

Janusz Marian JAWORSKI  
Wydział Zarządzania i Inżynierii Produkcji  
Politechnika Opolska

## NIEDOKŁADNOŚĆ WSPÓLRZĘDNYCH PUNKTU W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono model niedokładności położenia punktu w przestrzeni wielowymiarowej. Model opisuje błędy współrzędnych wektorem losowym o łącznym rozkładzie normalnym. Miarą niedokładności jest elipsoida ufności – uogólnienie przedziału ufności z przestrzeni jednowymiarowej. Omówiono operację przenoszenia błędu z jednej współrzędnej do drugiej. Podano przykłady zastosowania tej operacji.

## AN INACCURACY OF THE POINT COORDINATIONS IN THE EUCLIDEAN SPACE

**Summary.** The paper presents model of inaccuracy of the point position in multi-dimensional space. Model treats coordinate errors as random vector and assumes its normal distribution. Measure of inaccuracy is the confidence ellipsoid – generalization of the confidence interval in one-dimensional space. The rule of the error transferring from one to another coordinate is given and examples of using this rule are given, too.

### 1. WSTĘP

W wielu bardziej złożonych pomiarach mezurand ma postać ciągu  $J$  liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_J$ , co będziemy zapisywali w postaci macierzy kolumnowej (wektora)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_J \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_J], \quad (1)$$

gdzie T – symbol operacji transpozycji (zamiany kolumn na wiersze i wierszy na kolumny). Oznaczmy wartości prawdziwe i wyniki pomiaru

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_J], \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_J]. \quad (3)$$

Wyniki pomiarów są obarczone w stosunku do wartości prawdziwych błędami (prawdziwymi):

$$\Delta^T = \hat{\mathbf{x}}^T - \mathring{\mathbf{x}}^T = [\hat{x} - \mathring{x}_1 \quad \hat{x} - \mathring{x}_2 \quad \dots \quad \hat{x} - \mathring{x}_J] = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \dots \quad \Delta_J]. \quad (4)$$

Wartości prawdziwe (2) i wartości błędów (4) są oczywiście nieznanne. Ciągi (2) i (3) traktuje się jako punkty w przestrzeni euklidesowej  $J$ -wymiarowej rozpiętej na osiach  $x_1, x_2, \dots, x_J$ .

W przestrzeni jednowymiarowej, rozpiętej np. na osi  $x_1$ , miarą niedokładności jest błąd graniczny  $D_1$ , wyznaczający wokół znanej wartości  $\hat{x}_1$  przedział (niepewności) błędu

$$\Delta_1 \in [-D_1; D_1]. \quad (5)$$

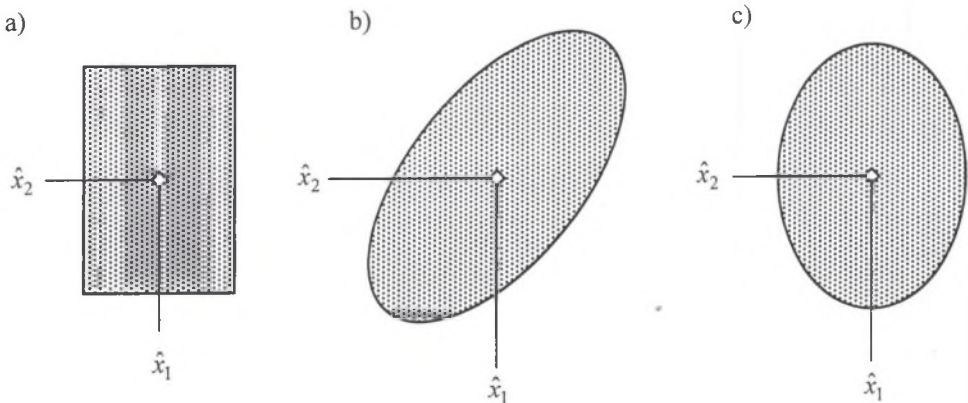
W losowym modelu niedokładności błąd graniczny jest połową szerokości przedziału ufności. Można go identyfikować z niepewnością rozszerzoną.

