P 5341/83

ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

AUTOMATYKA

Z. 70
GLIWICE
1983

P 3341/83

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 770

WITOLD PEDRYCZ

STEROWANIE I SYSTEMY ROZMYTE

GLIWICE 1983

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. inż. Edmund Lipiński
Doc. dr hab. inż. Ernest Czogała

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), *Anna Skrzywan-Kosek* (redaktor działu), *Elżbieta Stinzing* (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Anna Błażkiewicz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł. 160+85 Ark. wyd. 6,4 Ark. druk. 7 Papier drukowy kl. V 70x100, 70 g
Oddano do druku 19.04.1983 Podpis. do druku 3.05.1983 Druk ukończ. w maju 1983
Zamówienie 618/83 Z-23 Cena zł 64,–

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

Str.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ 5

1. WSTĘP 7

2. PROBLEMY KONSTRUKCJI REGULATORÓW ROZMYTYCH 11
   2.1. Konstrukcja regulatora rozmytego. Analiza struktury regulatora 11
   2.2. Zastosowanie zbiorów probabilistycznych w konstrukcji regulatora 25

3. TEORIOMNOGOŚCIOWE UJĘCIE OPISU SYSTEMÓW NIEDETERMINISTYCZNYCH 33

4. NORMY TRÓJKĄTNE 36
   4.1. Normy trójkątne, definicje i przykłady 36
   4.2. Działania na zbiorach rozmytych indukowane przez normy trójkątne 40

5. ROZWIĄZYWANIE ROZMYTYCH RÓWNAŃ RELACYJNYCH 43
   5.1. Rozmyte równania relacyjne $Y = X \square R$ i równania dualne ... 43
   5.2. Rozwiązywanie złożonych równań relacyjnych 53

6. METODY NUMERYCZNE W ROZWIĄZYWANIU PROBLEMÓW ROZMYTYCH RÓWNAŃ RELACYJNYCH 60
   6.1. Numeryczne rozwiązywanie równań relacyjnych $\underline{x} \square R = \underline{y}$ 60
   6.2. Dekompozycja relacji rozmytych 66

7. PROBLEMY IDENTYFIKACJI I STEROWANIA W SYSTEMACH ROZMYTYCH 69
   7.1. Metoda identyfikacji w systemach rozmytych 69
   7.2. Numeryczne rozwiązywanie wybranych problemów identyfikacji i sterowania 77
   7.3. Konstrukcja modeli rozmytych za pomocą dyskretyzacji rozmytej 83

8. ZASTOSOWANIE METOD RELACYJNYCH RÓWNAŃ ROZMYTYCH W ZAGADNIENIACH ARYTMETYKI LICZB ROZMYTYCH I PODEJMOWANIU DECYZJI 91
   8.1. Arytmetyka liczb rozmytych. Równania ze współczynnikami rozmytymi 91
   8.2. Rozmyte równania relacyjne jako model procesów podejmowania decyzji 95

9. ZAKOŃCZENIE 98

LITERATURA 99

STRESZCZENIA 105

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A - zbiór rozmyty, $A: X \to [0,1]$

$F(X)$ - rodzina zbiorów rozmytych zdefiniowanych w X

$X \times Y$ - iloczyn kartezjański przestrzeni X i Y

$A \cap B$ - iloczyn zbiorów rozmytych A i B, $(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x))$

$A \cup B$ - suma zbiorów rozmytych A i B, $(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x))$

$\subset$ - inkluzja zbiorów (relacji) rozmytych, $A \subset B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$

$\square$ - złożenie sup-t

$\triangle$ - złożenie inf-s

$\circ$ - złożenie sup-min

$\blacksquare$ - koniec dowodu

1. WSTĘP

Teoria zbiorów rozmytych [108] [109] została wprowadzona prawie 20 lat temu w celu umożliwienia przetwarzania informacji w obecności czynników niepewności nie mających charakteru probabilistycznego. Pozwoliło to na stworzenie modeli matematycznych dla nieprecyzyjnie określonych pojęć i koncepcji typowych w działalności człowieka. Stosowanie metod statystycznych było w tych przypadkach poważnie kwestionowane,głównie z powodu szeregu dodatkowo czynionych założeń i braku wystarczającej liczby danych, które stanowią podstawę tworzenia każdego modelu o charakterze probabilistycznym. Ponadto w związku z szybkim i stałym rozwojem komputerów i technik komputerowych pojawiła się tendencja budowy coraz bardziej złożonych i wieloparametrowych modeli matematycznych [86]. Może ona doprowadzić do zjawiska powstania coraz większych trudności wynikłych m.in. z konieczności wyznaczania współczynników modelu i ich właściwej interpretacji w kontekście zastosowań. W związku z tym warto przypomnieć tzw.zasadę niezgodności sformułowanę przez Zadeha [113] [114] w sposób następujący:

> "... nasza możliwość stawiania coraz bardziej precyzyjnych i nadal istotnych ocen o zachowaniu systemu maleje, aż do osiągnięcia punktu granicznego, gdy precyzja i istotność stają się wzajemnie wykluczającymi cechami".

W świetle powyższych uwag rozpatrzmy jedno z typowych zastosowań teorii zbiorów rozmytych w sterowaniu. Rozważając aktualny stan teorii sterowania można zauważyć dwa charakterystyczne fakty [38] [112]:

- konieczność stosowania precyzyjnych danych,
- coraz wyższy stopień abstrakcji i wprowadzanie zaawansowanych metod matematycznych.

Obok wielu sukcesów w dziedzinach, gdzie niezbędne modele mogą być wyznaczone w sposób precyzyjny, istnieje jeszcze grupa problemów sterowania złożonymi procesami, gdzie budowa modeli ogólnie stosowanych napotyka na istotne ograniczenia. Okazuje się, że procesy te są sterowane w sposób poprawny przez człowieka-operatora procesu. Człowiek posiada wysoką umiejętność oceny sytuacji procesu i interpretacji lingwistycznych reguł sterowania. Rozumowanie przeprowadzone podczas sterowania ma głównie charakter jakościowy. W związku z tym interesujące byłoby zaprojektowanie regulatora bazującego na nieprecyzyjnej, słownej formie otrzymanych danych i naśladującego sposób postępowania człowieka. Jeden z najwcześniejszych kierunków polegał na modelowaniu zachowania człowieka podczas sterowania

przy użyciu regulatora PI lub PID z elementami nieliniowymi [88]. Zbiory rozmyte pozwoliły na inne ujęcie problemu i budowę regulatora bazującego na lingwistycznych regułach sterowania. Podstawy budowy regulatora rozmytego zawarte zostały w pracach [54] [55] [57]. Pierwsze eksperymenty przeprowadzono na Uniwersytecie Londyńskim (E.H. Mamdani [54] [56] [57]) i Uniwersytecie Technicznym w Delft (H.R. van Nauta Lemke, W.J.M. Kickert [48] [61]) w latach 1974-76. Otrzymane wyniki okazały się obiecujące i porównywalne z rezultatami sterowania przy użyciu regulatorów PID. Ujawniło się też kilka zalet regulatora rozmytego w porównaniu z istniejącymi algorytmami sterowania. W wyniku dalszych badań nad regulatorem rozmytym dokonano rozszerzeń i modyfikacji, np. zaproponowano zastosowanie rozmytej logiki Łukasiewicza [67] [98]. W przeglądowych pracach [38] [94] zawarto analizę otrzymanych wyników teoretycznych i aplikacyjnych. Rozpoczęto również prace nad sposobami adaptacji regulatora rozmytego [57]. Przeanalizowano zagadnienie stabilności regulatora [11] [12], zgodności i zupełności jego reguł [23] [28]. Analiza regulatora rozmytego jako układu podejmowania decyzji została zawarta w pracy [13]. Pomimo dużego nakładu badań, problem formalnego opisu regulatora rozmytego nie został w pełni rozwiązany.

Od czasu pojawienia się pojęcia zbioru rozmytego przeprowadzono wiele badań o charakterze podstawowym i aplikacyjnym. Do głównych dziedzin, gdzie zbiory rozmyte znalazły swoje trwałe miejsce jako narzędzie dla tworzenia algorytmów przetwarzania informacji lingwistycznej, można zaliczyć:

- podejmowanie decyzji [2], [17]-[19], [23], [46], [47], [64],
- analiza i synteza systemów niedeterministycznych (systemów rozmytych) [22], [24]-[26], [28], [31], [41]-[45], [62], [67], [68], [71]-[75], [77] [95], [98], [111],
- rozpoznawanie obrazów [3], [5], [9], [52], [76], [80],
- badania operacyjne [89], [91], [93], [102],
- diagnostyka systemów i diagnoza medyczna [20], [21], [82].

Na tle publikacji na tamat zbiorów rozmytych widać szerokie możliwości zastosowań prezentowanych zagadnień. Brak jest natomiast wystarczająco ogólnej metody, w ramach której można formułować i rozwiązywać problematykę w zakresie systemów rozmytych. W niniejszej pracy przedstawiono propozycję rozmytych równań relacyjnych z normami trójkątnymi użytecznymi do opisu tych systemów. Szczególny przypadek tych równań z sup-min (inf-max) operatorem złożenia był dyskutowany przez Sancheza w 1976 r. [81]. Stwierdzono możliwość stosowania ich w opisie zagadnień diagnostyki medycznej [82]. W pracy niniejszej wykazano ogólność i przydatność wprowadzonych równań dla rozwiązywania problemów systemów rozmytych, podejmowania decyzji i arytmetyki liczb rozmytych.

Celem niniejszej pracy jest:

- prezentacja aktualnego stanu badań nad regulatorami rozmytymi jako typowym przykładem zastosowań zbiorów rozmytych w dziedzinie sterowania,

- przedstawienie propozycji uogólnienia regulatora rozmytego istotnych z punktu widzenia zastosowań,
- konstrukcja ogólnej klasy rozmytych równań relacyjnych w oparciu o normy trójkątne,
- przedstawienie analitycznych i numerycznych metod ich rozwiązywania,
- analiza i synteza systemów rozmytych,
- ocena możliwości stosowania rozmytych równań relacyjnych jako aparatu dla formułowania i rozwiązywania problemów w dziedzinach zastosowań teorii zbiorów rozmytych.

