

Marcin SZCZYGIEŁ, Paweł KOWOL

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej, Zakład Mechatroniki

ANALIZA SYMULACYJNA SILNIKA INDUKCYJNEGO O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

Streszczenie. W artykule przedstawiono dwutwornikowy silnik indukcyjny o dwóch stopniach swobody. W oparciu o założenia upraszczające, zbudowano analityczny model połowy silnika, z którego wyznaczono parametry elektryczne silnika. Na podstawie parametrów silnika utworzono model obwodowy i model matematyczny silnika. Z modelu obwodowego wyznaczono charakterystyki elektromechaniczne silnika. Dla modelu matematycznego silnika dokonano symulacji stanów dynamicznych silnika.

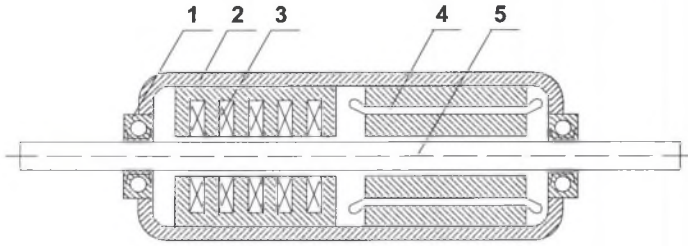
SIMULATION ANALYSIS OF THE INDUCTION MOTOR WITH TWO DEGREES OF MECHANICAL FREEDOM

Summary. In the paper a two-armature induction motor with two degrees of mechanical freedom is presented. From analytical field model, which is determined from simplifying assumptions, electrical parameters for circuit and mathematical models of the motor are calculated. Electromechanical characteristics are determined from circuit models of the motor. Dynamic states of the motor are simulated in mathematical model of the motor.

1. WPROWADZENIE

Silniki indukcyjne są obecnie najczęściej stosowanymi napędami w urządzeniach przemysłowych i robotyce. Stanowią one grupę napędów atrakcyjnych pod względem niskich kosztów wykonania i eksploatacji. Dodatkowym ich atutem jest to, że w połączeniu z energoelektronicznymi układami zasilania mogą konkurować z innego typu napędami (silniki krokowe, silniki z magnesami trwałymi). Silniki o kilku stopniach swobody, będące źródłem ruchu złożonego, stanowią niewielką grupę napędów elektrycznych, niemniej jednak rozwój techniczny powoduje coraz większe zapotrzebowanie na tego rodzaju napędy. Wśród wspomnianych silników najbardziej liczną podgrupę stanowią silniki obrotowo-liniowe.

Analizowany silnik obrotowo-liniowy ma dwa tworniki (rys.1). Tworniki te wytwarzają dwa pola: jeden wirujące, a drugi biegnące. Tworniki te współpracują ze wspólnym litym wirnikiem (rura stalowa z naniesioną warstwą miedzi). W wyniku współdziałania obu pól z prądami indukowanymi w wirniku powstają moment obrotowy i siła liniowa. Prezentowany



Rys. 1. Konstrukcja dwutwornikowego silnika obrotowo-liniowego [3]: 1 - łożyska, 2 - obudowa, 3 - wzbudzenie ruchu liniowego, 4 - wzbudzenie ruchu obrotowego, 5 - wirnik

Fig. 1. Construction of the two-inductor rotary-linear motor: 1 - bearings, 2 - causing, 3 - linear inductor, 4 - rotary inductor, 5 - rotor

model konstrukcyjny przedstawia strukturę opartą na zintegrowanym napędzie dwuczłonowym, który w rzeczywistości funkcjonuje jako dwa niezależne napędy obrotowy i liniowy [3].

Przeprowadzona analiza symulacyjna silnika obrotowo-liniowego polega na wyznaczeniu charakterystyki elektromechanicznej oraz symulacji stanów dynamicznych silnika. W celu realizacji powyższych założeń przyjęto dwa modele:

- model obwodowy do wyznaczenia charakterystyki elektromechanicznej,
- model matematyczny w celu symulacji stanu rozruchu silnika zasilanego z sieci.

Dla obu przypadków parametry maszyny wyznaczono z modelu połowego.

