ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria : GÓRNICTWO z. 221 Nr kol. 1256

Eugeniusz BOBULA, Wiesław PIWOWARSKI
AGH, Kraków

ZAGADNIENIE OPTYMALIZACJI OPISÓW TRANSPORTU MASY W GÓROTWORZE

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę opisu przemieszczeń pionowych górotworu jako rozwiązanie odpowiednich równań różniczkowych. Wskazano, że stososowane formuły opisu procesu przemieszczeń nie mogą być rozwiązaniem równań różniczkowych parabolicznych lub, w stanie stacjonarnym, eliptycznych.

PROBLEM OF OPTIMALIZATION OF DESCRIPTION OF MASS TRANSPORT INSIDE ROCKMASS

Summary. The paper presents an analysis of description of vertical dislocations inside rockmass as a solution to adequate differential equations. The paper proves that the formulae of description of dislocations which have been used so far cannot be treated as a solution to parabolic differential equations or to equations in their stationary state eliptic ones.

OPTIMIERUNGSPROBLEME DER BERCHREIBUNG DES MASSEN - TRANSPORTS IM GEBIRGE

Zusammenfassung. Die Veröfentlichung enthält eine Analyse der vertikalen Verlage rungen des Gebirges als Lösung der entsprechenden Differentialgleichungen. Es wurde nachgewiesen, daß die angewandte Beschreibungsformel des Verlagerungsprozesses nicht als Lösung von parabolischen, oder auch in ihrer stationären Form von eliptischen Differentialgleichungen, betrachtet werden darf.

1. WPROWADZENIE

Badanie odkształcenia górotworu stało się **problemem naukowym** od moment rozpoczęcia na skalę przemysłową eksploatacji kopalin. Zagadnienie **ruchu masy** wewnątrz ośrodka, jak i powstawanie niecek zapadliskowych na powierzchni jest tu poważnym problemem do rozwiązania w zakresie zagrożeń głównie obiektów na powierzchni, jak i w głębi górotworu.

Jakościowe własności niecek pogórniczych analizowano początkowo w środowiskach inżynierskich, jednakże problem wymagał współpracy specjalistów z innych dziedzin, głównie matematyków. Na postawie analizy jakościowej procesu postawania niecki A. Turowicz zaproponował jako opis **równanie paraboliczne**.

Uzasadnienie tej koncepcji było tak logiczne, że przez następne kilkadziesiąt lat dominują tu opisy, których ideową formułą jest równanie paraboliczne jako **formalny odpowiednik** zjawiska, pomimo braku bezpośredniego, merytorycznego wyprowadzenia postulowanego równania stanowiącego **kinematyczny** opis **transportu masy w ośrodku.** Co gorsza, adaptacje już ilościowe doprowadziły do amputacji zmiennej czasowej "t'" w modelach przestrzennych. W wyniku tego uzyskano modele przestrzenne **nie zawierające czasu,** natomiast werbalnie próbuje się modele te traktować jako **stan asymptotyczny** nie formułując, jakiego problemu różniczkowego ta asymptotyka dotyczy.

2. POSTAWIENIE PROBLEMU

Formuła, którą przyjęto w analizach inżynierskich, jako opis stacjonarnego kształtu niecki, ma następującą postać [1] :

$$W_k = \frac{W_{max}}{r^2} \int_{P(\xi,\eta)} \exp \left[-\pi \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{r^2}\right] d\xi\, d\eta \qquad (1)$$

W_{max} - maksymalna wartość obniżenia w punkcie (x,y),

r - parametr,

x, y - współrzędne punktu,

P(ξ, η) - obszar całkowania (pola górniczego).

Nasuwa się pytanie, czy formuła (1) mogła się pojawić jako **postulat** - przy uwzględnieniu złożoności jej kształtu formalnego i słabo widocznych proweniencji logiczno - operacyjnych. Ponadto rozwiązanie to ujawnia związek ze znanym poglądem o spełnieniu przez nieustaloną nieckę **równania parabolicznego**. Zresztą kształt funkcji podcałkowej jest tzw. rozkładem Gaussa, który z kolei wynika z rozwiązania Cauchy'ego równania parabolicznego Fouriera przy pewnym ustalonym czasie "t" (czas mógłby być zawarty w parametrze "r") [3].