## 2. OBSZAR NIEPEWNOŚCI

W przestrzeni wielowymiarowej jednowymiarowy przedział niepewności (5) przechodzi w wielowymiarowy obszar niepewności. Jego kształt nie jest tak jednoznaczny jak w przestrzeni jednowymiarowej. Pozornie oczywisty wydaje się obszar niepewności w kształcie hiperkostki o krawędziach równych podwojonym błędom granicznym  $D_j$  poszczególnych wielkości i środkiem w punkcie (3)

$$\Delta_j \in [-D_j; D_j] \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (6)$$

pokazanym na rys. 1a dla przestrzeni dwuwymiarowej.



Rys. 1. Obszar niepewności położenia punktu w przestrzeni dwuwymiarowej:

a) kostka błędów, b) elipsa błędów skorelowanych, c) elipsa błędów nieskorelowanych

Fig. 1. Uncertainty region of the point position in two-dimensional space:

a) cube of errors, b) ellipse of correlated errors, c) ellipse of uncorrelated errors

Jest to model niedokładności zbyt „pesymistyczny”; prawdopodobieństwo, że wszystkie błędy przyjmują równocześnie wartości skrajne, jest znikomo małe. Bardziej realistyczny jest model losowy, zakładający, że błędy  $\Delta$  można modelować zmienną losową wielowymiarową, czyli wektorem losowym. O zmiennej tej przyjmuje się, że ma łączny rozkład normalny o zerowych wartościach oczekiwanych i macierzy kowariancyjnej

$$\begin{cases} \Sigma = [\sigma_{ij}], \\ \sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \text{var } \Delta_i, \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \text{cov}(\Delta_i, \Delta_j). \end{cases} \quad (7)$$

Zachodzi związek [1, 2]

$$\Delta^T \Sigma^{-1} \Delta = \chi^2(J), \quad (8)$$

gdzie  $\chi^2(J)$  – rozkład chi kwadrat o  $J$  stopniach swobody.

Dla błędów o rozkładzie normalnym obszar niepewności ma kształt hiperelipsoidy [3], która w przestrzeni błędów  $\Delta$  jest opisana równaniem

$$e^T \Sigma^{-1} e = H_p, \quad (9)$$

gdzie:  $H_p$  – kwantyl rzędu  $p$  rozkładu chi kwadrat o  $J$  stopniach swobody,

$e$  – współrzędne punktów na powierzchni hiperelipsoidy,  
 $p$  – poziom ufności obszaru niepewności.

Jeżeli wszystkie błędy są nieskorelowane (zerowe kowariancje), to osie hiperelipsoidy pokrywają się z osiami układu współrzędnych. W przestrzeni dwuwymiarowej hiperelipsoidy przechodzą w elipsy. Na rys. 1b pokazano elipsę błędów skorelowanych, a na rys. 1c – elipsę błędów nieskorelowanych. Wartości błędów  $e_j$  są uogólnionymi błędami granicznymi z przestrzeni jednowymiarowej.

### 3. NIEDOKŁADNOŚĆ WARTOŚCI FUNKCJI DLA DANEJ WARTOŚCI ARGUMENTU

Niech dwie wielkości  $x$  i  $y$  są od siebie zależne, zależność tę, bliżej nieznaną, zapiszemy w postaci funkcji (charakterystyki)

$$y = g(x). \quad (10)$$

Jednym z często wykonywanych pomiarów jest wyznaczanie wartości wielkości funkcji  $y$  przy danej wartości  $\hat{x}$  argumentu  $x$ . Mierzandem jest tu

