvert k\rvert = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k < 0 \wedge l > 0 \wedge \lvert k\rvert + l = \nu_r) \end{cases}$	$\omega_m = 0$
4.	$-k + l + \nu_r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} & (k > 0 \wedge l > 0 \wedge k > l \wedge l - k = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k < 0 \wedge l < 0 \wedge \lvert l\rvert > \lvert k\rvert \wedge \lvert k\rvert - \lvert l\rvert = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k > 0 \wedge l < 0 \wedge k + \lvert l\rvert = \nu_r) \end{cases}$	$\omega_m = 0$
5.	$-k - l + \nu_r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} & (k > 0 \wedge l > 0 \wedge k + l = \nu_r) \vee \\ \vee & (k > 0 \wedge l < 0 \wedge k > \lvert l\rvert \wedge \lvert l\rvert - k = -\nu_r) \vee \\ \vee & (k < 0 \wedge l > 0 \wedge l > \lvert k\rvert \wedge \lvert k\rvert - l = -\nu_r) \end{cases}$	$\omega_m = \dfrac{2\omega}{\nu_r}$

W podobny sposób należy przekształcić i przeanalizować pozostałe składniki wyrażenia (13), w rezultacie czego otrzymamy wszystkie warunki generowania momentów reluktancyjnych.

5. PODSUMOWANIE

Zaprezentowana metoda analizy warunków generowania momentów reluktancyjnych jest metodą analityczną. Dzięki temu analizę taką należy wykonać jednorazowo i jej wyniki mogą być stosowane w odniesieniu do maszyn o różnych parametrach dwustronnego użłobkowania. Na podstawie uzyskanych zależności można stworzyć program komputerowy, którego zadaniem będzie określanie warunków powstawania momentów. Parametrami wejściowymi takiego programu będą tylko liczby żłobków stojana Q_s i wirnika Q, oraz liczba par biegunów p uzwojenia stojana. Na podstawie uzyskanych obliczeń można będzie uprościć model symulacyjny maszyny uwzględniający efekty dwustronnego użłobkowania poprzez

wyeliminowanie z równania momentu elektromagnetycznego tych składników, które nie prowadzą do wytwarzania momentu lub też odpowiadają generowaniu momentów w innym niż analizowany zakresie prędkości.

LITERATURA

1. Szymański D.: *Użłobkowanie stojana i wirnika maszyny elektrycznej jako przyczyna: odkształcenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej oraz generowania dodatkowych momentów elektromagnetycznych.* Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 2001.
2. Krause P. C.: *Analysis of electric machinery.* McGraw-Hill Book, New York 1986.
3. Turowski J.: *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych.* WNT, Warszawa 1982.
4. Hesse H.: *Air gap permeance in doubly slotted asynchronous machines.* IEEE Transactions on Energy Conversion, vol.7, No. 3, September 1992.
5. Krawczyk D.: *Qualitative and quantitative analysis of the air gap length function of an electric machine.* Materiały XVI Seminarium BSE „Proc. of Seminar on Electrical Engineering", Archives of PTETiS Conferences, 2002.
6. Krawczyk D., Kluszczyński K.: *Analityczne rozwinięcie funkcji odwrotności grubości szczeliny powietrznej maszyny elektrycznej z dwustronnie użłobkowanym obwodem magnetycznym.* Wybrane Zagadnienia Elektrotechniki i Elektroniki WZEE'2003, Warszawa-Jadwisin, 12-15 maja 2003.
7. Glinka T., Jakubiec M., Wieczorek A.: *Silnik asynchroniczny synchronizowany momentem reluktancyjnym.* Wiadomości Elektrotechniczne 2'2001.
8. Glinka T., Jakubiec M., Wieczorek A.: *Wpływ rozwiązań konstrukcyjnych obwodu elektromagnetycznego na parametry silnika asynchronicznego synchronizowanego momentem reluktancyjnym.* Wiadomości Elektrotechniczne 6'2001, s. 234-237.
9. Krawczyk D.: *Analiza funkcji grubości szczeliny powietrznej i jej odwrotności przy pełnym i niepełnym dwustronnym użłobkowaniu obwodu magnetycznego maszyny elektrycznej.* Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka, z. 193, Gliwice 2004.

Recenzent: Dr hab. inż. Andrzej Pochanke, Prof. Politechniki Warszawskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 maja 2004 r.

Abstract

The slotting of the magnetic circuit of an electric machine causes the magnetic field distribution distortion. This can result in reluctance torque generation. Generally the torque can be expressed by the relation (1). The magnetic energy stored in the air gap can be derived from (2). Assuming the symmetrical 3 phase winding in the stator the MMF distribution can be expressed by (5). The reciprocal of the total air gap length is given by the relation (7). Basing on the relations (5), (7) and (3) the expression (8) for the magnetic field distribution can be obtained. Substituting (8),(9) and (11) into (10) the relation (13) is obtained. The components of (13) which are functions of ϑ should be analysed further only. The relation (14) represents the developed component *3* of (13). For further investigation components of (14) which are functions of ϑ should be taken into account. From the relation (14) the combinations of the spatial MMF and permeance harmonics are obtained for which the reluctance torque can be developed. The angular velocities for which the torque have constant values is determined from (14) as well. These results are presented in the table 1. The procedure should be repeated for each component of (13) which is a function of the rotor position. All the results can be easily implemented in a computer program, which will be able to calculate all the possibilities of reluctance torque generation. The input data of the program are only the stator and rotor number of slots and a number of pole pairs.