Wymienione powyżej cele pracy realizowane będą przy uwzględnieniu teoretycznych ram wyznaczonych przez rozmyte równania relacyjne.

Praca składa się z 9 rozdziałów. Rozdział 2 zawiera zagadnienia regulatora rozmytego oraz metody jego konstrukcji i oceny działania. Następnie przedstawiono zastosowanie zbiorów probabilistycznych w tworzeniu relacji regulatora na bazie informacji rozmytej i probabilistycznej. W rozdziale 3 zawarto koncepcję opisu systemów niedeterministycznych w formie równań relacyjnych. Pojęcie normy trójkątnej, rozmytych równań relacyjnych oraz metody ich rozwiązywania stanowią treść rozdziałów 4, 5 i 6. W rozdziale 7 i 8 omówiono problemy teorii systemów rozmytych, arytmetyki liczb rozmytych i podejmowania decyzji sformułowana i rozwiązane w ramach teorii równań relacyjnych.

W pracy zastosowano symbolikę i terminologię ogólnie przyjętą w teorii zbiorów i teorii zbiorów rozmytych.

Autor pragnie w tym miejscu złożyć podziękowanie Panu Prof. dr hab. R. Gessingowi za konstruktywne dyskusje, które pozwoliły na pełniejszą prezentację omawianych zagadnień.

2. PROBLEMY KONSTRUKCJI REGULATORÓW ROZMYTYCH

2.1. Konstrukcja regulatora rozmytego. Analiza struktury regulatora

Podstawowa struktura regulatorów rozmytych jest ściśle związana ze zbiorem lingwistycznych reguł sterowania (implikacji) reprezentujących strategię sterowania człowieka-operatora. Wiążę one aktualny stan procesu (systemu) i sterowanie, które powinno zostać podjęte w celu uzyskania konkretnego celu. Reguły te mogą być typu:

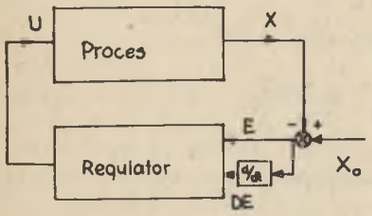
- jeżeli stan procesu jest X_i, to sterowanie wynosi U_{j_i} (2.1)
  $i = 1,2,\ldots,N$.

X_i i U_j są zbiorami rozmytymi zdefiniowanymi w przestrzeni X i U, $X_i \in F(X)$, $U_j \in F(U)$, $j = 1,2,\ldots,M$.

Zazwyczaj [11], [12], [15], [48], [49], [54] rozpatruje się reguły sterowania (implikacje) o następującej postaci:

- jeżeli błąd jest równy E_i i zmiana błędu jest równa DE_j, to sterowanie jest równe $U_{k_{ij}}$, (2.2)

$i = 1,2,\ldots,N$, $j = 1,2,\ldots,M$, $k = 1,2,\ldots,K$, gdzie E_i, DE_j, U_k są zbiorami rozmytymi określonymi w przestrzeniach E, DE i U odpowiednio.



Rys. 2.1. Struktura proces-regulator rozmyty

Rysunek 2.1 przedstawia strukturę proces-regulator rozmyty. Reguły sterowania (2.1) lub (2.2) zawierające zbiory rozmyte, które reprezentują stan procesu i odpowiednie sterowanie, są przedstawione w formie relacji rozmytych. Globalna rozmyta relacja regulatora R określona w iloczynie kartezjańskim odpowiednich przestrzeni tworzona jest jako suma teoriomnogościowa relacji składowych.

Stąd otrzymujemy:

- dla reguł (2.1)

$$R = \bigcup_{i=1,2,\ldots,N} R_i \qquad (2.3)$$

$$R(x,u) = \max_{1\leq i\leq N}\left[R_i(x,u)\right], \tag{2.4}$$

$x\in X$, $u\in U$,

- dla reguł (2.2)

$$R = \bigcup_{\substack{i=1,2,\ldots,N\\ j=1,2,\ldots,M}} R_{ij} \tag{2.5}$$

$$R(e,de,u) = \max_{\substack{1\leq j\leq N\\ 1\leq j\leq M}}\left[R_{ij}(e,de,u)\right], \tag{2.6}$$

$e\in E$, $de\in DE$, $u\in U$.

Relacje składowe (R_i, R_{ij}) obliczane są zgodnie ze wzorami:

$$R_i = X_i \rightarrow U_{j_i} \tag{2.7}$$

$$R_{ij} = (E_i \times DE_j) \rightarrow U_{k_{ij}}, \tag{2.8}$$

"$\times$" oznacza iloczyn kartezjański zbiorów, zaś "$\rightarrow$" reprezentuje operator implikacji. Zazwyczaj w literaturze [31], [49], [56], [57] iloczyn kartezjański definiuje się następująco:

$$(E_i \times DE_j)(e,de) = \min\left[E_i(e),\ DE_j(de)\right],\quad e\in E,\ de\in DE. \tag{2.9}$$

Relacje (2.7) i (2.8) obliczamy z zależności:

$$R_i(x,u) = f\left[X_i(x),\ U_{j_i}(u)\right], \tag{2.10}$$

$$R_{ij}(e,de,u) = f\left[\min(E_i(e),\ DE_j(de)),\ U_{k_{ij}}(u)\right], \tag{2.11}$$

$e\in S$, $e\in E$, $de\in DE$, $u\in U$, gdzie f oznacza operator implikacji. Obszerny wykaz definicji implikacji dla zbiorów rozmytych można znaleźć w [31] [47] [50], [51], [60]. Dwie definicje implikacji przytoczono poniżej:

$$"\rightarrow_1" \quad f(a,b) = \min(a,b), \tag{2.12}$$

$$"\rightarrow_2" \quad f(a,b) = \max(1-a,b), \tag{2.13}$$

$\in [0,1]$.

Najczęściej w zastosowaniach wykorzystuje się operator implikacji zdefiniowany w (2.12).

Zastosowanie złożeniowej reguły wnioskowania [61], [113], [114] pozwala na obliczenie dla każdego $E'\in F(E)$, $DE'\in F(DE)$ zbioru rozmytego sterowania $U'\in F(U)$:

$$U' = E' \circ DE' \circ R, \tag{2.14}$$

czyli:

$$U'(u) = \sup_{\substack{e\in E\\ de\in DE}}\left[\min(E'(e),\ DE'(de),\ R(e,de,u))\right], \tag{2.15}$$

$u\in U$.

Złożeniowa reguła wnioskowania zapisana powyżej jest niczym innym jak schematem reguły wnioskowania modus ponens dla logiki rozmytej [113], którą można również zapisać w formie schematu:

$$\frac{E',\ DE',\ R}{U'}. \tag{2.16}$$

Reguły regulatora rozmytego w postaci implikacji (2.1) lub (2.2) mogą być z łatwością rozszerzone dla większej liczby przestrzeni [15]. Przykładowo, dla K przestrzeni $X_1, X_2, \ldots, X_K$ reguły przyjmują formę:

$$(X_i^1 \times X_j^2 \times \ldots \times X_1^K) \rightarrow U_{t_{ij\ldots 1}}, \tag{2.17}$$

$$X_i^1 \in F(X_1), i=1,2,\ldots,n_1, X_j^2 \in F(X_2), j=1,2,\ldots,n_2 \ \ldots\ X_1^K \in F(X_K),$$

$$1 = 1,2,\ldots,m_K,\ t = 1,2,\ldots,m.$$

Wielkością wyjściową regulatora rozmytego jest zbiór rozmyty $U'\in F(U)$, który przyporządkowuje każdemu elementowi $u\in U$ wartość z przedziału $[0,1]$. W celu wyznaczenia dokładnie jednej wartości $u_0\in U$, która traktowana będzie jako wartość sterowania dla procesu, wymagane jest zastąpienie zbioru rozmytego jedną wartością liczbową. W literaturze z tego zakresu zaproponowano szereg sposobów dotyczących rozwiązania tego zagadnienia. Kilka z nich przytoczymy poniżej [11]-[13], [24], [48], [49].

I. Metoda maksimum funkcji przynależności. Wartość $u_0\in U$ obliczymy zgodnie z zależnością:

$$U'(u_0) = \sup_{u\in U} U'(u) \tag{2.18}$$

Metoda ta może być stosowana dla unimodalnych funkcji przynależności. Warto zwrócić uwagę, że ten prosty sposób znajdowania u_0 nie uwzględnia kształtu funkcji przynależności. Tej niedogodności jest pozbawiona

II <u>metoda środka ciężkości</u>. Wartość $u_0 \in U$ wyliczana jest jako środek ciężkości funkcji przynależności U':

$$u_0 = \int_U U'(u)u\,du \Big/ \int_U U'(u)du. \tag{2.19}$$

(zakładamy, że obie całki w powyższym wzorze istnieją).

III <u>Metoda wspomniana w [100] i dyskutowana następnie w [70]</u> wprowadza do (2.19) wartość progową $\alpha \in [0,1]$:

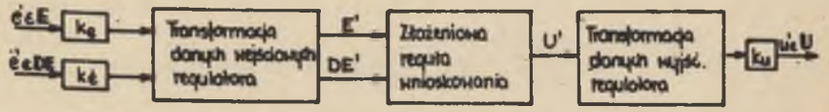
$$u_0(\alpha) = \int_{U_\alpha} U'(u)u\,du \Big/ \int_{U_\alpha} U'(u)du, \tag{2.20}$$

gdzie:

U_α - oznacza α-przekrój zbioru rozmytego U',

$$U_\alpha = \left\{u \in U \,\middle|\, U'(u) > \alpha\right\}. \tag{2.21}$$

Szczegółowa struktura regulatora rozmytego o dwóch wielkościach wejściowych i jednej wyjściowej przedstawiona jest na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Struktura regulatora rozmytego

Przekształcenie nierozmytych danych do postaci odpowiedniej dla zastosowania złożeniowej reguły wnioskowania przeprowadzone jest w bloku: "transformacja danych wejściowych". Transformacja ta może być łatwo przeprowadzona przy zastosowaniu dyskretyzacji rozmytej dyskutowanej w rozdziale 7.

