ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: GÓRNICTWO z. 221 Nr kol. 1256

Bogdan DŻEGNIUK, Wiesław PIWOWARSKI, Jan PIELOK
AGH, Kraków

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE Z OSOBLIWOŚCIAMI W ANALIZIE PROCESÓW NIESTACJONARNYCH MECHANIKI GÓROTWORU

Streszczenie. W pracy wykazano, że pewne opisy zjawisk zachodzących w górotworze w wyniku oddziaływania eksploatacji podziemnej wymagają zastosowania równań różniczkowych z osobliwościami. Dzięki takim równaniom istnieje możliwość zmniejszenia błędu modelu w odniesieniu do pomiaru charakterystycznych cech analizowanego zjawiska. Opis taki wymaga również uwzględnienia ruchu, a zatem niestacjonarności procesu. Równanie Fouriera wykazuje w tym przypadku odstępstwa od warunków granicznych. Warunki zgodności formalnej, jak również możliwość uściślenia opisu można uzyskać poprzez wprowadzenie do modelowania procesu równań różniczkowych z osobliwościami - przykładowo równanie Bobuli - Fouriera.

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULARITIES IN THE ANALYSIS OF NON-STATIONARY ROCKMASS MECHANICS PROCESSES

Summary. The paper contains an indication, that certain mathematical models of the phenomena occuring inside rockmass due to underground mining, should contain equations with singularities.
Thanks to the equations of this kind, the error of the model with respect to the measurements of the characteristic features of the process, can be diminished.
Such models should account also for movements, and so for non-stationarity of the process. The Fourier equations show in this case departures from boundary conditions. The conditions of formal agreement and the improvement of model precision can be achieved by including, in the model, differential equations singularities - for example the Bobula- Fourier equations.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT SINGULARITÄTEN IN DER ANALYSE VON NICHTSTATIONÄREN GEBIRGSMECHANISCHEN PROZESSEN

Zusammenfassung. Im Vortrag vurde nachgewiesen, daß einige Beschreibungen von Phänomenen, die infolge des bergmännischen Abbaus im Gebirge vorkommen, die Anwendung von Singuläritätsgleichungen erfordern. Durch Anwendung dieser Gleichungen besteht die Möglichkeit einer Einschrönkung des Modellfehlers im Bezug zu den gemessenen charakteristischen Eigenschaften des analysierten Vorganges.
So eine Beschreibung bedingt auch die Berücksichtigung von Bewegungen, also der Unstationarität des Prozesses. Die Fourierische Gleichung weist in diesem Fall eine Abweichung von den Grenzbedingungen vor. Die Notwendigkeit einer formellen Abstimmung, wie auch der Präzisierung dieser Beschreibung kann infolge der Einführung in den Modellaufbau der Differentialgleichungen mit Singuläritäten erzielt werden - zum Beispiel der Bobula-Fourier Gleichung.

1. WPROWADZENIE

Jednoczesne oddziaływanie wielu pól eksploatacyjnych na górotwór wymusza *analizę* roli ich skutków w czasie znacznie *krótszym* od czasu ustalenia się *równowagi procesu deformacji.* Wymaga to przygotowania odpowiedniego aparatu matematycznego, pozwalającego opisać ruch ośrodka - są to bowiem *niestacjonarne stany* zjawiska ruchów górotworu. Badania dotyczące procesu przemieszczania się pewnych struktur powierzchniowych w wyniku eksploatacji górniczej umożliwiają najczęściej ocenę przemieszczeń pionowych. Pomiary geodezyjne obejmują również wielkości ruchów poziomych w określonej przestrzeni ośrodka. Właśnie obserwacje geodezyjne stanowiły bazę do zbudowania, w latach pięćdziesiątych, modeli matematycznych opisujących, z wystarcza jącą wówczas dla praktyki górniczej dokładnością, przekształcenia geometryczne górotworu i powierzchni. Wspomniane formuły z reguły nie zawierają w swej strukturze czasu trwania zjawiska, a odwzorowanie w sensie geometrii nie jest w pełni przystające do wyników obserwacji. Dla regularnego kształtu pola górniczego niecka teoretyczna jest symetryczna, zaś przemieszczenia poziome przyjmują wartości maksymalne dokładnie nad krawędzią pola górniczego - wyniki obserwacji obniżeń wykazują występowanie asymetrii rozkładu przemieszczeń poziomych względem krawędzi. Rzeczywisty profil brzeżnej części niecki obniżeniowej różni się od opisu analitycznego.