2. SFORMUŁOWANIE MODELU POŁOWEGO

Model połowy silnika utworzono przy następujących założeniach:

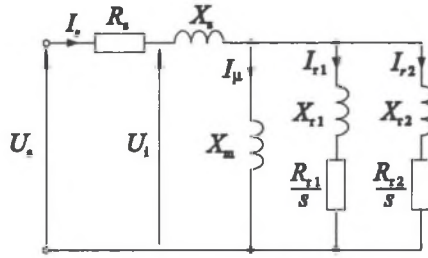
- a) tworniki są twornikami niezależnymi - umożliwia to przeprowadzenie analizy dla dwóch poszczególnych przypadków: *silnika obrotowego* i *silnika liniowego*;
- b) model silnika jest modelem monoharmonicznym – jako wymuszenie przyjmuje się pierwszą harmoniczną rozkładu przestrzennego okładów prądowych;
- c) obwody magnetyczne silnika są obwodami liniowymi;
- d) rzeczywiste uzwojenia zastępuje się nieskończenie cienkimi warstwami prądowymi umieszczonymi na granicach stojanów i szczelin powietrznych;
- e) strefę zębowo-żłobkową, w której występują naprzemiennie zęby stojana i zezwoje, zastępuje się jednolitą warstwą o właściwościach anizotropowych;
- f) analizowany silnik stanowi fragment nieskończenie długiego silnika (przyjmuje się niewystępowanie podłużnych zjawisk końcowych).

Dla tak sformułowanego modelu wyznaczono rozkłady pola magnetycznego w oparciu o prawa Maxwella – na podstawie zadanych warunków brzegowych [4].

3. MODEL OBWODOWY SILNIKA - WYZNACZANIE PARAMETRÓW SCHEMATU ZASTĘPCZEGO

Dla dwuwarstwowej części ruchomej silnika (wirnik-bieżnia) przyjęto model obwodowy, przedstawiony na rys. 2 zarówno dla silnika obrotowego, jak i dla liniowego [2,6].

Parametry schematu zastępczego silnika wyznaczono na podstawie bilansu mocy, wyznaczając moc pozorną \underline{S}_n związaną z poszczególną częścią silnika (szczelina powietrzna, wirnik dwuwarstwowy). Bilansu mocy dokonano na podstawie znajomości rozkładu pola



Rys. 2. Schemat zastępczy – model obwodowy silnika obrotowego oraz silnika liniowego
 Fig. 2. Equivalent circuit – circuit model of the rotary motor and linear motor

magnetycznego wykorzystując twierdzenia Poytinga, które dla pól sinusoidalnie zmiennych przyjmuje postać:

$$\underline{P} = \underline{E} \times \underline{H}^* \tag{1}$$

gdzie:

- \underline{P} - wektor Poytinga (postać zespolona),
- \underline{E} - zespolona postać wektora natężenia pola elektrycznego,
- \underline{H}^* - sprzężona postać zespolona wektora natężenia pola magnetycznego.

Reaktancję rozproszenia stojanów X_s wyznaczono przy „zasilaniu” silnika, składającego się wyłącznie z pojedynczego twornika – obrotowego lub liniowego (rys.3) [5]:

$$X_s = X_i - X_{otw} \tag{2}$$

gdzie:

X_i – reaktancja widziana z zacisków uzwojenia stojana

$$X_i = \omega \frac{\Psi_s}{I_s} \tag{3}$$

ω – pulsacja źródła zasilania,

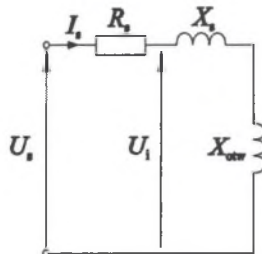
I_s – prąd stojana,

Ψ_s – strumień skojarzony z uzwojeniem fazowym stojana

$$\Psi_s = l_e \int_0^{2\tau} g_z A(r, \varphi, z) dl \tag{4}$$

g_z – gęstość zwojowa uzwojenia stojana,

A – magnetyczny potencjał wektorowy na granicy stojan-szczelina powietrzna (w miejscu umieszczenia okładu prądowego),