$$\hat{y} = g(\hat{x}). \quad (11)$$

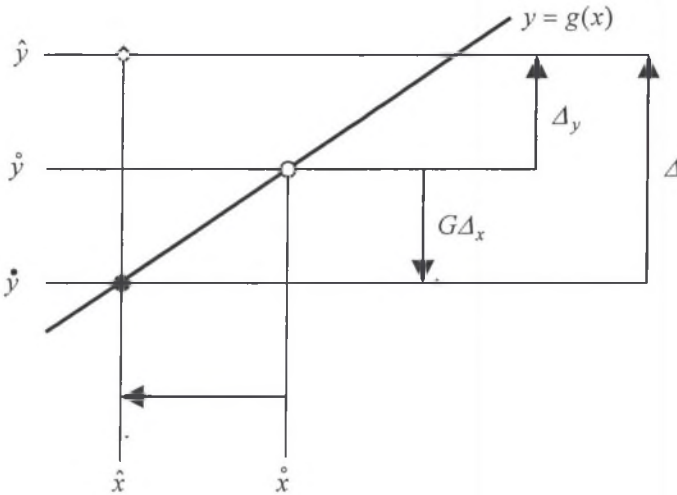
Pomiar polega na ustawieniu wartości  $\hat{x}$  wielkości  $x$  (za pomocą nastawnika i miernika lub wyskalowanego kalibratora) i zmierzeniu wartości  $\hat{y}$  wielkości  $y$ . Wartości  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$  są w stosunku do wartości prawdziwych obarczone błędami  $\Delta_x$  i  $\Delta_y$ . Błąd pomiaru mierzandem

(11) wynosi (patrz rys. 2)

$$\Delta = \hat{y} - \overset{\circ}{y} = \Delta_y + \overset{\circ}{y} - g(\hat{x}) = \Delta_y + g(\overset{\circ}{x}) - g(\overset{\circ}{x} + \Delta_x), \quad (12)$$

i ostatecznie

$$\Delta = \Delta_y - G \Delta_x, \quad G = \left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=\overset{\circ}{x}}. \quad (13)$$



Rys. 2. Przenoszenie błędu współrzędnej  $x$  do współrzędnej  $y$   
Fig. 2. Error transfer from  $x$  to  $y$

Tak więc błąd pomiaru mierzandemu dla danej wartości argumentu jest równy różnicy błędu pomiaru wartości funkcji i błędu pomiaru (lub ustawienia) wartości argumentu pomnożonego przez pochodną funkcji (tangens kąta nachylenia charakterystyki).

Dalej omówimy kilka zastosowań wielowymiarowego modelu niedokładności i reguł przenoszenia błędów między współzrędnymi.

#### 4. KALIBRACJA MIERNIKA

Niech  $x$  będzie wartością wielkości mierzonej, a  $y$  wskazaniem miernika cyfrowego lub analogowego. Zarówno  $x$ , jak i  $y$  są liczbami:

- $x$  – wartością liczbową wielkości mierzonej wyrażoną w jednostkach (lub krotnościach jednostki) wielkości mierzonej,
- $y$  – liczbą wskazaną bezpośrednio przez miernik cyfrowy lub wyznaczoną przez porównanie odchylenia wskazówki miernika analogowego z podziałką wyskalowaną w jednostkach wielkości mierzonej.

Prawdziwy, i oczywiście nieznanym, związek między wartością mierzoną a wskazaniem oznaczymy funkcją

$$x = h(y). \quad (14)$$

Idealny miernik powinien być opisany równaniem

$$x = y. \quad (15)$$

Główną operacją składową kalibracji (czyli wzorcowania) jest wyznaczanie poprawek  $\nu$  (błędów poprawnych lub umownie prawdziwych) i ocena niedokładności [błędów granicznych  $D_\nu$ , niepewności standardowych  $u(\nu)$ , niepewności rozszerzonych  $U(\nu)$ ] poprawek. Dane wejściowe do wyznaczania poprawek mają postać

$$\{ \hat{x}(n), \hat{y}(n) \mid n = 1, 2, \dots, N \}, \quad (16)$$

gdzie:  $\hat{x}(n)$  – wartość umownie prawdziwa (zwana także wartością poprawną) wprowadzona na wejście miernika,

$\hat{y}(n)$  – odczytana (odebrana) wartość wskazania,

$n, N$  – numer poprawki i liczba wszystkich poprawek.