Transformacja danych wyjściowych odbywa się np. w oparciu o jeden ze wzorów przytoczonych powyżej (2.19-2.20). Dobór właściwych wartości współczynników skali k_e, $k_ė$, k_u wielkości wejściowych i wyjściowych regulatora pozwala uzyskać pożądane właściwości dynamiczne układu proces-regulator.

W związku ze strukturą regulatora (rys. 2.2) oraz rodziną reguł sterowania (2.2) powstają zasadnicze pytania dotyczące zbioru lingwistycznych reguł sterowania:

- czy liczba reguł jest wystarczająca,
- czy reguły są niesprzeczne,
- czy istnieje interakcja między poszczególnymi regułami.

Powyższe problemy były przedmiotem wielu prac na temat podstaw regulatora rozmytego [23], [26], [38], [100], [101]. W [26] wprowadzono pojęcie zupełności reguł sterowania, postawiono problem interakcji reguł i zaproponowano wykrywanie efektu występowania reguł sprzecznych poprzez badanie wypukłości relacji regulatora. Można znaleźć również metody charakteryzacji regulatora rozmytego opierające się na pojęciu miar energii zbiorów rozmytych [17]-[19]. Przykładowo, dyskutując regulator (2.2) mówimy, że układ reguł sterowania jest zupełny, jeżeli zbiory rozmyte $E_i \in F(E)$ i $DE_j \in F(DE)$ "pokrywają" całkowicie przestrzenie E i DE, tzn.:

$$\bigwedge_{e \in E} \bigvee_{1 \le i_0 \le N} E_{i_0}(e) > 0, \tag{2.22}$$

$$\bigwedge_{de \in DE} \bigvee_{1 \le j_0 \le M} DE_{j_0}(de) > 0. \tag{2.23}$$

Pojęcie interakcji reguł sterowania zilustrujemy na przykładzie regulatora (2.1). Mówimy, że w regulatorze (2.1) istnieje interakcja reguł, jeżeli zachodzi zależność:

$$\bigvee_{1 \le i \le N} X_i \circ R \neq U_{j_i} \tag{2.24}$$

$$(X_i \circ R)(u) \neq U_{j_i}(u), \tag{2.25}$$

$u \in U$. Możemy udowodnić następujące

TWIERDZENIE 2.1

Jeżeli

- zbiory rozmyte X_j, $j = 1,2,\ldots,N$ są normalne:

$$\bigwedge_{1 \le j \le N} \bigvee_{x_{0j} \in X} X_j(x_{0j}) = 1, \tag{2.26}$$

i

$$R(x,u) = \max_{1 \le i \le N} \left[\min(X_i(x), U_{j_i}(u))\right], \tag{2.27}$$

to

$$\bigwedge_{1 \le j \le N} X_j \circ R \supset U_{j_i} \tag{2.28}$$

$$(X_j \circ R)(z) \geq U_{j_i}(u) \tag{2.29}$$

D o w ó d

$$(X_j \circ R)(u) = \sup_{x \in X}\left\{\min\left\{X_j(x),\ \max_{1 \leqslant i \leqslant N}\left[\min(X_i(x),\ U_{j_i}(u))\right]\right\}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{x \in X}\left[\min(X_j(x),\ X_j(x),\ U_{j_i}(u))\right] = \sup_{x \in X}\left[\min(X_j(x), U_{j_i}(u))\right] \qquad (2.30)$$

co na mocy normalności X_j daje

$$(X_j \circ R)(u) \geqslant U_{j_i}(u), \qquad (2.31)$$

$u \in U$. ■

Warto zwrócić uwagę na warunek, przy spełnieniu którego między regułami nie istnieje interakcja.

TWIERDZENIE 2.2

Jeżeli

$$\text{I} \qquad \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant N} \ \bigvee_{x_{0j} \in X} X_j(x_{0j}) = 1, \qquad (2.32)$$

II zbiory X_j, $j = 1,2,\ldots,N$ są parami rozłączne,

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \quad i \neq j, \qquad (2.33)$$

$$\min(X_i(x),\ X_j(x)) = 0, \qquad (2.34)$$

to

$$\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant N} X_j \circ R = U_{j_i}. \qquad (2.35)$$

D o w ó d

Oznaczmy przez $\mathrm{supp}(X_j)$ nośnik zbioru X_j, $\mathrm{supp}(X_j) = \left\{x \in X \mid X_j(x) > 0\right\}$ i obliczmy $X_j \circ R$,

$$(X_j \circ R(u) = \sup_{x \in X}\left[\min(X_j(x),\ R(x,u))\right] = \max\left\{\sup_{x \in \mathrm{supp}(X_j)}\left[\min(X_j(x), R(x,u))\right],\right.$$

$$\left.\sup_{x \notin \mathrm{supp}(X_j)}\left[\min(X_j(x), R(x,u))\right]\right\} = \sup_{x \in \mathrm{supp}(X_j)}\left[\min(X_j(x), \max_{1 \leqslant i \leqslant N}\left[\min(X_i(x), U_{j_i}(u))\right]\right] =$$

$$= \sup_{x \in \mathrm{supp}(X_j)}\left[\min(X_j(x), U_{j_i}(u))\right] = U_{j_i}, \qquad (2.36)$$

$u \in U$, czyli

$$X_j \circ R = U_{j_i}. \blacksquare \qquad (2.37)$$

W celu oceny stopnia interakcji reguł sterowania rozpatrzmy następującą konstrukcję. Wykorzystując relację R (relację podstawową) dla każdego zbioru rozmytego X_i, $i = 1,2,\ldots,N$ obliczamy zbiór rozmyty U'_{j_i} zgodnie z zależnością:

$$U^1_{j_i} = X_i \circ R^0, \qquad (2.38)$$

($R^0 = R$), $i = 1,2,\ldots,N$. Zakładając, że każdy X_i jest zbiorem normalnym (założenie Tw. 2.1), zachodzi inkluzja $U^1_{j_i} \rightarrow U_{j_i}$. Tworzymy relację

$$R^1 = R^0 \cup \bigcup_{i=1}^{N}\left[X_i \times (U_{j_i} \cup U^1_{j_i})\right], \qquad (2.39)$$

a następnie konstruujemy kolejno $R^2, R^3, \ldots$

$$R^2 = R^1 \cup \bigcup_{i=1}^{N}\left[X_i \times (U_{j_i} \cup U^2_{j_i})\right], \qquad (2.40)$$

$$\vdots$$

gdzie

$$U^2_{j_i} = X_i \circ R^1. \qquad (2.41)$$

W rezultacie, biorąc sumę powyższych relacji $R^0, R^1, R^2, \ldots$ otrzymujemy:

$$\bar{R} = R \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{N}\left[X_i \times (U_{j_i} \cup U^k_{j_i})\right] = \bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{N}\left[X_i \times (U_{j_i} \cup U^k_{j_i})\right], \qquad (2.42)$$

$$U^0_{j_i} = U_{j_i}. \qquad (2.43)$$

Funkcję przynależności relacji $\bar{R}$ można oszacować w sposób następujący:

$$\bar{R}(x,u) = \sup_{\substack{0<k<\infty \\ 1\leq i\leq N}} \left[\min(X_i(x),\ U^k_{j_i}(u))\right] \leq \max_{1\leq i\leq N} X_i(x) = c(x). \quad (2.44)$$

A zatem oszacowanie górne relacji $\bar{R}$ opiera się na znajomości funkcji przynależności sumy zbiorów rozmytych X_i. Liczba

$$\delta(x,u) = c(x) - R(x,u), \quad (2.45)$$

$\delta(x,u) \in [0,1]$ jest miarą interakcji zbioru reguł sterowania regulatora rozmytego.

Przedstawiona powyżej problematyka dotyczy w głównej mierze statycznej oceny poprawności i logicznej spójności regulatora - bardziej złożone zadanie otrzymania zadanych parametrów dynamicznych procesu nie ma jak dotąd ogólnego rozwiązania. Regulator rozmyty posiada wiele parametrów, które mogą być nastrajane w celu uzyskania żądanego działania systemu. Są to m.in. reguły sterowania, funkcje przynależności zbiorów rozmytych tworzących reguły oraz współczynniki skali wielkości wejściowych i wyjściowych. W szeregu prac, w których podejmowano temat poprawy działania regulatora, dobór parametrów odbywał się metodą prób i błędów [11] - [13], [56], [94]. W pracach [13], [49] pojawiła się sugestia traktowania regulatora rozmytego jako przekaźnika wielopoziomego i zastosowania metod funkcji opisującej do analizy jego działania. Należy jednak podkreślić, że regulator rozmyty jest układem nieliniowym, stąd nie można podać w miarę ogólnego schematu doboru jego parametrów. W wielu pracach [13], [100] podkreślano fakt różnego działania regulatora w zależności od wartości błędu. Dla dużych wartości błędu regulator działa szybko i bez większych przeregulowań. Przy dochodzeniu do wartości zadanej mogą wystąpić oscylacje i błąd w stanie ustalonym. Aby wyeliminować to zjawisko, w [13] zaproponowano wprowadzenie dodatkowej wielkości wejściowej regulatora zależnej od całki (sumy) błędu:

$$S = \int_0^{\infty} e(t)dt, \quad (2.46)$$

która ma wpływ na działanie regulatora tylko w otoczeniu wartości zadanej.

Dobór współczynników skali metodą prób i błędów może okazać się trudny i uciążliwy. W [87] zaproponowano budowę regulatora o wielu wejściach i wielu wyjściach przyjmując liniowy model procesu.