Rys. 3. Schemat zastępczy silnika składającego się wyłącznie ze twornika
 Fig. 3. Equivalent circuit of the motor consist of an inductor only

l_e – długość czynna uzwojenia,
 τ – podziałka biegunowa uzwojenia,
 X_{otw} – reaktancja „otworu” powstałego po wyjęciu wirnika

$$X_{otw} = \frac{\Delta Q_{otw}}{mI_s^2}, \quad (5)$$

gdzie:

m – liczba faz stojana,
 ΔQ_{otw} – moc bierna związana z „otworem”

$$\Delta Q_{otw} = \int_{C_i} \text{Im}\{\underline{P}\} dC, \quad (6)$$

C_i – kontur wewnętrzny szczeliny powietrznej – zewnętrzny kontur wirnika.

Reaktancję magnesującą X_m wyznaczono dla stanu idealnego biegu jałowego zależności:

$$X_m = X_i - X_s. \quad (7)$$

Parametry obwodu związane z wirnikiem – bieźnią:

- rezystancję k -tej warstwy (gałęzi schematu zastępczego) wirnika R_{rk} ,
- reaktancję rozproszenia dla k -tej warstwy (gałęzi schematu zastępczego) wirnika X_{rk} ,
 wyznaczono z bilansu mocy dla stanu zwarcia silnika [5]:

$$R_{rk} = \frac{\Delta P_k}{mI_{rk}^2}, \quad (8)$$

$$X_{rk} = \frac{\Delta Q_k}{mI_{rk}^2}, \quad (9)$$

gdzie:

$\Delta P_k, \Delta Q_k$ – moc strat i moc bierna dla k -tej warstwy

$$\Delta P_k = \int_{C_i} \text{Re}\{\underline{P}\} dC, \quad (10)$$

$$\Delta Q_k = \int_{C_i} \text{Im}\{\underline{P}\} dC, \quad (11)$$

$$\underline{S}_k = \Delta P_k + j\Delta Q_k, \quad (12)$$

I_{rk} – prąd k -tej gałęzi obwodu (k -tej warstwy wirnika) obliczony na podstawie modelu polowego

$$I_{rk} = I_s \frac{S_k}{S_r}, \quad (13)$$

S_r – moc pozorna przekazywana do wirnika

$$\underline{S}_r = \underline{S}_i - jmX_s I_s^2, \quad (14)$$

\underline{S}_i – moc symboliczna wydawana ze stojana,

m – liczba faz stojana.

Rezystancje uzwojeń stojanów R_s wyznaczono na podstawie znajomości długości drutu nawojowego o zadanej średnicy.

4. MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA OBROTOWO-LINIOWEGO

Chcąc zaprezentować zjawiska fizyczne zachodzące w modelu rzeczywistym silnika prądu przemiennego, można je przedstawić za pomocą modelu matematycznego maszyny

indukcyjnej. Równania te w postaci modelu matematycznego o stałych skupionych umożliwiają prostą analizę obwodów elektrycznych występujących w maszynach elektrycznych za pomocą układu nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących stany równowagi elektrycznej i mechanicznej w tych obwodach.

Model matematyczny silnika indukcyjnego liniowego nie różni się znacznie od modelu matematycznego maszyny wirującej. Elementy macierzy indukcyjności oraz rezystancji wyznacza się tak samo jak dla maszyn indukcyjnych wirujących [2]. Różnice w modelu, a właściwie w zmianie wielkości wynikają jedynie z konstrukcji i zasady działania maszyny [6].

Model matematyczny silnika obrotowo – liniowego sformułowano przy poniższych założeniach upraszczających:

- uzwojenia stojana i wirnika przyjmuje się za symetryczne,
- zakłada się stałą, równomierną szczelinę powietrzną,
- pomija się zjawisko nasycania się rdzeni magnetycznych wirnika i stojana – liniowa charakterystyka magnesowania,
- pomija się zjawisko wypierania prądu w wirniku,
- pomija się straty powstałe pod wpływem zjawiska histerezy i prądów wirowych,
- pomija się wyższe harmoniczne sił magnetomotorycznych uzwojeń stojana i wirnika,
- rezystancje i reaktancje maszyny są skupione,
- przyjmuje się niewystępowanie podłużnych zjawisk końcowych.