Przedmiotem pracy jest zasygnalizowanie możliwości zwiększenia dokładności opisu analitycznego względem pomiaru poprzez wprowadzenie do modelowania procesu *równań różniczkowych z osobliwościami.*

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Równaniem opisującym proces deformacji górotworu (obniżeń) mogłoby być klasyczne równanie Fouriera [9]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \cdot \Delta W \tag{1}$$

gdzie:

W - obniżenie punktu górotworu,

t - czas,

D - współczynnik,

Δ – laplasjan.

Równanie (1) pozwala opisać również *stan stacjonarny* (dla czasu dostatecznie długiego), dla którego niecka pogórnicza nie wykazuje już zmian przestrzennych.

Dla przyjmowanych warunków granicznych rozwiązanie równania (1) posiada *pewne niekorzystne właściwości* - np. brak spełnienia przez rozwiązanie *zasady zachowania* masy (energii) w ograniczonym obszarze *pola przemieszczeń.*

W celu przeanalizowania problemu kształtowania się deformacji górotworu przyjmijmy rozwiązanie Cauchy'ego dla równania (1), które według [9] posiada postać:

$$W(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}]\varphi(\xi)d\xi \tag{2}$$

gdzie:

$\varphi(\xi)$ - spełnia warunek początkowy $W(x,o) = \varphi(x)$ dla równania (1).

Z kolei dla równania (2) można pokazać, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,t)\, dx = const \tag{3}$$

Zatem zależność (3) nie zależy od czasu. Rozwiązanie (2) implikuje *nieograniczony obszar* przestrzeni deformacji dla równania (1). Wprowadzenie *dowolnego obszaru ograniczonego* (zapisanie skończonych granic) nie spełnia warunku zachowania masy (3), a jest to podstawowy warunek logiczny.

3. ANALIZA WŁASNOŚCI OPISU PROCESU PRZEMIESZCZEŃ

Wspomniane własności rozwiązania równania *parabolicznego* (1), lub w postaci asyptotycznej równania *eliptycznego,* byłyby tutaj ewidentnie *niezgodne* z obserwowanym geodezyjne faktem przesuwania się brzegu deformacji górotworu w czasie t, przy jakościowej zgodności deformacji z rozwiązaniem równania parabolicznego lub eliptycznego. Efektem przytoczonych własności rozwiązań równania (1) było odejście od próby badania zjawisk czasowych ruchu ośrodka odkształcanego. Uwzględnienie zmiennej czasowej w formule opisu jest koniecznością - stąd też najczęściej korzysta się z iloczynowej postaci różniczkowej zaproponowanej przez S. Knothego [7]:

$$\frac{dW(t)}{dt} = c\left[W^k - W(t)\right] \tag{4}$$

gdzie:

c - współczynnik czasu,

W(t) - wartość obniżenia punktu w chwili t,

W^k - obniżenie asyptotyczne (końcowe) danego punktu.

Wielkość W^k jest pewną znaną (przyjętą) funkcją dwu zmiennych przestrzennych x, y i dla prostokątnego pola górniczego wyraża się dla teorii S. Knothego [6] zależnością:

$$W^k = \frac{W_{\max}}{r^2} \int_{a-x}^{b-x} \int_{c-y}^{d-y} \exp\left[-\pi\left(\frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{r^2}\right)\right] d\xi d\eta \tag{5}$$

Zależność (5) jest przybliżonym rozwiązaniem równania Fouriera (1) dla czasu stabilizacji niecki ($t \to \infty$). Widać, że opis Cauchy'ego (2) w stanie stacjonarnym prowadzi do równania

eliptycznego. Jeżeli przyjmiemy czas skończony, co ma miejsce dla stanów niestacjonarnych, wówczas równanie (1) nie opisze z ustaloną dokładnością niecki pogórniczej.

Tym samym przeprowadzona analiza świadczy o tym, że użytkownicy dotychczasowych modeli posługiwali się zmienną - czasem dostatecznie długim lub czasem skończonym (mniejszym od dostatecznie długiego), co wynikało ze słabej adekwatności równania względem występujących faktów. Należy dodać, że w ten sposób uzyskiwano jedynie dogodne rachunkowe przybliżenie dla niecek, które *przyjmowałyby* swój kształt przestrzenny w skończonym czasie, natomiast rezultaty ilościowe odbiegają tu od bazy idealnej, jaką stanowią wyniki pomiaru.