Wartości  $\hat{x}(n)$  i  $\hat{y}(n)$  są, w stosunku do wartości prawdziwych  $\check{x}(n)$  i  $\check{y}(n)$ , obarczone błędami  $\Delta_x(n)$  i  $\Delta_y(n)$ , ograniczonymi przez błędy graniczne  $D_x$  i  $D_y$ :

$$|\Delta_x(n)| \leq D_x \quad \text{i} \quad |\Delta_y(n)| \leq D_y. \quad (17)$$

Miarą niedokładności wartości  $\hat{x}(n)$  i  $\hat{y}(n)$  mogą być niepewności standardowe  $u(\hat{x})$  i  $u(\hat{y})$ , jeżeli taka metoda oceny niedokładności zostanie przyjęta.

Wyznaczając poprawki  $\nu(n)$ , ustala się zwykle wartości  $\hat{y}(n)$ , czyli wybrane wskazania i tak dobiera wartości  $x$  na wejściu miernika, aby jego odczytane (odebrane) wskazania były równe  $\hat{y}(n)$ . Wartości na wejściu miernika dobiera się za pomocą nastawnika, a ich wartości  $\hat{x}(n)$  mierzy odpowiednio dokładnym przyrządem pomiarowym, lub dobiera się za pomocą wyskalowanego kalibratora, a ich wartości  $\hat{x}(n)$  odczytuje się z jego nastaw. Możliwe jest także ustawianie z góry zadanych wartości  $\hat{x}(n)$  na wejściu miernika i odczytywanie odpowiadających im wskazań  $\hat{y}(n)$ . Błąd  $\Delta_x$  to błąd pomiaru lub błąd nastawienia wartości na wejściu miernika. Błąd  $\Delta_y$  to błąd niejednoznaczności lub nieoznaczoności wskazań miernika, składa się on z błędów odczytu wskazania i nastawienia zera spowodowanych nieczułością oka, błędu związanego z progiem pobudliwości, zdolnością rozdzielczą, strefą martwą i niestabilnością miernika. Jeżeli za miarę niedokładności przyjmuje się niepewność standardową, to przy jej obliczaniu pojawia się problem randomizacji błędów i ich rozkładów. Warto tu przypomnieć, że warunkiem randomizacji jest stałość  $\hat{y}(n)$  lub  $\hat{x}(n)$ , zależnie od tego, czy kalibrację wykonuje się przy z góry ustalonej wartości  $\hat{y}(n)$  czy  $\hat{x}(n)$ . Dalej, należy dodać, że wbrew [5] i [6], nie ma żadnych racjonalnie uzasadnionych przesłanek, aby przyjmować dla jakichkolwiek błędów rozkłady inne niż normalne.

Jako estymatę poprawki przyjmuje się wartość

$$\hat{\nu}(n) = \hat{y}(n) - \hat{x}(n), \quad (18)$$

tymczasem prawdziwa wartość poprawki powinna być liczona [przy nastawianym  $\hat{y}(n)$ ] jako

$$\hat{v}(n) = \hat{y}(n) - \hat{x}(n) - H \Delta_y(n), \quad H = \frac{dh(y)}{dy} \approx 1, \quad (19)$$

gdyż wartość na wejściu należy odnieść dokładnie do wartości  $\hat{y}(n)$ . Jest więc

$$\hat{v}(n) = \hat{y}(n) - \hat{x}(n) + \Delta_x(n) - \Delta_y(n). \quad (20)$$

Stąd już błąd poprawki wyraża się jako

$$\Delta v(n) = \Delta_x(n) - \Delta_y(n). \quad (21)$$

Miarą niedokładności poprawki może być błąd graniczny liczony metodą najgorszego przypadku

$$|\Delta v(n)| \leq D_v = D_x + D_y, \quad (22)$$

błąd graniczny liczony metodą rozkładu losowego

$$|\Delta v(n)| \leq D_v = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}, \quad (23)$$

lub niepewność rozszerzona

$$U(v) = k_p \sqrt{u^2(\hat{x}) + u^2(\hat{y})}, \quad (24)$$

gdzie  $k_p$  – współczynnik rozszerzenia na poziomie ufności  $p$ .