$$W_k = \int_{\mathrm{supp}\varphi} \frac{c}{t} \exp[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4Dt}]\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad c = \mathrm{const} > 0$$

Z drugiej strony (1) nie spełnia **kanonicznego** równania parabolicznego dyfuzji. Ponadto (1) ma opisywać **asymptotyczną nieckę** (dla $t \to \infty$). Natomiast rozwiązanie problemu Cauchy'ego równania Fouriera zeruje się dla t dążącego do nieskończoności - co zostanie pokazane dalej. Wobec tego (1) nie może być asymptotycznym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego, nie może również **być jakimkolwiek innym** rozwiązaniem warunków Fouriera równania Fouriera [3] - ponieważ **nie zawiera** w sobie informacji o **czasowym brzegu** dla niecki, co w zasadzie jest **zagadnieniem najważniejszym**, ponieważ brzeg niecki wyznacza zasięg wpływów. Stąd też należy **odrzucić** związek formuły (1) z równaniem Fouriera. Akceptując zatem niezależność czasową (1), powinniśmy wzór ten potraktować jako **stacjonarne rozwiązanie równania harmonicznego**. Jednakże zależność (1) **nie spełnia** również równania Laplace'a, co łatwo można stwierdzić badając laplasjan W_k, gdyż:

$$\frac{r^2}{W_{\max}}\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} = \frac{2\pi}{r^2}\int_P \exp[-\pi\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{r^2}][-1+\frac{2\pi}{r^2}(x-\xi)^2]d\xi d\eta$$

$$\frac{r^2}{W_{\max}}\frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} = \frac{2\pi}{r^2}\int_P \exp[-\pi\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{r^2}][-1+\frac{2\pi}{r^2}(y-\eta)^2]d\xi d\eta$$

Przedstawiona powyżej analiza opisu (1) wskazuje na pojawienie się formalnych niekonsekwencji rozwiązania (1) jako opisu deformacji ośrodka.

Z drugiej strony nieuwzględnienie czasu powinno prowadzić do uzyskania **harmonik** jako opisu **statycznej** postaci niecki, która po długotrwałym (lecz skończonym) nieustalonym procesie przechodzi w postać **stacjonarną**, zatem w rozwiązanie równania eliptycznego. Wobec tego, w sensie pomiarów, niecka przechodziłaby w skończonym czasie w postać **statyczną,** natomiast z powodów teoretycznych przechodziłaby z równania parabolicznego w równanie eliptyczne (dla nieskończnego horyzontu czasowego). Przy czym asymptotycznym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego równania parabolicznego **dla** $t \to \infty$ **jest zero,** gdyż:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{c}{t} \int_P \exp[-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4Dt}] \varphi(\xi, \eta)] d\xi d\eta = 0$$

Natomiast sama myśl, że wzór (1) nie ma żadnej proweniencji formalnej, aczkolwiek możliwa do przyjęcia, byłaby zaprzeczeniem poważnej analizy problemów, do jakiej (1) niewątpliwie pretenduje. Te nieuporządkowane, pod względem formalnym, koncepcje opisu ruchu ośrodka tworzącego nieckę pogórniczą doprowadziły do pojawienia się oczekiwań, że uzmiennienie czasu, np. dla opisu eliptycznego, w określonym punkcie przestrzeni (poprzez szukanie odpowiednich zależności czasowych) prowadzić będzie do rozwiązania **problemów kinematycznych** (w zasadzie powinny to być rozwiązania dyfuzyjne, ale pokażemy, że nie są). Przejdźmy do pewnych formuł rachunkowych.

Do wyznaczenia obniżeń w stanie nieustalonym W(t) S. Knothe [2] zaadaptował równanie różniczkowe (2):

$$\frac{dW(t; W_k)}{dt} = c[W_k - W(t; W_k)] \tag{2}$$

gdzie:

$W(t; W_k)$ - obniżenie punktu w chwili t,

W_k - asymptotyczna wartość obniżenia,

c - dodatni parametr (tzw. współczynnik czasu).