4. EWOLUCYJNY PROCES DEFORMACJI

W związku z brakiem formalnego uzasadnienia dotychczas przyjmowanego opisu pola przemieszczeń w dalszych rozważaniach skorzystano z równań transportu parabolicznego. Prowadzone od kilkunastu lat badania nad procesami transportu parabolicznego pozwalają sformułować opis procesu dyfuzji [4,7,10], który jest konsekwencją zasady zachowania masy (energii) (6):

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{\Sigma} \vec{\Phi} \cdot d\vec{\Sigma} \tag{6}$$

gdzie:

$u = u(x^1, x^2, x^3, t)$ - pole przemieszczeń,
$V = V(t)$ - objętość wybranej masy,
$\vec{\Phi}$ - strumień dyfuzyjny,
Σ - powierzchnia ograniczająca $V=V(t)$.

Strumień F zdefiniowano jako:

$$\vec{\Phi} = -D \cdot \nabla u \tag{7}$$

gdzie:

∇ – operator wektorowy Nabla.

Strumień elementarny przepływający przez powierzchnię $d\Sigma$ oblicza się na podstawie zależności:

$$du = -\vec{\Phi} \cdot d\vec{\Sigma} \tag{8}$$

gdzie:

$d\vec{\Sigma}$ - element powierzchni traktowany jako wektor prostopadły do powierzchni Σ.

Możemy zaobserwować, że całki równania (6) istnieją, gdy $u \in C^{2,1}$ (wówczas mamy klasyczne równanie Fouriera) oraz istnieją wtedy, gdy $u \in C^{L,L}$ - czyli spełniony jest warunek Lipschitza. Z warunku Lipschitza wynika, że rozwiązanie można przedłużyć do brzegu obszaru S. Jeżeli $u \in C^{L,L}$, wówczas otrzymujemy równanie, które jest uogólnieniem równania dyfuzji (1). Równanie uogólnione nosi obecnie nazwę równania Bobuli-Fouriera [3,4,8] i ma postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \sum_{j=1}^{N((t)} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi^-_{j,i}(t)} - \frac{\partial u}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi^+_{j,i}(t)} \right) \delta^2_{\varphi_{j,i}(t)} \tag{9}$$

gdzie:

$\varphi_{j,i}(t)$ - rozmaitość,

δ^i - dystrybucja osobliwa.

Warunki jednoznaczności

Dla podanego problemu obowiązują warunki jednoznaczności, tzn., że:

- akceptowalne są zakresy dotyczące przedziału zawierającego zmienne zależne i niezależne oraz zmienne geometryczne,
- warunki brzegowe ujmują relację analizowanego obszaru do otoczenia,
- warunki początkowe informują o stanie układu (ośrodka) w "jego wnętrzu" i często na brzegu w punkcie czasu wybranym jako chwila początkowa procesu badanego.

Równanie (9) rozwiązuje się w czasoprzestrzeni $(X,t) \in \Omega \subset R^3 \times R^1$ z warunkiem początkowym (10):

$$u(X,o) = \lambda(X), \quad X = \{x^1, x^2, x^3\} t > 0 \tag{10}$$

i warunkiem brzegowym (11):

$$u(X,t) = 0 \text{ dla } (X,t) \in \partial\Omega(u(X,t) = \Psi(t)) \tag{11}$$

dla u spełniającej zasadę zachowania

$$\int_{\Omega \cap \{t\}} u(X,t)\, dx = \text{const} \tag{12}$$

gdzie:

$\varphi_{j,i}$ - i-ta współrzędna na rozmaitości $\varphi_{i)}$ której odpowiada dystrybucja δ, różniczkowalna względem zmiennej przestrzennej X.

Istotną wartością równania (9), świadczącą o jego przewadze nad własnościami równania (1), jest fakt *spełnienia przez rozwiązanie* z warunkiem ($u \in C^{L,L}$) *równania dyfuzji* łącznie z warunkiem *zachowania masy* w ograniczonym obszarze Ω, spełniający warunek (12).

Ograniczenie obszaru Ω jest niezwykle istotne przy uzgodnieniu wyniku pomiaru geodezyjnego z jakościowymi rozwiązaniami równań transportu (9). Dodatkowym walorem opisu (9) jest kwestia zachowania *objętości* niecki, co dotychczas stanowiło *problem progowy* dla analizy procesu deformacji ośrodka, eliminujący opis Fouriera jako formuły adekwatnej do pomiaru.