Jeżeli niepewności standardowe  $u(\hat{x})$  i  $u(\hat{y})$  są obliczane z błędów granicznych  $D_x$  i  $D_y$  identyfikowanych z niepewnościami rozszerzonymi  $U(\hat{x})$  i  $U(\hat{y})$  przy tej samej wartości współczynnika rozszerzenia  $k_p$ , to niepewność rozszerzona  $U(v)$  poprawki jest równa jej błędowi granicznemu  $D_v$  liczonemu metodą rozkładu losowego [wzór (23)].

## 5. PRÓBKOWANIE PRZEBIEGU CZASOWEGO

Niech

$$x = g(t), \quad (25)$$

będzie przebiegiem czasowym wielkości  $x$ , funkcja  $g()$  jest oczywiście nieznaną. Reprezentuje ją ciąg próbek

$$\{\hat{x}(n); \hat{t}(n) = n\tau \mid n = 1, 2, \dots, N\}, \quad (26)$$

gdzie:  $\hat{x}(n)$  – estymata wartości wielkości  $x$  w chwili  $\hat{t}(n)$ ,

$\hat{t}(n)$  – zakładana chwila próbkowania,

$\tau$  – zakładany okres próbkowania,

$n, N$  – numer próbki i liczba wszystkich próbek.

Wartości  $\hat{x}(n)$  i  $\hat{t}(n)$  są, w stosunku do swoich wartości prawdziwych, obarczone błędami  $\Delta_x(n)$  i  $\Delta_t(n)$ . Próbkki (26) są faktycznie rozłożone nierównomiernie w czasie. Dokładniejszą reprezentacją ciągu (25) jest ciąg próbek sprowadzonych do chwil  $\hat{t}(n) = n\tau$ . Takie próbki, rozłożone w czasie równomiernie, są obarczone błędami

$$\Delta x(n) = \Delta_x(n) - G(n)\Delta_t(n) \quad ; \quad G(n) = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=n\tau} . \quad (27)$$

Osobnym zagadnieniem, którym tu nie będziemy się zajmowali, jest wyznaczanie pochodnych  $G(n)$ . Powyższe można uogólnić na równoczesne próbkowania wielu wielkości.

## 6. IDENTYFIKACJA MODELU

Załóżmy, że obiekt fizyczny o wejściu  $x$  i wyjściu  $y$  jest dokładnie opisany równaniem

$$y = g(x) , \quad (28)$$

oczywiście nieznanym. Równanie to aproksymujemy liniowym równaniem modelu

$$\tilde{y} = a_0 + a_1 x . \quad (29)$$

Danymi wejściowymi do procesu identyfikacji równania (29) jest zbiór par tzw. obserwacji wejścia i wyjścia

$$\{ \hat{x}(n), \hat{y}(n) \mid n = 1, 2, \dots, N \} , \quad (30)$$

obarczonych w stosunku do wartości prawdziwych błędami obserwacji

$$|\Delta_x(n)| \leq D_x \quad \text{i} \quad |\Delta_y(n)| \leq D_y . \quad (31)$$

O błędach tych przyjmuje się hipotezę, że są one realizacjami zmiennych losowych o rozkładach normalnych

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &\in N(0, \sigma_x^2) \quad , \quad \sigma_x = D_x/k \\ \Delta_y &\in N(0, \sigma_y^2) \quad , \quad \sigma_y = D_y/k \end{aligned} \right\} , \quad (32)$$

gdzie

$$k = |z|_p \quad (33)$$

kwantyl rzędu  $(1+p)/2$  rozkładu normalnego standaryzowanego, zwany także wartością  $(1-p)$  rozkładu  $N(0, 1)$  [3]. Technika eksperymentu i metrologia klasyczna przyjmuje zwykle  $k=3$ , co odpowiada prawdopodobieństwu objęcia  $p=0,9973$ . Teoria niepewności przeniesiona na grunt techniki eksperymentu lansowałaby przyjmowanie wartości  $k=2$ , co odpowiadałoby  $p=0,9545$ . Wartości współczynników równania modelu (29) wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów, prowadzącą do tak zwanych równań normalnych (patrz [4], [7]), które najprościej jest zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} N & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}.$$