Przykład 2.1

Niniejszy przykład numeryczny wykorzystuje eksperymenty wykonane przez autora podczas pobytu na Uniwersytecie Technicznym w Delft.

Sterowany proces opisany jest funkcją przejścia:

$$K(s) = \frac{K}{(sT_1+1)(sT_2+1)} = \frac{5}{(5s+1)(4s+1)} \quad (2.47)$$

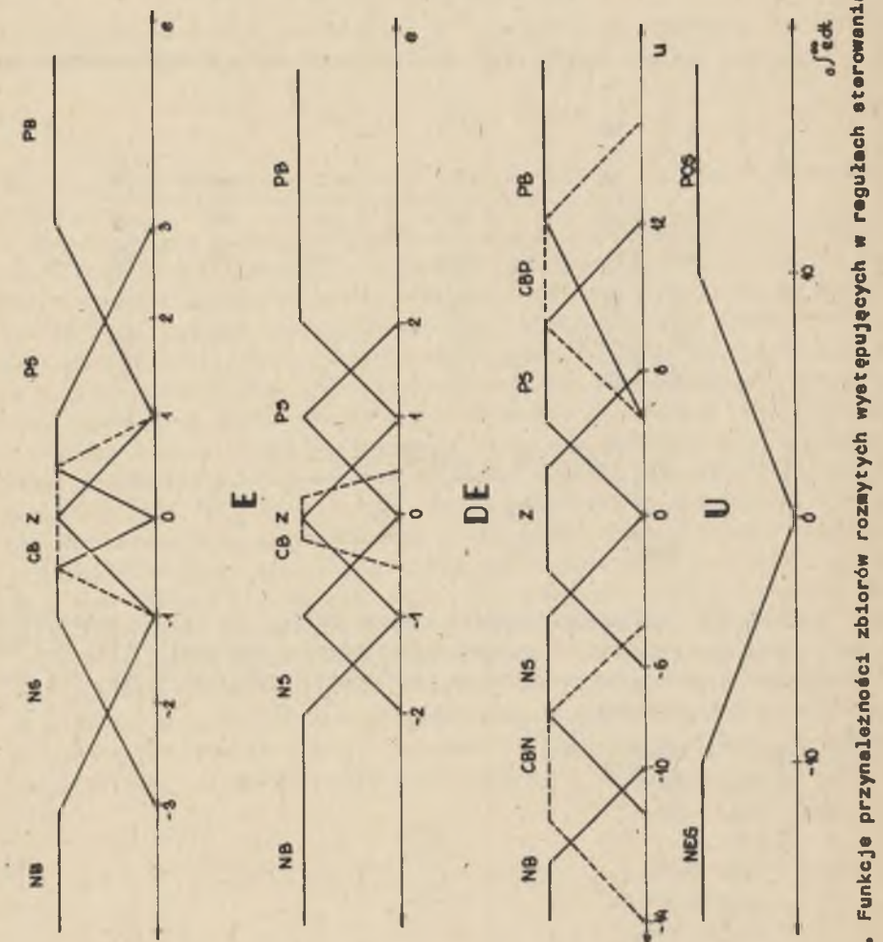
Regulator rozmyty składa się z następującego zbioru reguł sterowania:

E \ DE	NB	NS	Z	PS	PB
PB	NB	NB	NB	NS	PB
PS	NB	NB	NS	PS	PB
Z	NB	NS	Z	PS	PB
NS	NB	NS	PS	PB	PB
NB	NB	PS	PB	PB	PB

S \ błąd = CB i zmiana błędu = CB
NEG — CBN
POS — CBP

Rysunek 2.3 przedstawia funkcje przynależności dla błędu, zmian błędu, sumy błędu i sterowania. Z zamieszczonej powyżej macierzy i rys. 2.3 można wywnioskować o zupełności reguł sterowania. Przyjęte skróty dla zbiorów rozmytych oznaczają:

- dla błędu i zmian błędu:
  - NB - duży ujemny,
  - NS - mały ujemny,
  - Z - zero,
  - PS - mały dodatni,
  - PB - duży dodatni,
  - CB - bliski zeru,
- dla wielkości wejściowej S:
  - NEG - ujemny,
  - POS - dodatni,
- dla sterowania:
  - NB - duży ujemny,



Rys. 2.3. Funkcje przynależności zbiorów rozmytych występujących w regułach sterowania

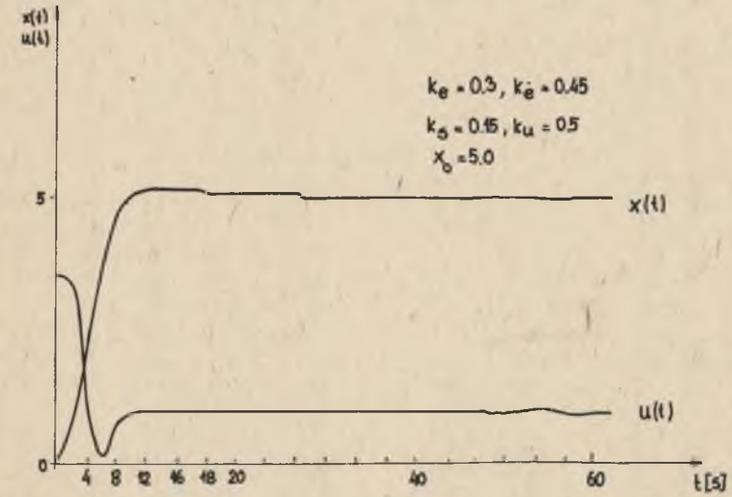
NS - mały ujemny,
Z - zero,
PS - mały dodatni,
PB - duży dodatni,
CBN - ujemne sterowanie przy zerowym błędzie,
CBP - dodatnie sterowenie przy zerowym błędzie.

Dobierając współczynniki k_e, $k_{\dot{e}}$, k_S, k_u równe $k_e = 0.3$, $k_{\dot{e}} = 0.45$, $k_S = 0.15$, $k_u = 0.5$ otrzymano odpowiedź procesu bez znacznych przeregulowań (rys. 2.4). Odpowiedź procesu x(t) scharakteryzujemy za pomocą wskaźników:

$$Q_1 = \int_0^{\infty} e^2(t)dt, \tag{2.48}$$

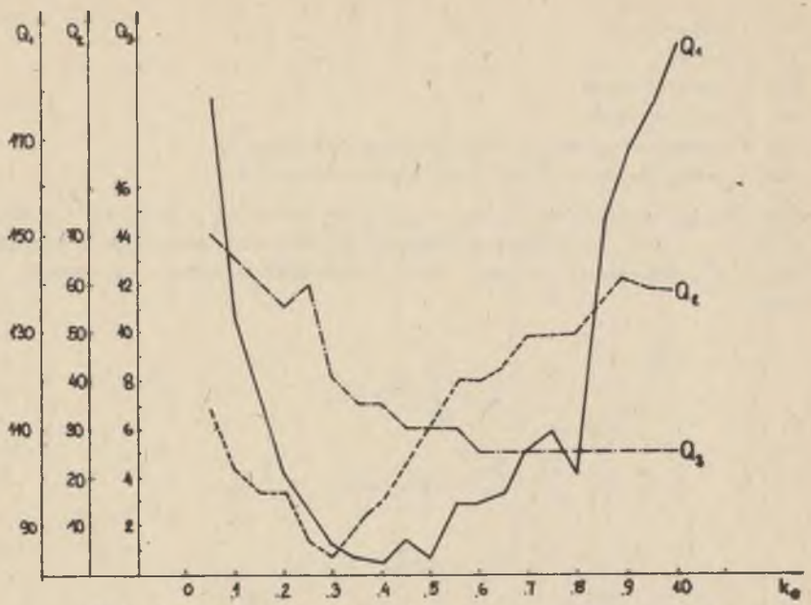
$$Q_2 = (\sup_{t\geq 0} x(t) - x_0)/x_0, \tag{2.49}$$

$$Q_3 = \min\left\{t \geq 0 \,\middle|\, x(t) = x_0\right\}, \tag{2.50}$$

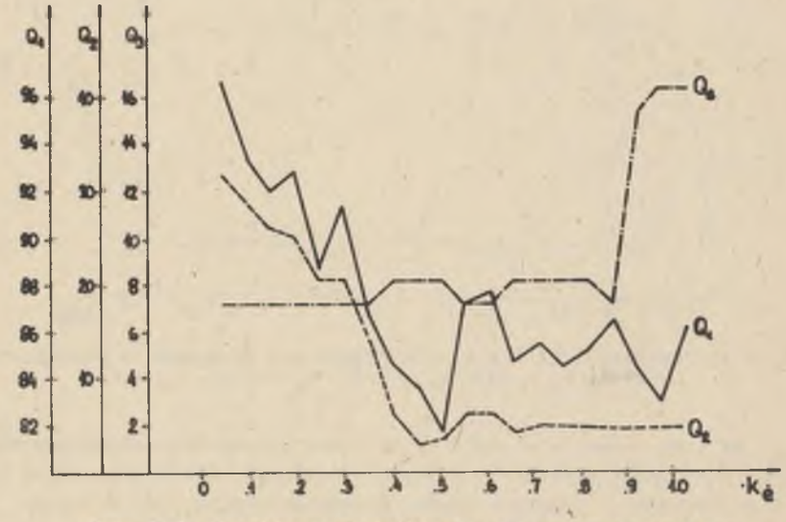


Rys. 2.4. Przebieg x(t) i u(t) dla regulatora rozmytego o współczynnikach skali $k_e = 0.3$, $k_{\dot{e}} = 0.45$, $k_s = 0.15$, $k_u = 0.5$