Równanie (9) przy warunkach (10) i (11) można rozwiązać numerycznie - jest to jednak zagadnienie ogromnie złożone. Wydawało sie, że dopasowanie odpowiednich procedur przesunie w czasie użyteczność wykorzystania opisu (9). Obecnie istnieją rozwiązania teoretyczne, uzasadniające zbieżność numerycznego rozwiązania równania (9) [1,4], a metody numeryczne dla tego równania w zasadzie są opracowane [5].

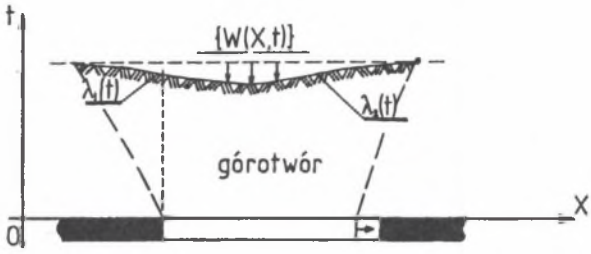
Egzemplifikacją rozwiązań równania (9) jest uwzględnienie *osobliwości* na rozmaitościach φ_j. Otóż rozmaitości te mogą być tworem "wewnętrznym" dla punktów osobliwych rozwiązania, jak również tworem "zewnętrznym", który generuje naturalne osobliwości ośrodka (uskoki, szczeliny itd.) czy też nieciągłości gęstości formacji górotworu. Z tego względu zastosowanie teorii dystrybucji dla równań transportu jest uzasadnione.

Wprowadzenie do opisu dystrybucji jest konieczne dla analizy anomalii przy adaptacji równania Fouriera jako opisu stacjonarnego lub przy zanegowaniu jego niestacjonarności formalnej.

Ograniczając (9) do problemu jednowymiarowego oraz analizując składową pionową przemieszczeń $W(x^1, t)$, profil niecki przyjmuje kształt jak na rys. 1

Warto tu zwrócić uwagę na wniosek wynikający z zamieszczonych rozważań. Pomimo faktu, że *czasowe* pole przemieszczeń elementu wewnątrz górotworu jest *polem niepotencjalnym*, w momencie gdy ruch górotworu ustaje, wówczas ośrodek staje się tworem stacjonarnym - dokładniej, gdy obszar, w którym górotwór uległ deformacji, jest *polem stacjonarnym*, wówczas możemy mówić o potencjale w tym polu.

W odniesieniu do równań (6), (9) z warunkami (10), (11) przeanalizujmy stosowane dotychczas formuły opisu niestacjonarnego pola przemieszczeń. Niecka obniżeniowa



Rys. 1. Obszar Ω i brzeg obszaru $\partial\Omega$

Fig.1. The area Ω and the edge of area $\partial\Omega$

wymuszona eksploatacją górniczą w polu prostokątnym P(b, a; d, c,) określona jest równaniem (5) z warunkiem początkowym (13):

$$u\left(x^1-\xi, x^2-\eta, 0\right)=\alpha_3 \tag{13}$$

czyli:

$$u\left(x^1, x^2, t\right)=\frac{1}{2\pi D}\frac{1}{t}\exp\left[\frac{\left((x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2\right)}{4Dt}\right] \tag{14}$$

Widać, że (5) jest sumą (całką) rozwiązań (14), dla których warunek początkowy dany jest w postaci (13) przy zastąpieniu czasu t przez pewną ustaloną wielkość - tutaj decydującą o przejściu procesu w fazę stacjonarną. Z drugiej strony proces stacjonarny spełnia równanie (15):

$$\Delta W^k=0 \tag{15}$$

gdzie:

$\Delta=\nabla^2\equiv\nabla\cdot\nabla\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}$ - operator Laplace'a.

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu (5) względem x^i = (1,2) otrzymamy:

$$\Delta W^k=\frac{-4\pi}{r^2}\int_a^b\int_c^d\exp\left[-\pi\frac{\left(x^1-\xi\right)^2+\left(x^2-\eta\right)^2}{r^2}\right]d\xi d\eta+$$

$$+\left(\frac{2\pi}{r^2}\right)^2\int_a^b\int_c^d\exp\left[-\pi\frac{(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2}{r^2}\right]\left[(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2\right]d\xi d\eta \tag{16}$$