W równiach tych przyjęto oznaczenia:

$$\sum x = \sum_{n=1}^N x(n), \quad \sum x^2 = \sum_{n=1}^N x^2(n), \quad \sum y = \sum_{n=1}^N y(n), \quad \sum xy = \sum_{n=1}^N x(n)y(n).$$

Różnice między wartościami wyjścia obliczonymi z równania modelu ze zidentyfikowanymi współczynnikami a wartościami zaobserwowanymi to błędy modelu

$$\Delta_M y(n) = \tilde{y}(n) - \hat{y}(n) = a_0 + a_1 \hat{x}(n) - \hat{y}(n). \quad (34)$$

O błędach tych przyjmuje się założenie, że są realizacjami zmiennej losowej o rozkładzie normalnym

$$\Delta_M y \in N(0, \sigma_M^2). \quad (35)$$

Estymatę wariancji błędu modelu oblicza się z zależności [4]

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^N \Delta_M^2 y(n). \quad (36)$$

Gdyby równanie obiektu (28) było faktycznie liniowe, błąd modelu byłby spowodowany tylko błędami obserwacji, błędem  $\Delta_y$  i błędem  $\Delta_x$ . Całkowity błąd obserwacji odniesiony do wyjścia wynosi, zgodnie z zależnością (13)

$$\Delta_0 y(n) = \Delta_y(n) - a_1 \Delta_x(n). \quad (37)$$

Traktujemy go jako realizację zmiennej losowej o rozkładzie normalnym

$$\Delta_0 \in N(0, \sigma_0^2) \quad , \quad \sigma_0^2 = \sigma_y^2 + a_1^2 \sigma_x^2 = \frac{1}{k^2} (D_y^2 + a_1^2 D_x^2). \quad (38)$$

Na błąd modelu, w ogólnym przypadku, składa się zarówno błąd obserwacji, jak i błąd wynikający z nieadekwatności przyjętego modelu. Porównując wariancję błędu obserwacji (38) i estymatę wariancji błędu modelu (36), można weryfikować hipotezę o liniowości równania modelu.

Powyższe rozważania, odnoszące się do obiektów jednowejściowych i liniowego równania modelu, uogólnia się na obiekty wielowejściowe i równania nieliniowe.

## 7. REGUŁY PRZENOSZENIA WEKTORA BŁĘDU PRZEZ PRZETWORNIK

Rozważać będziemy przetwornik wielowymiarowy, realizujący operację przetwarzania wielu sygnałów. Niech  $x$  i  $y$  będą wektorami

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_J \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix}, \quad (39)$$



modelującymi ciąg  $J$  sygnałów wejściowych  $(x_1, \dots, x_J)$  przetwarzanych w przetworniku wielowymiarowym w ciąg  $K$  sygnałów wyjściowych  $(y_1, \dots, y_K)$  według zależności

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_J) \\ \vdots \\ g_K(x_1, \dots, x_J) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

którą nazwiemy wielowymiarową funkcją przetwarzania. Niech dalej sygnały wejściowe będą obciążone błędami modelowanymi wektorem losowym o łącznym rozkładzie normalnym

$$\Delta_x = \begin{bmatrix} \Delta_{x1} \\ \vdots \\ \Delta_{xJ} \end{bmatrix} \in \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma_x), \quad (41)$$

gdzie  $\Sigma_x$  – macierz kowariancyjna randomizowanego błędu  $\Delta_x$  na wejściu przetwornika.