Rozwiązaniem równania (2), dla warunku początkowego W(t = 0) = 0, jest zależność:

$$W(t;W_k) = W_k(1-e^{-ct}) \tag{3}$$

W_k jest pewną funkcją położenia punktu (x, y). Oznaczmy $W(t, W_k) = W(x,y,t)$, wówczas $W(x,y,t)$ spełniać musi pewne równanie kinematyczne. Powinno to być równanie paraboliczne. Niech

$$A(x,y) = \frac{W_{\max}}{r^2}\int_{P(\xi,\eta)} \exp[-\pi\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{r^2}]d\xi d\eta \tag{4}$$

gdzie:

$P(\xi,\eta)$ jest kształtem zaburzenia wewnątrz górotworu (na pewnym poziomie przestrzennym) wpływającym na obniżenie się punktu o współrzędnych (x, y), zaś A(.) w przybliżeniu (dla dużych (x, y)) spełnia równanie eliptyczne. Załóżmy, że $W(x,y,t)$ spełnia równanie **paraboliczne** dla $W(x,y,t) = A(x,y)W_1(t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D\Delta W \tag{5}$$

Zatem

$$\frac{1}{W_1}\frac{dW_1}{dt} = \frac{\Delta A}{A} = const = K$$

czyli

$$\frac{dW_1}{dt} = KW_1 \tag{6}$$

oraz

$$\Delta A = cA \tag{7}$$

co wynika ze znanej w literaturze [3] metody rozdzielania zmiennych.

Przyjąwszy, że (4) spełnia w przybliżeniu równanie (7) (dla odpowiednio dużych x,y), wstawiając (3) do (6) dostajemy:

$$L_s = c\,W_k\exp(-ct) \quad \text{oraz} \quad P_s = K\,W_k + K\,W_k\exp(-ct)$$

Zatem $P_s \neq L_S$, $W(x,y,t)$ spełnia w przybliżeniu równanie **paraboliczne** (5), $A(x,y)$ nie spełnia równania **eliptycznego**, choć jest jego przybliżeniem dla odpowiednich (x,y),

ale W_1 (t) nie jest identyczna z $W(t:W_k)$ dla ustalonego (x,y). Stąd problem (2) jest **fenomenologicznym** opisem opartym raczej na intuicji, a nie na usystematyzowanym wywodzie.

Dodajmy w tym momencie, że nawet gdyby W(x,y,t) spełniało w przybliżeniu równanie paraboliczne, to i tak byłoby trudne do przyjęcia dla praktyki, co przedstawimy poniżej.

Rozważmy bowiem problem rozwiązania równania (5) z pewnymi warunkami brzegowymi.

Znane w literaturze rozwiązanie korzystające z rozdzielenia zmiennych **zmusza** do postawienia warunków granicznych na **nieruchomym brzegu**. Z obserwacji geodezyjnych procesu wynika, że takie **warunki brzegowe są nie do zaakceptowania,** bowiem pomiar geodezyjny ewidentnie pozwala wyróżnić **czas dojścia** zaburzenia do obserwowanego punktu (z pewnym przybliżeniem). Stąd też czoło zaburzenia wywołane eksploatacją podziemną stanowi **ruchomy brzeg,** na którym musimy postawić warunek brzegowy jako wartość zerową. Zatem przedstawiona koncepcja specyfikacji warunków brzegowych jest odmienna niż w przypadku równania (2). Wprawdzie można by rozważyć problem:

$$\Delta A = 0$$

dla A(x,y) zawierającego czas "t' jako parametr, jednakże:

a) **problemy takie nie były dotychczas rozważane,**

b) **sformułowany powyżej problem zmusza do przyjęcia zachowania się wszystkich punktów w czasie identycznie** - co było analizowane powyżej.

W teorii badania funkcji $W(t; W_k)$ rozważany jest jeszcze problem różniczkowy typu:

$$\frac{dW(t;W_k)}{dt} = c(W_{k=k_i} - W) \; ; \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{i}$$

będący jakby stopniowaniem kolejnych niecek stacjonarnych powstających w trakcie rozwoju pola górniczego w czasie. Postawienie opisu (i) jako formuły modelowania procesu przemieszczeń pionowych dla rozwijającej się eksploatacji jest **dalece niespójne,** gdyż analizowane są problemy wyłącznie czasowe dla rozwiązań W_k zależnych od przestrzeni. Takie modelowanie zostało przeanalizowane powyżej, gdzie wykazano niewłaściwość takiego podejścia. Wystarczy zauważyć, że rozwiązanie uzyskane po pierwszym "kroku" postępu

eksploatacji zawiera "w sobie" czas trwania eksploatacji nie związany w ogóle z pojęciem tzw. obniżenia końcowego. Dla rozwiązania równania (i) , W_k zawiera czas skończony związany z trwaniem eksploatacji, zatem **nie mający związku** ze zdefiniowaniem obniżenia końcowego W_k , co jest już **istotną** konsekwencją sprzeczności czasowej wspomnianych problemów paraboliczno-eliptycznych i co wykracza poza zakres niniejszej pracy .