Z (16) wynika, że $\Delta W^k = 0$ dla $r \to \infty$, co jest zgodne z warunkiem stacjonarności równania parabolicznego (1), które dla $t \to \infty$ staje się eliptyczne. Jednakże dla warunku początkowego (13) rozwiązanie tego równania równa się zero. Ponieważ dla *stacjonarnej niecki* nie otrzymujemy *rozwiązania zerowego,* zatem nie możemy przyjąć, że $r = \infty$, z czego wynika, że parametr r jest wielkością skończoną. Wobec tego nie dostajemy spełnienia przez W^k równania stacjonarnego (15). Natomiast spełnienie równania (1) przez W^k też jest poza zbiorem rozwiązań dopuszczalnych, gdyż (1) nie jest równaniem stacjonarnym. Stąd wynika, że koncepcja przejścia niecki nieustalonej w fazę stacjonarną dla czasu dostatecznie długiego lub skończonego uniemożliwia konsekwentne zastosowanie równania Fouriera do opisu czasowych problemów (niecek) mechaniki górotworu. Równanie Bobuli - Fouriera (9) tę *niezgodność usuwa.*

Warto sprawdzić, czy opis (5) związany jest z rozwiązaniem równania transportu parabolicznego (1), zaś dla stanu stacjonarnego równania harmonicznego (15).

Zgodnie z (15) stosując operator D do (5) otrzymujemy:

$$\Delta W^k = \frac{W_{\max}}{r^2}\{\frac{\partial^2}{\partial x^{12}} \int_{S(\xi,\eta)} \exp[-\pi\frac{(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2}{r^2}]d\xi d\eta + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^{22}} \int_{S(\xi,\eta)} \exp\left[-\pi\frac{\left(x^1-\xi\right)^2+\left(x^2-\eta\right)^2}{r^2}\right]\}/:\frac{W_{\max}}{r^2} \tag{17}$$

Różniczkując otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\int_S -2\pi(x^1-\xi)\cdot\exp\left[-\pi\frac{(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2}{r^2}\right]d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^2}\int_S -2\pi(x^2-\eta)\cdot\exp\left[-\pi\frac{(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2}{r^2}\right]d\xi d\eta \neq 0/:2\pi \tag{18}$$

Ponownie różniczkując (18) mamy:

$$\int_S \exp\left[-\pi\frac{(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2}{r^2}\right]\left[2\pi(x^1-\xi)^2+2\pi(x^2-\eta)^2-2\right]d\xi d\eta \neq 0 \tag{19}$$

gdzie:

$$S = S(\xi, \eta)$$

ponieważ:

$$\exp\left[-\pi\frac{(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2}{r^2}\right] \neq 0 \tag{20}$$

Aby spełnione było równanie (15) oraz uwzględniając związek (20) z (19) wynika, że:

$$(x^1-\xi)^2+(x^2-\eta)^2 = \frac{1}{\pi} \tag{21}$$

co spełnione byłoby tylko dla koła o środku w punkcie $P(\xi_o, \eta_o)$.

Z zależności (19) wynika, że przybliżone rozwiązanie (5) równania Fouriera nie jest w pełni adekwatne do opisu zjawiska deformacji rozumianego jako rozwiązanie *stacjonarnego* problemu transportu masy. Nie jest również adekwatne do *niestacjonarnego* opisu masy. Również wyniki szeregu pomiarów odkształconego górotworu [2] potwierdzają występowanie niezgodności opisu teoretycznego z pomiarem.

5. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy rozważania wskazują na to, że opis procesu deformacji górotworu, zwłaszcza w zakresie wywołanych eksploatacją podziemną przemieszczeń pionowych, można sformułować jako problem paraboliczny pierwszego rzędu względem czasu. Opis ma charakter czysto makroskopowy, co w sensie jakościowym stanowi formułę będącą równaniem dyfuzji. Klasyczne równanie Fouriera (1) zaadaptowane do opisu niecki pogórniczej nie spełnia warunku zachowania masy (3) w dowolnym, lecz ograniczonym obszarze deformacji. Z kolei zaproponowane przez S. Knothego równanie różniczkowe zwyczajne (4) symetryzuje odwzorowanie niecki pogórniczej dla czasu $t \to \infty$, co nie pokrywa się z wynikami pomiaru. Z rozważań analitycznych wynika, że dobrym przybliżeniem odwzorowania stanu niestacjonarnego niecki w obszarze deformacji jest uogólnione równanie dyfuzji (9) zwane

równaniem Bobuli - Fouriera. Równanie to spełnia warunki graniczne (9) i (10) oraz zasadę zachowania masy (3) i (12) dla każdej chwilowej przestrzeni deformacji. Wykazano, korzystając ze stosownej literatury, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (9) oraz istnieją również procedury numeryczne dla rozwiązania tegoż równania. Procedury te wymagają pewnej adaptacji dla warunków eksploatacji górniczej.