Błąd  $\Delta_x$  można przenieść na wyjście przetwornika. Błąd przeniesiony na wyjście,  $\Delta_y$ , i jego macierz kowariancyjną  $\Sigma_y$  można obliczyć z zależności

$$\left. \begin{aligned} \Delta_y &= \mathbf{G} \Delta_x \\ \Sigma_y &= \mathbf{G} \Sigma_x \mathbf{G}^T \end{aligned} \right\}, \quad (42)$$

gdzie  $\mathbf{G}$ , czyli macierz czułości, jest utworzona z pochodnych cząstkowych

$$\mathbf{G} = [G_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_K}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_K}{\partial x_J} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Warunkiem stosowalności reguły przenoszenia błędów (42) jest istnienie i ograniczoność pochodnych  $G_{jk}$ . Warunek ten prowadzi do pewnych komplikacji, gdy elementami przetwornika wielowymiarowego są przetworniki analogowo-cyfrowe. Problemami tymi nie będziemy się jednak tu zajmowali. Pominiemy również problem uwzględniania błędów własnych przetwornika. Powiemy tylko, że problemy te mają rozwiązanie.

Jeżeli liczba wejść  $J$  przetwornika wielowymiarowego jest równa liczbie  $K$  jego wyjść i jeżeli istnieje odwrotne równanie przetwarzania

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(y_1, \dots, y_J) \\ \vdots \\ h_J(y_1, \dots, y_J) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

to błędy można przenosić z wyjścia na wejście. Reguła przenoszenia błędów i ich macierzy kowariancyjnych z wyjścia na wejście ma postać

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x &= \mathbf{H} \Delta_y \\ \Sigma_x &= \mathbf{H} \Sigma_y \mathbf{H}^T \end{aligned} \right\}, \quad (45)$$

gdzie  $H$  jest macierzą utworzoną z pochodnych cząstkowych

$$H = [H_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_K}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_K}{\partial y_J} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Macierz  $H$  jest odwrotnością macierzy  $G$ .

## Literatura

1. Jaworski, J. M., Kurnicki, A.: *Niedokładność pomiarów magnetycznych a niepewność pomiaru*. VI Krajowe Sympozjum Pomiarów Magnetycznych. Kielce 2000. Prace Komisji Metrologii PAN Oddziału PAN w Katowicach, s. 177-188.
2. Michniewicz E., Jaworski, J. M., Stępniewski G.: *Niedokładność pomiarów wielowymiarowych*, Konferencja PODSTAWOWE PROBLEMY METROLOGII – PPM'03. Gliwice-Ustroń 2003. Opublikowane w: Prace Komisji Metrologii Oddziału PAN w Katowicach, seria Konferencje Nr 5, s. 357-368.
3. Korn, G.A., Korn, T.M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*. PWN, Warszawa 1983.
4. Mańczak, K.: *Technika planowania eksperymentu*. WNT, Warszawa 1976.
5. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO 1993, 1995. Tłumaczenie polskie: *Wyrażanie niepewności pomiaru*. Przewodnik. GUM, 1999.
6. *Expression of Uncertainty in Measurement in Calibration*. Publication Reference EA-4/02. European Cooperation for Accreditation. Tłumaczenie polskie: *Wyrażanie niepewności pomiaru przy wzorcowaniu*. GUM, 1999.
7. Jaworski, J. M., Morawski, R. Z., Olędzki, J. S.: *Wstęp do metrologii i techniki eksperymentu*. WNT, Warszawa 1992.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Tadeusz Skubis

Wpłynęło do Redakcji dnia 7 grudnia 2004

## Abstract

Measurand and result of the measurement, which have a form of number series, can be treated as points in Euclidean multi-dimensional space. Inaccuracy of such measurement is described by the series of the coordinate error. The errors are randomised and their joint normal distribution is assumed. Measure of inaccuracy is the confidence ellipsoid – generalization of the confidence interval in one-dimensional space.

To calculate error of some measurement it is necessary to transfer the error of the one coordinate to another. For example, to calculate error of measurement of function value for given argument value we must transfer error of argument to function value. The rule of such transferring is given.

The concept of multi-dimensional errors and rule of error transferring are used in instrument calibration, time-function sampling, identification of model equation, and error analysis of multi-dimensional signal conversion.