Do opisu modelu matematycznego monoharmonicznego dla części wirującej silnika obrotowo – liniowego wykorzystuje się następujące równania [7]:

$$u_s = R_s i_s + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_s + L_{ss} \frac{d}{dt} i_s + \frac{d}{dt} (M_{sr}(\vartheta) i_r), \quad (15)$$

$$u_r = R_r i_r + L_{\sigma r} \frac{d}{dt} i_r + L_{rr} \frac{d}{dt} i_r + \frac{d}{dt} (M_{rs}(\vartheta) i_s), \quad (16)$$

$$\Omega_m = \frac{d\vartheta_m}{dt}, \quad (17)$$

$$T_e = i_s^T \frac{\partial}{\partial \vartheta} M_{sr}(\vartheta) i_r, \quad (18)$$

$$T_e - T_m = J \frac{d\Omega_m}{dt}. \quad (19)$$

Dla części liniowej sformułowano model matematyczny przy wykorzystaniu zależności na równość mocy mechanicznych (20) i związku pomiędzy prędkością obrotową i liniową (21):

$$T_e 2\pi f \frac{(1-s)}{p_b} = F_e 2\pi f (1-s), \quad (20)$$

$$\Omega_m = V_m \frac{\pi}{\tau}, \quad (21)$$

$$u_s = R_s i_s + L_{\sigma s} \frac{d}{dt} i_s + L_{ss} \frac{d}{dt} i_s + \frac{d}{dt} (M_{sr}(\varphi) i_r), \quad (22)$$

$$u_r = R_r i_r + L_{\sigma r} \frac{d}{dt} i_r + L_{rr} \frac{d}{dt} i_r + \frac{d}{dt} (M_{rs}(\varphi) i_s), \quad (23)$$

$$V_m = \frac{dx}{dt}, \quad (24)$$

$$F_e = \frac{\pi}{p_b} \mathbf{i}_s^T \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{M}_{sr}(\varphi) \mathbf{i}_r, \quad (25)$$

$$F_e - F_m = m \frac{dV_m}{dt}, \quad (26)$$

gdzie:

φ – kąt określający przesunięcie liniowe między uzwojeniami faz części pierwotnej oraz wtórnej [2]

$$\varphi = \frac{\pi \Delta x}{\tau}, \quad (27)$$

- Δx – różnica odległości,
- s – poślizg maszyny indukcyjnej,
- f – częstotliwość w Hz,
- \mathbf{u}_s – wektor napięć stojana dla współrzędnych fazowych,
- \mathbf{u}_r – wektor napięć wirnika dla współrzędnych fazowych,
- \mathbf{i}_s – wektor prądów stojana dla współrzędnych fazowych,
- \mathbf{i}_r – wektor prądów wirnika w układzie współrzędnych fazowych,
- Ψ_s – wektor strumienia skojarzonego stojana w układzie współrzędnych fazowych,
- Ψ_r – wektor strumienia skojarzonego wirnika w układzie współrzędnych fazowych,
- \mathbf{R}_s – macierz rezystancji stojana w układzie współrzędnych fazowych,
- \mathbf{R}_r – macierz rezystancji wirnika w układzie współrzędnych fazowych,
- \mathbf{L}_{ss} – macierz indukcyjności własnych stojana w układzie współrzędnych fazowych,
- \mathbf{L}_{rr} – macierz indukcyjności własnych wirnika w układzie współrzędnych fazowych,
- \mathbf{M}_{sr} – macierz indukcyjności wzajemnych stojan–wirnik w układzie współrzędnych fazowych,
- $L_{\sigma s}$ – macierz indukcyjności rozproszenia stojana w układzie współrzędnych fazowych,
- $L_{\sigma r}$ – macierz indukcyjności rozproszenia wirnika w układzie współrzędnych fazowych,
- σ – współczynnik rozproszenia,
- Ω_m – prędkość kątowna wirnika,
- Ω_x – prędkość kątowna wirowania dwuosiowego układu odniesienia,
- V_m – prędkość liniowa wirnika,
- V_x – prędkość liniowa przemieszczania dwuosiowego układu odniesienia,
- \mathcal{G} – kąt elektryczny obrotu wirnika,
- T_e – moment elektromagnetyczny,
- T_m – moment mechaniczny na wale silnika,
- F_e – elektromagnetyczna siła ciągu,
- F_m – siła obciążenia wału silnika,
- J – moment bezwładności silnika,
- p_b – liczba par biegunów,
- τ – podziałka żłobkowa części liniowej.

5. WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYKI ELEKTROMECHANICZNEJ SILNIKA OBROTOWO-LINIOWEGO

Dla obliczonych parametrów schematu zastępczego (rys. 2) w podstawie zależności zamieszczonych w tab. 1, wyznaczono charakterystyki elektromechaniczne silnika obrotowo-

liniowego. Obliczenia przeprowadzono dla przypadku zasilania pojedynczego twornika – wyłącznie twornika obrotowego lub wyłącznie twornika liniowego. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4 i 5.

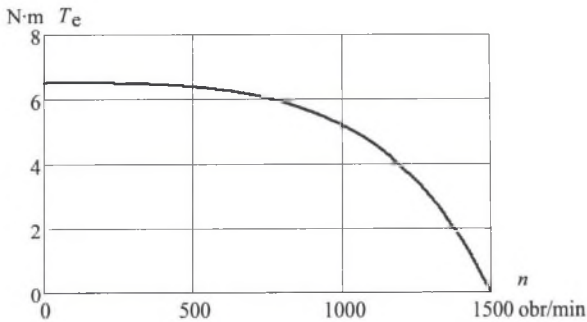
Tabela 1

Zależności opisujące własności silnika obrotowo-liniowego

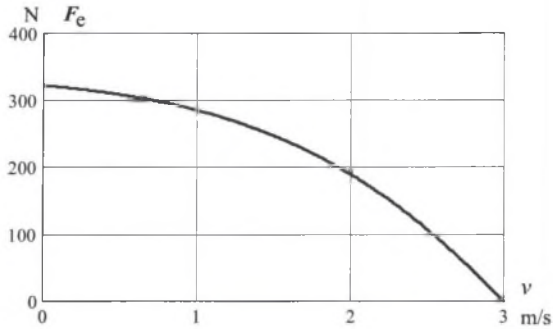
Nazwa	Silnik indukcyjny obrotowy	Silnik indukcyjny liniowy
Obwód pierwotny	twornik	Twornik
Obwód wtórny	wirnik masywny z naniesioną warstwą miedzi	bieżnia masywna z naniesioną warstwą miedzi
Podziałka biegunowa	$\tau = \frac{\pi D}{2p_b}$	τ równa rozpiętości zezwoju
Prędkość synchroniczna	$n_1 = \frac{60f}{p_b}$	$v_1 = 2f\tau$
Prędkość mechaniczna	$n = n_1(1-s)$	$v = v_1(1-s)$
Straty mocy w obwodzie wtórnym	$m \sum_k I_{rk}^2 R'_{rk} = sP_w$	$m \sum_k I_{rk}^2 R'_{rk} = sP_b$
Moment (T_e) i siła (F_e) elektromagnetyczne	$T_e = \frac{m \sum_k I_{rk}^2 R'_{rk}}{s\Omega_1}$	$F_e = \frac{m \sum_k I_{rk}^2 R'_{rk}}{sv_1}$
Charakterystyka elektromechaniczna	$T_e = f(n)$	$F_e = f(v)$

Oznaczenia:

D – średnica wewnętrzna stojana

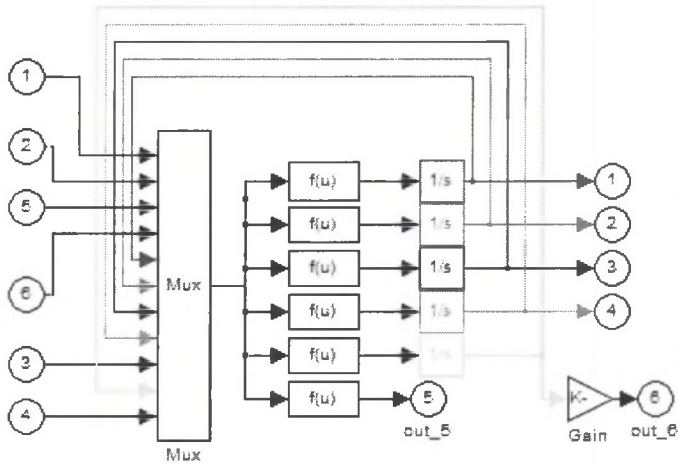


Rys. 4. Charakterystyka elektromechaniczna silnika $T=f(n)$, twornik obrotowy (dla $U=380$ V, $f=50$ Hz)
 Fig. 4. Electromechanical characteristic of the motor $T=f(n)$ for rotary inductor supplying (for $U=380$ V, $f=50$ Hz)



Rys. 5. Charakterystyka elektromechaniczna silnika $F=f(v)$ przy zasilaniu twornika liniowego (dla $U=380$ V, $f=50$ Hz)

Fig. 5. Electromechanical characteristic of the motor $F=f(v)$ for linear inductor supplying (for $U=380$ V, $f=50$ Hz)



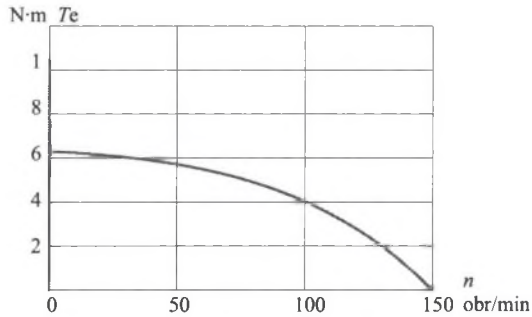
Rys. 6. Model silnika obrotowo – liniowego zaimplementowany w Matlabie – Simulinku (schemat strukturalny złożony z bloków nieliniowych „Fcn”)

Fig. 6. Mathematical model implemented in Matlab – Simulink (structural scheme made for nonlinear blocks „Fcn”)

6. BADANIA SYMULACYJNE ROZRUCHU SILNIKA PRZY ZASILANIU Z SIECI

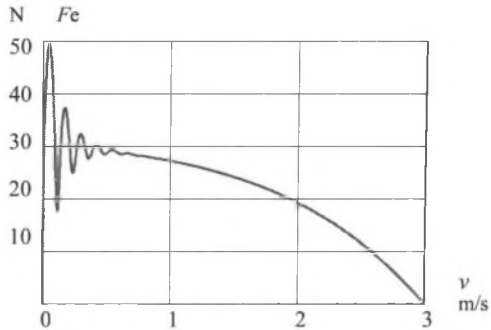
Badania symulacyjne przeprowadzono za pomocą programu Matlab dla stanu rozruchu silnika zasilanego z sieci. Zaprojektowany układ implementuje równania modelu silnika indukcyjnego obrotowo – liniowego przedstawione w rozdziale 4 i na podstawie konstrukcji przedstawionej na rys. 1 (odseparowane obwody wzbudzenia). Oddzielna analiza tworników daje możliwość lepszej obserwacji stanów dynamicznych napędu. Implementację modelu maszyny w programie MATLAB przeprowadzono za pomocą metody graficzno – analitycznej

(biblioteka Simulink). Metoda graficzno – analityczna umożliwiła budowę modeli matematycznych wyrażonych przez schemat strukturalny złożony z bloków nieliniowych „Fcn”, które pozwalają na przedstawienie przejrzystego modelu maszyny (rys.6).