Wyniki uzyskane w pracy [2] wskazują na fakt, że stosowane dotychczas równanie (4) wykazuje dobrą zgodność opisu z wynikami pomiaru tylko dla centralnego punktu obszaru nad polem górniczym, co wynika z formuły (5) jako rozwiązania stacjonarnego. Ponadto rozwiązanie równania (4) posiada dalsze niekonsekwencje - przykładowo, maksymalna prędkość obniżenia się punktu nad eksploatacją występuje w chwili t =0 [11].

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawiona analiza modelowania stanu niestacjonarnego procesu deformacji pogórniczych wykazuje, iż bardziej adekwatnym opisem mogą tu być równania różniczkowe cząstkowe z osobliwościami.

LITERATURA

[1] Bobula E.: Zastosowanie dystrybucji do niektórych zagadnień transportu. Zeszyty Naukowe AGH, Matematyka - Fizyka - Chemia, Kraków 1975.

[2] Bobula E., Piwowarski W., Mikołajczak J.: Modyfication of Integrad transformation in Rock Mass movement theory for the description of exploitation inpact on the surface. Polish Academy of Scienses - the Kraków Section, Geodesy (złożono do druku luty 1994).

[3] Dawidowicz A.L.: A Note on Bobula - Fourier Equation, 118 Monograph T.Kościuszko University, The Limit Problems for Diff Differentiul Eguation, 1991.

[4] Holly K.: Stacjonarne równanie Fouriera - Bobuli, zastosowania, wykłady i seminarium Politechnika Krakowska, kwiecień - maj 1993.

[5] Holly K., Bożek B., Jaskólski J.: Variances Methods for therm - loads of elements of is angines, 20th International Congress on Combustion Engines, London 1993.

[6] Knothe S.: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa tom I, Zeszyt 1, Warszawa 1953.

[7] Knothe S.: Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Archiwum Górnictwa i Hutnictwa tom I, Zeszyt 1. Warszawa 1953.

[8] Korońska J., Koroński R.: Matematyczne i fizyczne konsekwencje równania Bobuli-Fouriera, XX Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane 1991.

[9] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu II. Część I i II, PWN, Warszawa 1962.

[10] Piwowarski W.: Opis przemieszczeń pionowych aktywnego procesu deformacji górotworu w warunkach eksploatacji górniczej. Zeszyty Naukowe AGH "Geodezja 106" Kraków 1989.

[11] Pielok J., Piwowarski W.: Folgen einer in formeller Hinsicht inhomogener Struktur der Beschreibung von vertikalen Punktverlagerungen bei dem unstationären Einwirkungszustand von Abbaueinwirkungen und eine differentiale Formulierung dieses Problems - Materiały XV. Roboczego posiedzenia IV Komisji ISM, Kraków 7-12.12.93.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bernard DRZĘZLA

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1994 r.

Abstract

Mathematical models of process of deformation of rockmass scientifically in the 50s make it possible to fix dislocation of rockmass and of surface. As a rule those formulae do not contain in their formal structure the time of duration of the process. Moreover the theoretical "mining subsidence " is symmetrical for a regular shape of mine field. Results of geodesic survey prove asymmetry of the mining subsidence, which is not comprised in theoretical description.

What is the subject of this work is indication of possibilities of increase of accuracy of theoretical description mainly as non-stationary formula. Classical Fourier equation (1) can be accepted here. However equation (1) does not satisfy the mass conservation principle in a limited area of the field of dislocations. Research papers referring to so called parabolic

transport make it possible to formulate description of diffusion process (equation 6). Where the mass conservation principle is satisfied. Equation (6) with Lipschitz condition $u \in C^{LL}$ can be written as differential equation with singularities Bobula-Fourier (9). Equation (9) is solved in $(X, t) \in \Omega$ where $\Omega \subset R^3 \times R^1$ with conditions (10) and (11). Whereas formula (12) is fulfilment of conservation principle. It has been indicated in this work that there exists a univocal solution of equation (9) for each $t \in (0, \infty)$. There exist also numerical procedures of solution this equation. These procedures, however demand adaptation taking into account specific character of condition of the medium where deep mining is carried out. It is the differential equations with singularities that are the models which not only increase accuracy of description of a process but also, in a broader scope, take into account physical phenomena of deformation of the medium.