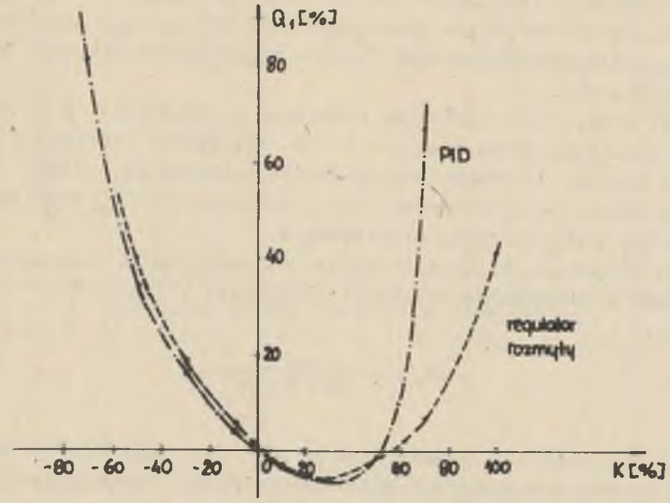
(x_0 - wartość zadana). Pozwoli to na ocenę wpływu współczynników skali na jakość przebiegu. Zmieniając każdy ze współczynników skali, przy ustalonych pozostałych, otrzymano wyniki przedstawione na rys. 2.5-2.6. Widać



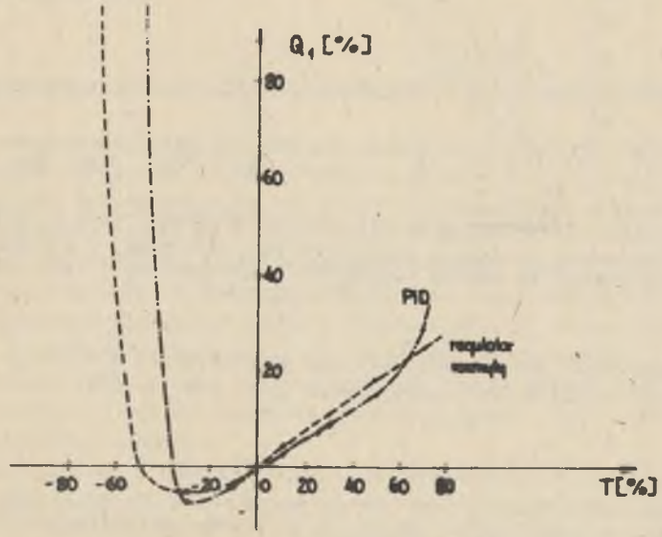
Rys. 2.5. Przebieg wskaźników Q_1, Q_2, Q_3 w funkcji k_e



Rys. 2.6. Przebieg wskaźników Q_1, Q_2, Q_3 w funkcji k_e



Rys. 2.7. Wpływ zmian współczynników K na Q_1



Rys. 2.8. Wpływ zmian większej stałej czasowej ($T = \max(T_1, T_2)$/na Q_1

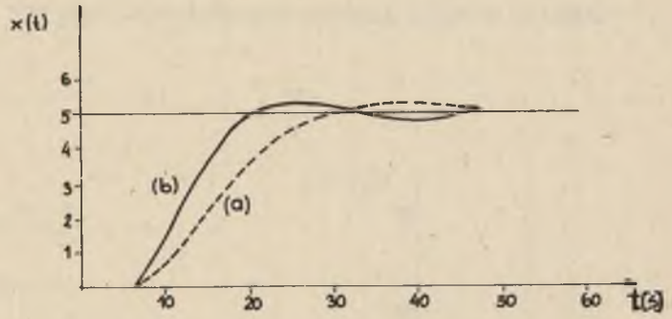
stąd wyraźnie, że Q_1, Q_2, Q_3 posiadają wiele minimów. Może to powodować szereg trudności przy stosowaniu metod optymalizacji wskaźników jakości względem współczynników skali. Oprócz tego ze względu na nieliniowy charakter regulatora optymalne (minimalizujące Q_1, Q_2, Q_3) wartości k_e, $k_{\dot{e}}$, k_S, k_u zachowują swoją ważność tylko w ograniczonym zakresie zmien wielkości wejściowych.

Badając wrażliwość regulatora rozmytego i regulatora PID[x)] otrzymano zależności zilustrowane na rys. 2.7 i 2.8. Wrażliwość regulatora PID i rozmytego ze względu na zmiany współczynnika wzmocnienia procesu jest taka sama. Dla dużych zmian większej stałej czasowej procesu regulator rozmyty charakteryzuje się mniejszą wrażliwością.

W celu porównania działania regulatora rozmytego i regulatora PID przyjęto proces z opóźnieniem o funkcji przejścia:

$$K(s) = \frac{5e^{-5s}}{(4s+1)(5s+1)}. \qquad (2.51)$$

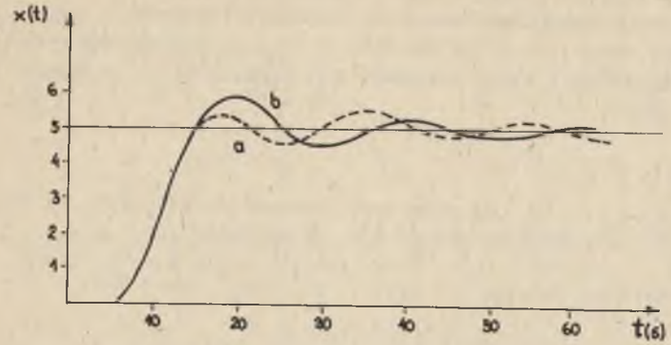
Otrzymane przebiegi zilustrowano na rys. 2.9. Regulator rozmyty daje szybsze przebiegi przy małych przeregulowaniach. Można poprawić szybkość



Rys. 2.9. Przebiegi x(t) dla procesu drugiego rzędu z opóźnieniem
(a) - sterowanego za pomocą regulatora PID, P = 0.08, I = 0.006, D = 0.0,
(b) - sterowanego za pomocą regulatora rozmytego, k_e = 0.03, $k_{\dot{e}}$ = 0.1, k_s = 0.015, k_u = 0.5

przebiegów przez zwiększenie wartości współczynnika skali $k_{\dot{e}}$, co jednak doprowadza do większych przeregulowań (por. rys. 2.10).

x) Regulator PID opisany jest równaniem $u(nT) = (P + I + D)\, e(nT) - (P + 2D)\, e(nT - T) + D\, e(nT - 2T)$, gdzie P, I, D są współczynnikami regulatora, zaś T oznacza okres sterowania.



Rys. 2.10. Przebiegi x(t) dla procesu drugiego rzędu z opóźnieniem sterowanego za pomocą regulatora rozmytego
(a) - k_e = 0.05, $k_{\dot{e}}$ = 0.3, k_s = 0.02, k_u = 0.5, (b) - k_e = 0.05, $k_{\dot{e}}$ = 0.4, k_s = 0.02, k_u = 0.5

Podsumowując:

- w świetle aktualnych badań nad regulatorem rozmytym widać, że stanowi on alternatywę dla tradycyjnych technik sterowania i może być szczególnie przydatny w tych przypadkach, gdy opis procesu ma charakter nieprecyzyjny (np. wartości parametrów procesu znane są w przybliżeniu),
- dalsze badania powinny dostarczyć metod poprawy właściwości dynamicznych regulatora i sformalizowanych, w miarę ogólnych, procedur optymalizacji regulatora.

2.2. Zastosowanie zbiorów probabilistycznych w konstrukcji regulatora

Dotychczas omawialiśmy konstrukcję regulatora rozmytego bazującego na zbiorze reguł zawierających nieprecyzyjne pojęcie opisane przy użyciu zbiorów rozmytych. W praktyce może się okazać, szczególnie w przypadku kilku różnych strategii sterowania, że istnieją trudności w wyznaczeniu funkcji przynależności. Przyporządkowanie każdemu punktowi przestrzeni X(U) dokładnie jednej wartości z przedziału $[0,1]$ może okazać się konstrukcją nie odzwierciedlającą złożoności pojęcia lingwistycznego. Stąd zrodziła się potrzeba rozszerzenia pojęcia zbioru rozmytego; zaproponowano m.in. Φ - zbiory rozmyte [31], zbiory rozmyte wyższych rzędów. Główna idea tych konstrukcji sprowadza się do przyporządkowania każdemu $x \in X$ podprzedziału $[0,1]$ lub zbioru rozmytego

Koncepcja zbioru probabilistycznego wprowadzona w [41] polega na przyporządkowaniu każdemu $x \in X$ zmiennej losowej o wartościach z przedziału $[0,1]$. Stąd też przez zbiór probabilistyczny $A(x,\omega)$ można rozumieć rodzi-

nę zmiennych losowych indeksowanych elementami $x \in X$. W [27] zaproponowano opis zbioru probabilistycznego za pomocą dystrybuanty.

Rozpatrzmy zbiór zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ określonych na $[0,1]$ i scharakteryzowanych dystrybuantami $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}$. Zachodzi wówczas (por. [27], [66]).

TWIERDZENIE 2.3

Jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są zmiennymi losowymi określonymi na tej samej przestrzeni i scharakteryzowanymi dystrybuantami $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}$, to:

I dystrybuanta funkcja $\Phi = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ równa się:

$$F_{\Phi}(w) = F_{X_1 X_2 \ldots X_n}(w, w, \ldots, w), \tag{2.52}$$

$w \in [0,1]$,

II dystrybuanta funkcji $\Psi = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ opisana jest

$$F_{\Psi}(w) = \sum_{j=1}^{n} F_{X_j}(w) - \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} F_{X_j X_k}(w,w) + \sum_{1 \leqslant j < k < l \leqslant n} F_{X_j X_k X_l}(w,w,w) -$$

$$- \ldots + (-1)^{n+1} F_{X_1 X_2 \ldots X_n}(w, w, \ldots, w), \tag{2.53}$$

$w \in [0,1]$.

Przyjmując niezależność poszczególnych zmiennych losowych X_i, $i = 1,2,\ldots,n$, otrzymujemy:

$$F_{\Phi}(w) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(w) \tag{2.54}$$

$$F_{\Psi}(w) = \sum_{j=1}^{n} F_{X_j}(w) - \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} F_{X_j}(w) F_{X_k}(w) + \sum_{1 \leqslant j < k < l \leqslant n} F_{X_j}(w) F_{X_k}(w) F_{X_l}(w) -$$

$$- \ldots + (-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(w), \tag{2.55}$$

$w \in [0,1]$.