Rys. 7. Charakterystyka elektromechaniczna silnika $T_e=f(n)$ dla rozruchu przy zasilaniu twornika obrotowego z sieci (dla $U=380$ V, $f=50$ Hz)

Fig. 7. Electromechanical characteristic of the motor electromagnetic torque versus linearspeed (for $U=380$ V, $f=50$ Hz) curves $T_e=f(v)$ for rotary inductor supplying



Rys. 8. Charakterystyka elektromechaniczna silnika $F_e=f(v)$ dla rozruchu przy zasilaniu twornika liniowego z sieci (dla $U=380$ V, $f=50$ Hz)

Fig. 8. Electromechanical characteristic of the motor electromagnetic force versus linear speed curves $T_e=f(v)$ for linear inductor supplying (for $U=380$ V, $f=50$ Hz)

7. PODSUMOWANIE

Analizując wyznaczone charakterystyki momentu elektromagnetycznego w funkcji prędkości (rys. 4 i rys. 7), a także liniowej siły ciągu w funkcji prędkości (rys. 5 i rys.8), obserwuje się niewielkie rozbieżności pomiędzy charakterystykami wyznaczonymi na podstawie modelu matematycznego opisanego równaniami obwodowymi schematu zastępczego (rozdział 3) i modelu matematycznego opisanego równaniami różniczkowymi maszyny (rozdział 4). Różnice te nie przekraczają 10 % i mogą wynikać z doboru metody obliczeniowej. Przebiegi te są charakterystyczne dla wirników masywnych. Proponowane rozwiązanie konstrukcyjne silnika wybrano ze względu na możliwość stosowania napędu w robotach i manipulatorach pozycjonujących. W proponowanej konstrukcji wirnik jest rurą stalową z naniesioną warstwą miedzi. Oscylacje charakterystyk elektromechanicznych

przedstawione na rys.7 i rys.8 są wynikiem małej masy i bezwładności wirnika. Na podstawie badań symulacyjnych można zauważyć, że silnik indukcyjny o zaproponowanej konstrukcji charakteryzuje się dość dobrą dynamiką ruchu i możliwością regulacji w całym zakresie prędkości zarówno w przypadku twornika obrotowego, jak i liniowego. Opracowując odpowiedni układ sterowania można dedykować tego typu napęd dla układów napędowych robotów i manipulatorów pozycjonujących.

LITERATURA

1. Burlikowski W., Kluszczyński K., Szymański D.: *Determination of pulsating parasitic torques in a squirrel cage induction motor employing anisotropic machine model*. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'2000, Helsinki, Finland, August 2000, pp. 299-302.
2. Gieras J.: *Silniki indukcyjne liniowe*. WNT, Warszawa 1990.
3. Kamiński G.: *Silniki elektryczne o ruchu złożonym*. WPW, Warszawa 1994.
4. Kowol P.: *Badanie rozkładu pola magnetycznego w silniku indukcyjnym o dwóch stopniach swobody z wykorzystaniem metod polowych*. Praca dyplomowa magisterska, Politechnika Śląska, Gliwice 2000.
5. Kowol P., Kluszczyński K.: *Zastosowanie analitycznego modelu polowego do wyznaczania parametrów schematu zastępczego silnika indukcyjnego o dwóch stopniach swobody*. XI Sympozjum Środowiskowe PTZE, Bydgoszcz-Wenecja 25-27 czerwca 2001r, Bydgoszcz 2001.
6. Mendrela E. A., Fleszar J.: *Equivalent circuit of induction motors with two degrees of mechanical freedom*. Acta Technica ČSAV 1985, No. 6, p. 697-715.
7. Turowski J.: *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych*. WNT, Warszawa 1982.
8. Szczygieł M.: *Koncepcja sterowania silnika o dwóch stopniach swobody w układzie napędowym robota*. Praca dyplomowa magisterska, Politechnika Śląska, Gliwice 2002.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Grzegorz Kamiński

Wpłynęło do Redakcji dnia 14 maja 2004 r.

Abstract

In the paper a two-armature induction motor with two degrees of mechanical freedom is presented (fig. 1). From analytical field model, which is determined from simplifying assumptions, electrical parameters for circuit and mathematical models of the motor are calculated (1-14).

Exemplary results of simulation of electromagnetic torque versus rotary speed curves (fig. 4 and fig. 7) and force versus linear speed (fig. 5 and fig. 8) presents high dynamics of linear – rotary motor. The curves are typical for motor with solid rotor. The proposed construction of motor, with two degrees of freedom in motion have a possibility of control of torque and force in all range of the speed. Utilization of this kind of drives can be found in different types of robots and manipulators with easier control system.