Kontynuując, należy podkreślić, że wcześniejsze rozważania **wykluczają** opisy poprzez **rozdzielone zmienne,** gdyż górotwór byłby opisywany równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, co nie tylko nie doprowadziłoby do porządkowania formalnego opisu ruchu górotworu, lecz stanowiłoby platformę formowania ogromnej ilości opisów nie posiadających jednej zwartej i logicznej wykładni.

W rozważaniach o **kinematyce górotworu** próbuje się wprowadzać pewne analogie do układów równań różniczkowych z innych dziedzin (np. elektrotechniki). Przedstawione powyżej zastrzeżenia **bardzo wyraźnie** wskazują na fiasko ewentualnych analogii.

Naturalnie że można zastępować badania **poruszającego się medium** (masy ośrodka), pod warunkiem że **posiadamy wyraźny dedukcyjny wywód przyjętego równania różniczkowego** opisującego analizowany proces ruchu medium. Jeżeli pewna dziedzina techniki posługuje się analogicznym równaniem, lecz posiada znacznie prostszą metodologię poznawczą, możemy na podstawie takich badań wnioskować o parametrach modelu danego procesu. W przypadku geomechaniki formuła opisu zachowania się ośrodka pod wpływem eksploatacji górniczej podziemnej zbudowana jest z **pewnej ilości relacji fenomenologicznych**, a nie dedukcyjnym wyprowadzeniem - wówczas posługiwanie się analogią pozorną jest działaniem nieusprawiedliwionym. Wobec tego nie ma powodu, aby dobrze opisane układy (np. elektrotechniki) miały być źródłem informacji o formowaniu się procesu deformacji górotworu - który to opis procesu jest zawarty gdzieś pomiędzy przybliżeniem **harmonicznym a rozwiązaniem równania Fouriera**.

3. PODSUMOWANIE

Pomimo ogromnej złożoności ośrodka, jakim jest górotwór, i trudności dotyczących analizy procesu deformacji **warto** uporządkować formalną strukturę opisu korzystając z

bardziej zaawansowanych matematycznie metod uwględniających choćby **częściowo** fizykę procesu.

Przypomnijmy więc w tym momencie koncepcję A. Turowicza modelowania procesu powstawania niecki **równaniem parabolicznym**. Należy tu dodać, że koncepcja ta wymaga przyjęcia postaci strumienia dyfuzyjnego jako gradientu przemieszczenia pionowego. Koncepcja taka jest ideowo zrozumiała, natomiast formalnie powtarza związki zawarte w podobnych rozważaniach z innych dziedzin, zwłaszcza teorii przenoszenia energii. Ponadto prowadzi do opisów zgodnych z pomiarami geodezyjnymi w zakresie kształtowania się niecki pogórniczej [4].

Równania **paraboliczne w przestrzeniach dystrybucyjnych** są formułą, która w obecnej chwili eliminuje znane i częściowo przedstawione tu sprzeczności dotychczasowych opisów. Z kolei fakt losowości pewnych procesów wymusi prawdopodobnie odwołanie się do równań stochastycznych, co dodatkowo skomplikuje dany problem. Jednak potrzeba zbudowania poprawnego modelu zachowania się ośrodka winna być tu nadrzędna.

LITERATURA

[1] Knothe S.: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa t.I, z.1, Warszawa 1953.

[2] Knothe S.: Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa t. I, z.1, Warszawa 1953.

[3] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Część I i II, PWN, Warszawa 1962.

[4] Piwowarski W.: Opis przemieszczeń pionowych aktywnego procesu deformacji górotworu w warunkach eksploatacji górniczej. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo - Hutniczej, Kraków 1989.

[5] Praca zbiorowa: Ochrona powierzchni przed szkodami górniczymi. Wydawnictwo "Śląsk", Katowice 1982.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bernard DRZĘŹLA

Wpłynęło do Redakcji w maju 1994 r.