Twierdzenie powyższe stanowi podstawę obliczeń dystrybuanty relacji probabilistycznej regulatora.

Rozważmy, jak poprzednio, algorytm sterowania składający się z N reguł [28]:

$$\text{jeżeli } X_i, \text{ to } U_{j_i} = (X_i \rightarrow U_{j_i}), \tag{2.56}$$

$i = 1,2,\ldots,N$, $j = 1,2,\ldots,M$, gdzie X_i, U_j są zbiorami probabilistycznymi danymi na skończenie elementarnych przestrzeniach X i U:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \tag{2.57}$$

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}. \tag{2.58}$$

Opisane są one za pomocą rodziny dystrybuant:

$$\{F_{X_i}(x_s)\}, \tag{2.59}$$

$$\{F_{U_j}(u_t)\}, \tag{2.60}$$

$i = 1,2,\ldots,N$, $j = 1,2,\ldots,M$, $s = 1,2,\ldots,n$, $t = 1,2,\ldots,m$.

Dla każdej z implikacji (2.56) przy przyjęciu definicji implikacji zgodnie z (2.12) otrzymujemy relację probabilistyczną $R_i = X_i \rightarrow U_{j_i}$, gdzie dla ustalonych elementów przestrzeni X i U (i,j) zachodzi:

$$F_{(X_i \rightarrow U_{j_i})(x_s, u_t)}(w) = F_{\min(X_i, U_{j_i})(x_s, u_t)}(w), \tag{2.61}$$

$w \in [0,1]$, $i = 1,2,\ldots,N$, $j = 1,2,\ldots,M$, $s = 1,2,\ldots,n$, $t = 1,2,\ldots,m$.

Biorąc pod uwagę sumę wszystkich relacji R_i, $i = 1,2,\ldots,N$, mamy:

$$R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i \tag{2.62}$$

Przyjmując niezależność odpowiednich zmiennych losowych i korzystając ze wzorów (2.54)-(2.55), dystrybuanta relacji probabilistycznej wynosi:

$$F_{R(x_s, u_t)}(w) = \prod_{i=1} \left[F_{X_i(x_s)}(w) + F_{U_{j_i}(u_t)}(w) - F_{X_i(x_s)}(w) F_{U_{j_i}(u_t)}(w) \right],$$

$w \in [0,1]$, $s = 1,2,\ldots,n$, $t = 1,2,\ldots,m$. (2.63)

Dla każdego stanu procesu X' będącego zbiorem probabilistycznym, rozmytym lub wartością liczbową z X, zbiór probabilistyczny U' obliczamy ze złożeniowej reguły wnioskowania (modus ponens):

$$U' = X' \circ R. \tag{2.64}$$

Dystrybuanta zbioru probabilistycznego U' obliczana zgodnie z (2.54)-(2.55) wynosi:

$$F_{U'(u_t)}(w) = \prod_{j=1}^{n} \left[F_{X(x_j)}(w) + F_{R(x_j,u_t)}(w) - F_{X(x_j,u_t)}(w) \right], \tag{2.65}$$

$w \in [0,1]$, przy założeniu, że zmienne losowe $X'(x_j)$ i $R(x_j,u_t)$ są niezależne.

Dystrybuanta zbioru probabilistycznego U' pozwala na obliczenie jego momentów (por. [27], [28], [41]) ułatwiając wybór końcowej wartości sterowania $u_0 \in U$ (por. p.2.1).

Każdy zbiór rozmyty można traktować jako szczególny przykład zbioru probabilistycznego. Stąd regulator rozmyty stanowi szczególny przypadek opisanego tu regulatora probabilistyczno-rozmytego. Rzeczywiście rozpatrzmy relację i zbiór rozmyty R, X' o funkcjach przynależności:

$$R(x_j,u_k) = w_{jk}, \tag{2.66}$$

$$X(x_j) = w_j, \tag{2.67}$$

$w_j, w_{jk} \in [0,1]$, $j = 1,2,\ldots,n$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Mogą one być reprezentowane przy użyciu dystrybuant:

$$F_{R(x_j,u_k)}(w) = \begin{cases} 0, \text{ jeżeli } w < w_{jk} \\ 1, \text{ jeżeli } w > w_{jk} \end{cases}, \tag{2.68}$$

$$F_{X(x_j)}(w) = \begin{cases} 0, \text{ jeżeli } w < w_j \\ 1, \text{ jeżeli } w > w_j \end{cases}, \tag{2.69}$$

Zgodnie z zależnością (2.65) otrzymujemy:

$$F_{U'(u_k)}(w) = \begin{cases} 0, & w < \max\limits_{1 \leq j \leq n} [\min(w_j, w_{jk})] \\ 1, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{2.70}$$

czyli U' dane jest funkcją przynależności,

$$U'(u_k) = \max_{1 \leq j \leq n} [\min(X'(x_j), R(x_j,u_k))], \tag{2.71}$$

$k = 1,2,\ldots,m$.

Rozpatrując konstrukcję regulatora probabilistyczno-rozmytego w sposób wyraźny napotykamy na problem wyznaczenia probabilistycznych charakterystyk zbiorów biorących udział w tworzeniu relacji regulatora. Zaproponujemy tu jedną z możliwych dróg wyliczenia dystrybuant zbiorów probabilistycznych, traktując te zbiory jako zagregowane zbiory rozmyte powstałe podczas działania algorytmu grupowania. Niech X_i i U_i, $i = 1,2,\ldots,N$ oznaczają zbiory rozmyte stanu i sterowania określone przez kilku ekspertów procesu posiadających różne, lecz - ogólnie rzecz biorąc - podobne strategie sterowania. Rodzinę (X_i,U_i) podzielimy na rozłączne klasy, przy czym liczba klas $1 \leq c \leq N$ i podział są dobrane tak, aby minimalizować wskaźnik jakości:

$$Q = \sum_{i=1}^{1} \varrho(X_i \circ R_c, U_i), \tag{2.72}$$

tzn.:

$$\min_{1 \leq c \leq n} Q = \sum_{i=1}^{1} \varrho(X_i \circ R_{c_{opt}}, U_i), \tag{2.73}$$

gdzie: ϱ oznacza odległość między zbiorami rozmytymi $X_i \circ R_c$ i U_i, zaś R_c jest relacją rozmytą obliczaną z zależności:

$$R_c = \bigcup_{j=1}^{c} (\bar{x}_j \times \bar{u}_j), \tag{2.74}$$

czyli:

$$R_c(x,u) = \max_{1 \leq j \leq c} [\min(\bar{x}_j(x), \bar{u}_j(u))], \tag{2.75}$$

$x \in X$, $u \in U$. $\bar{x}_j$ i $\bar{u}_j$ oznaczają funkcje przynależności zbiorów probabilistycznych x_j i u_j, $j = 1,2,\ldots,c$. Zbiory te są tworzone w oparciu o macierz podziału P generowaną przez algorytm grupowania (por. [4], [9]). Macierz $P = [p_{jk}]$, $j = 1,2,\ldots,c$, $k = 1,2,\ldots,N$, $p_{jk} \in \{0,1\}$ spełnia warunki [9]:

k-ty zbiór rozmyty należy do dokładnie jednej grupy (klasy):

$$\sum_{j=1}^{c} p_{jk} = 1, \qquad 1 \leq k \leq N, \tag{2.76}$$

każda grupa zawiera co najmniej jeden zbiór rozmyty:

$$\sum_{k=1}^{N} p_{jk} > 0, \qquad 1 \leq j \leq c. \tag{2.77}$$

$\bar{x}_j$ i $\bar{u}_j$ obliczone są według wzorów:

$$\bar{x}_j(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i(x) p_{ij} / \sum_{i=1}^{N} p_{ij}, \tag{2.78}$$

$$\bar{u}_j(u) = \sum_{i=1}^{N} u_i(u) p_{ij} / \sum_{i=1}^{N} p_{ij}. \tag{2.79}$$

Przykład 2.2

Rodzina zbiorów rozmytych (X_i, U_i) i = 1,2,...,10 dana jest poniżej:

X_i						U_i					
1.0	0.8	0.4	0.3	0.2	0.0	0.8	1.0	0.4	0.2	0.1	0.1
1.0	0.9	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.3	0.6	1.0
0.2	0.4	1.0	0.6	0.3	0.0	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
0.0	0.0	0.0	0.2	0.5	1.0	0.6	1.0	0.7	0.6	0.6	0.6
0.2	0.5	1.0	0.6	0.6	0.3	0.4	0.9	1.0	1.0	0.9	0.4
0.7	0.9	0.9	1.0	0.2	0.2	1.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.5	1.0	0.5	0.2	0.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.5	0.5
1.0	0.6	0.3	0.4	0.2	0.0	0.2	0.4	1.0	0.3	0.2	0.2
0.4	1.0	0.2	0.0	0.0	0.0	0.6	0.7	1.0	1.0	0.5	0.3
0.3	0.4	0.5	0.5	1.0	1.0	0.5	0.6	0.7	0.3	0.4	0.2

Stosując iteracyjny proces grupowania ISODATA [4], [9] i minimalizując wartość wskaźnika (2.72) względem liczby grup c została wyliczona optymalna liczba c = 4. Macierz podziału przyjmuje postać:

c \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Obliczenia dystrybuanty relacji probabilistycznej, wykorzystując otrzymane cztery zbiory probabilistyczne $\mathcal{X}_i, \mathcal{U}_i$ i = 1,2,3,4,przebiegają zgodnie z (2.74). Wartości dwóch pierwszych momentów zmiennych losowych tworzących relację obliczone są w następujący sposób:

$$m_{ij}^1 = \int_0^1 w \, dF_{R(x_i,u_j)}(w), \tag{2.80}$$

$$m_{ij}^2 = \int_0^1 [w - m_{ij}^1]^2 \, dF_{R(x_i,u_j)}(w), \tag{2.81}$$

i,j = 1,2,...,6. Wartości ich wynoszę:

$[m_{ij}^1] =$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.67	0.60	0.67	0.46	0.46	0.55
x_2	0.74	0.64	0.69	0.56	0.52	0.64
x_3	0.85	0.90	0.87	0.78	0.61	0.53
x_4	0.65	0.57	0.57	0.52	0.50	0.55
x_5	0.54	0.67	0.62	0.47	0.49	0.41
x_6	0.55	0.80	0.70	0.45	0.50	0.41

$[m_{ij}^2] =$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.07	0.06	0.09	0.09	0.03	0.10
x_2	0.03	0.03	0.04	0.04	0.01	0.07
x_3	0.06	0.01	0.04	0.06	0.05	0.06
x_4	0.05	0.00	0.00	0.01	0.01	0.08
x_5	0.00	0.04	0.01	0.02	0.01	0.03
x_6	0.00	0.04	0.00	0.02	0.01	0.04

Zastosowanie zbiorów probabilistycznych dostarczyło dodatkowej informacji na temat dokładności wyznaczenia relacji regulatora.

Wprowadźmy współczynnik:

$$\gamma_{ij} = \sqrt{s^2_{ij}}/s^1_{ij}, \qquad (2.82)$$

i,j = 1,2,...,6,

$[\gamma_{ij}]$ =

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.39	0.41	0.44	0.65	0.38	0.57
x_2	0.23	0.27	0.29	0.36	0.19	0.41
x_3	0.29	0.11	0.23	0.64	0.37	0.46
x_4	0.34	0.00	0.00	0.19	0.20	0.51
x_5	0.00	0.30	0.16	0.30	0.20	0.42
x_6	0.00	0.25	0.00	0.31	0.20	0.49

Widać wyraźnie, że niektóre z elementów relacji charakteryzuję się dużym rozrzutem, dla niektórych zaś γ_{ij} przyjmuje wartości małe lub zerowe (np. element (6, 3) w wyznaczonej relacji).

Idea regulatora korzystającego ze zbiorów probabilistycznych może okazać się przydatna w przypadku agregacji kilku różnych, choć w swym ogólnym charakterze podobnych, strategii sterowania procesem. Pojęcia nieprecyzyjne mające swoją reprezentację w postaci zbioru rozmytego zostały tutaj zastąpione zbiorem probabilistycznym, który w sposób pełniejszy uwzględnia mechanizmy losowe (stochastyczne) ujawniające się podczas tworzenia relacji regulatora.

Zastosowanie zbiorów probabilistycznych przy konstrukcji regulatora posiada szereg istotnych zalet:

- pozwala na jednolite ujęcie obu form niepewności (losowości i rozmytości) w postaci relacji,
- zastosowana charakteryzacja zbioru probabilistycznego za pomocą dystrybuant dostarcza wzorów analitycznych na relację probabilistyczną oraz zbiór probabilistyczny wynikły w rezultacie składania maksyminowego,
- rozpatrywanie drugiego momentu relacji (i wskaźników bazujących na odpowiednich momentach, np. γ_{ij}) dostarcza liczbowej oceny dokładności wyliczonej relacji regulatora.

3. TEORIOMNOGOŚCIOWE UJĘCIE OPISU SYSTEMÓW NIEDETERMINISTYCZNYCH

Dyskutując różne teoretyczne i aplikacyjne aspekty analizy i syntezy systemów niedeterministycznych można wyróżnić dwa generalne i odmienne w swym charakterze kierunki opisu systemów. Pierwszy doskonale znany wykorzystuje aparat matematyczny statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Drugi natomiast uwzględnia pojęcie zbioru do opisu czynnika rozmytości jako elementu niedeterminizmu (niepewności) występującego w systemie. Czynnik ten występuje na skutek złożoności systemu lub jest rezultatem małej ilości zebranych danych. Idea teoriomnogościowego spojrzenia na modele stosowane w problemach sterowania prezentowana była w pracach [8], [59], [85], [86]. Zakłócenia istniejące w systemie ze względu na brak informacji o ich charakterze modelowane były w postaci zbiorów (zakłócenia o ograniczonym rozkładzie, np. [86]). Wprowadzenie pojęcia zbioru rozmytego pozwoliło na dalsze uogólnienia.

Przedstawimy obecnie jedną z definicji systemu, a następnie przedyskutujemy kilka modeli tych systemów, które odzwierciedlają różny poziom niepewności spotykany w rzeczywistości. Wyróżnione zostaną dwie klasy systemów niedeterministycznych, a mianowicie systemów funkcyjnych i relacyjnych, gdzie czynnik niepewności ma charakter zewnętrzny lub wewnętrzny.

Dla pojęcia systemu będącego podstawowym w teorii systemów zaproponowano wiele definicji (por. [110]). Ogólnie rzecz biorąc, system można traktować jako zbiór obiektów związanych ze sobą. Wyróżnimy tu przestrzeń sterowania (wejścia) U i przestrzeń stanu X. System można scharakteryzować w następującej formie:

$$S = <U, X, R>, \qquad (3.1)$$

gdzie: R jest relacją pomiędzy ciągiem stanów $X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$ zdefiniowanych w X, wejściem U_k określonym w U, a stanem X_{k+n} zdefiniowanym w przestrzeni X. $X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}, X_{k+n}, U_k$ określają stan i wejście w kolejnych dyskretnych chwilach czasu.

Wprowadzimy tu notację:

$$(U_k X_k X_{k+1} \ldots X_{k+n-1}) R\, X_{k+n}, \qquad (3.2)$$

która stanowi formalny zapis stwierdzenia "istnieje relacja (R) pomiędzy ciągiem stanów $X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$, wejściem U_k, a stanem X_{k+n}". R jest

relację zdefiniowaną w iloczynie kartezjańskim $U \times X \times X \times \ldots \times X$ (n-razy). Relację R traktować będziemy jako relację rozmytą, tzn. dla każdego $u \in U, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y \in X$ $R(u, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) \in [0.1]$.

Biorąc pod uwagę wejście i ciąg stanów, wprowadzonych jak powyżej, można wyróżnić dwie sytuacje:

I. $U_k, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$ są zbiorami rozmytymi zdefiniowanymi w U i X,

II. $U_k, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$ są elementami przestrzeni U i X.

Przyjmując II oraz dodatkowo zakładając, że relacja R jest funkcją, tzn.:

$$\forall_{u \in U} \; \exists!_{z \in X} \; \forall_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in X^n} \; R(u, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_k) = \begin{cases} 1, \text{dla } x_k = z \\ 0, \text{dla } x_k \neq z \end{cases}, \quad (3.3)$$

mówimy, że dyskutowany system jest systemem deterministycznym.

Widać wyraźnie, że dla precyzyjnie określonego wejścia i ciągu stanów (elementy przestrzeni U i X) stan w chwili następnej jest też elementem w przestrzeni X. W przypadku przeciwnym stan X_{k+n} określony jest przy użyciu zbioru rozmytego. W systemach opisywanych za pomocą metod probabilistycznych stan X_{k+n} mógłby być scharakteryzowany np. przez odpowiednią funkcję gęstości prawdopodobieństwa.

Zależność (3.2) zapisywać będziemy w sposób następujący:

$$X_{k+n} = (U_k X_k X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}) \Box R, \quad (3.4)$$

i nazywać rozmytym równaniem relacyjnym systemu rzędu n-tego.

We wzorze (3.4) "$\Box$" oznacza operator złożenia między relacjami: $U_k X_k X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$ określoną na $U \times X \times X \times \ldots \times X$ ($n-1$ razy) i relacją R określoną na $U \times \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n\text{-razy}}$. Będzie on szczegółowo dyskutowany w rozdziale 5 w związku z rozwiązywaniem równań relacyjnych. Analogicznie, zależność:

$$X_{k+n} = (U_k X_k) \Box R, \quad (3.5)$$

nazywać będziemy rozmytym równaniem relacyjnym systemu pierwszego rzędu. Jeżeli relacja $U_k X_k X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$ stojąca w (3.4) może być zapisana w postaci $\Box$ - złożenia zbiorów $U_k, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+n-1}$,

$$U_k X_k X_{k+1} \ldots X_{k+n-1} = U_k \Box X_k \Box X_{k+1} \Box \ldots \Box X_{k+n-1}, \quad (3.6)$$

wówczas relację nazywać będziemy dekomponowalną.

Analizując systemy opisane zależnością (3.4), można zauważyć, że element niedeterminizmu może być związany z relacją systemu R lub może dotyczyć wejścia i stanu. Jeżeli relacja R jest funkcją, wówczas mówić będziemy o funkcyjnych systemach niedeterministycznych. W przypadku przeciwnym mamy do czynienia z relacyjnymi systemami niedeterministycznymi [74], [75].

W celu ilustracji koncepcji systemu funkcyjnego i relacyjnego rozpatrzmy dwa przykłady.

1. System opisany jest następującym równaniem:

$$T = c/pV, \quad (3.7)$$

gdzie c oznacza stałą, T jest temperaturą [°K], p ciśnieniem [N/m^2], V objętością [m^3]. Wielkości p i V traktowane są jako wejścia, T jest stanem. Zależność (3.7) jest znanym prawem fizyki. Ze względu na wysoki poziom zakłóceń (niedokładny pomiar ciśnienia i objętości) wejście systemu mogą być modelowane w postaci zbiorów. Mamy tu do czynienia z funkcyjnym systemem niedeterministycznym, gdzie czynnik niepewności ma charakter zewnętrzny i może być, przy dodatkowych nakładach, wyeliminowany lub zminimalizowany.

2. Analizując złożony system (np. w zarządzaniu), gdzie dostępne są tylko zbiory wejścia i stanu (np. opinie wyrażone w wywiadach), próba znalezienia zależności funkcyjnej może okazać się bezowocna, a samo przyjęcie konkretnej klasy funkcji dla modelu może nie mieć wystarczającej podbudowy. Czynnik niepewności ma w tym przypadku charakter wewnętrzny. Mówimy wtedy o relacyjnych systemach niedeterministycznych.

4. NORMY TRÓJKĄTNE

W pierwszych pracach Zadeha [108], [109] poświęconych zbiorom rozmytym, przedstawiających pojęcie i interpretację zbioru rozmytego, wprowadzone zostały również podstawowe operacje na nich, takie jak: suma, iloczyn i dopełnienie. Dalsze badania o charakterze podstawowym i eksperymentalnym [6], [40], [79], [93], [97], [106], [117], [118] uwydatniły cechę nazywaną przez Bellmana i Zadeha "lokalnym" charakterem logiki rozmytej [7], a polegającą na niemożności podania zestawu działań na zbiorach rozmytych, które miałyby charakter uniwersalny i mogłyby być użyte we wszelkich zastosowaniach.

W niniejszym rozdziale omówimy pojęcie norm trójkątych (t-norma i s-norma), sposoby ich otrzymywania, a następnie przejdziemy do ich interpretacji w świetle intuicyjnych wymagań stawianych działaniom na zbiorach rozmytych. Zaproponujemy też charakteryzację poszczególnych norm trójkątnych.

4.1. Normy trójkątne, definicje i przykłady

Normy trójkątne wprowadzone po raz pierwszy w [58] definiowane są następująco:

DEFINICJA 4.1

t-norma jest to funkcja dwóch zmiennych, $t:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ o następujących właściwościach:

I	$0tx = 0, xt1 = x,$	warunki brzegowe	(4.1)
II	$xty \leqslant zty$, gdy $x \leqslant z$,	monotoniczność	(4.2)
III	$xty = ytx,$	przemienność	(4.3)
IV	$(xty)tz = xt(ytz),$	łączność	(4.4)

$x,y,z \in [0,1]$.

DEFINICJA 4.2

s-norma jest to funkcja dwóch zmiennych, $s:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ o następujących właściwościach:

I	$0sx = x, 1sx = 1,$	warunki brzegowe	(4.5)

II	$xsy \leqslant zsy$, gdy $x \leqslant z$,	monotoniczność	(4.6)
III	$xsy = ysx,$	przemienność	(4.7)
IV	$(xsy)sz = xs(ysz),$	łączność	(4.8)

$x,y,z \in [0,1]$.

s-norma nosi także nazwę konormy lub normy dualnej (względem t-normy). t- i s-normy mogę być rozpatrywane parami; każdej t-normie odpowiada s-norma. Zależność między nimi wyrażona jest równaniem:

$$xsy = 1 - (1-x)t(1-y). \tag{4.9}$$

$x,y \in [0,1]$.

Przykłady t- i s-norm spotykanych w literaturze [34] - [36], [53], [83], [84], [90], [105] zestawiono w tabeli 4.1.

Tabela 4.1

Przykłady t-norma i s-norma

t-norma	s-norma
$xt_y y = 1-\min\left[1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}\right]$, $p \geqslant 1$	$xs_1 y = \min(1, \sqrt[p]{x^p+y^p})$, $p \geqslant 1$
$xt_2 y = \log_w\left[1 + \frac{(w^x-1)(w^y-1)}{w-1}\right]$, $0<w<\infty$, $w \neq 1$	$xs_2 y = 1 - \log_w\left[1 + \frac{(w^{1-x}-1)(w^{1-y}-1)}{w-1}\right]$, $0<w<\infty$, $w \neq 1$
$xt_3 y = xy$	$xs_3 y = x+y-xy$
$xt_4 y = \frac{xy}{\vartheta+(1-\vartheta)(x+y-xy)}$, $\vartheta \geqslant 0$	$xs_4 y = \frac{xy(\vartheta-2)+x+y}{xy(\vartheta-1)+1}$, $\vartheta \geqslant 0$
$xt_5 y = \max\left[0, (\lambda+1)(x+y-1)-\lambda xy\right]$, $\lambda \geqslant -1$	$xs_5 y = \min\left[1, x+y+\lambda xy\right]$, $\lambda \geqslant -1$
$xt_6 y = \begin{cases} x, y = 1 \\ y, x = 1 \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases}$	$xs_6 y = \begin{cases} x, y = 0 \\ y, s = 0 \\ 1, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases}$
$xt_7 y = \left[\max(0, x^{-p}+y^{-p}-1)\right]^{-1/p}$, $p \in R$, $x,y \in [0,1]$	$xs_7 y = 1-\left[\max(0, (1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1)\right]^{-1/p}$, $p \in R$, $x,y \in [0,1]$

Ogólnę dyskusję związaną z konstrukcją norm trójkątnych w oparciu o teorię równań funkcyjnych można znaleźć m.in. w [1], [35].

Zachodzi następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 4.1

I. Dla każdej ciągłej t-normy istnieje ciągła i ściśle malejąca funkcja $f: [0,1] \to [0,\infty)$ z $f(1) = 0$, taka, że:

$$xty = \begin{cases} f^{-1}[f(x) + f(y)], & \text{dla } f(x) + f(y) \in [0, f(0)] \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{4.10}$$

$x,y \in [0,1]$.

II. Dla każdej ciągłej s-normy istnieje ciągła i ściśle rosnęca funkcja $g: [0,1] \to [0,\infty)$ z $g(0) = 0$, taka, że:

$$xsy = \begin{cases} g^{-1}[g(x) + g(y)], & \text{dla } g(x) + g(y) \in [0, g(1)] \\ 1, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{4.11}$$

$x,y \in [0,1]$.

Funkcje f i g nazywaję się generatorami addytywnymi (generatorami) norm trójkątnych. Przykładowo, dla norm t_1, t_2, s_1, s_2 mamy generatory:

$$f_1(x) = 1-x^p, \quad p \geq 1, \tag{4.12}$$

$$f_2(x) = -\ln \frac{(w^x-1)}{(w-1)}, \quad 0<w<\infty, \quad w \neq 1 \tag{4.13}$$

$$g_1(x) = x^p, \quad p \geq 1, \tag{4.14}$$

$$g_2(x) = -\ln \frac{(w^{1-x}-1)}{(w-1)}, \quad 0<w<\infty, \quad w \neq 1. \tag{4.15}$$

Dla każdej t-normy zachodzi nierówność:

$$xt_6y \leq xty \leq \min(x,y), \tag{4.16}$$

$x,y \in [0,1]$.

Dla każdej s-normy prawdziwa jest zależność:

$$\max(x,y) \leq xsy \leq xs_6y, \tag{4.17}$$

$[0,1]$.

Właściwości graniczne t-norm:

$$\lim_{p\to\infty}(xt_1y) = \min(x,y), \tag{4.18}$$

$$p = 1, \quad xt_1y = \max(0,x+y-1), \tag{4.19}$$

$$p = 0, \quad xt_1y = xt_6y, \tag{4.20}$$

$$\lim_{w\to 0}(xt_2y) = \min(x,y), \tag{4.21}$$

$$\lim_{w\to\infty}(xt_2y) = \max(0,x+y-1), \tag{4.22}$$

$$\lim_{w\to 1}(xt_2y) = xy = xt_3y, \tag{4.23}$$

$$\delta = 1, \quad xt_4y = xy = xt_3y, \tag{4.24}$$

$$\lim_{\delta\to\infty}(xt_4y) = xt_6y, \tag{4.25}$$

$$\lambda = -1, \quad xt_5y = xy = xt_3y, \tag{4.26}$$

$$\lambda = 0, \quad xt_5y = \max(0,x+y-1), \tag{4.27}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} xt_5y = xt_6y, \tag{4.28}$$

$$\lim_{p\to 0}(xt_7y) = xy = xt_3y, \tag{4.29}$$

$$\lim_{p\to-\infty}(xt_7y) = xt_6y, \tag{4.30}$$

$$\lim_{p\to\infty}(xt_7y) = \min(x,y), \tag{4.31}$$

$x,y \in [0,1]$.

Właściwości graniczne s-norm:

$$\lim_{p\to\infty}(xs_1y) = \max(x,y), \tag{4.32}$$

$$p = 1, \quad xs_1y = \min(1,x+y), \tag{4.33}$$

$$p = 0, \quad xs_1y = xs_6y, \tag{4.34}$$

$$\lim_{w\to 0}(xs_2y) = \max(x,y), \tag{4.35}$$

$$\lim_{w\to\infty}(xs_2y) = \min(1,x+y), \tag{4.36}$$

$$\lim_{w\to 1}(xs_3y) = x+y-xy = xs_3y, \tag{4.37}$$

$$\lambda = 1, xs_4y = x+y-xy = xs_3y, \tag{4.38}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}(xs_4y) = xs_6y, \tag{4.39}$$

$$\lambda = -1,\ xs_5y = \min(1,x+y-xy) = x+y-xy = xs_3y \tag{4.40}$$

$$\lambda = 0,\ xs_5y = \min(1,x+y), \tag{4.41}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}(xs_5y) = xs_6y, \tag{4.42}$$

$$\lim_{p\to 0}(xs_7y) = x+y-xy = xs_3y, \tag{4.43}$$

$$\lim_{p\to-\infty}(xs_7y) = xs_6y, \tag{4.44}$$

$$\lim_{p\to\infty}(xs_7y) = \max(x,y), \tag{4.45}$$

$x,y \in [0,1]$.

4.2. Działania na zbiorach rozmytych indukowane przez normy trójkątne

Warto zauważyć, że właściwości I-IV dla t- i s-norm mają oczywistą interpretację w przypadku przyjęcia działań przez nie indukowanych. Weźmy pod uwagę iloczyn zbiorów rozmytych. Powinien on być tak zdefiniowany, aby (por. [106]):

- I iloczyn dowolnego zbioru rozmytego i zbioru pustego $\emptyset$ był zbiorem pustym,
- II iloczyn dowolnego zbioru rozmytego A i przestrzeni był zbiorem rozmytym A,
- III iloczyn zbiorów rozmytych miał właściwość monotoniczności,
- IV iloczyn zbiorów rozmytych był łączny.

Zwróćmy uwagę, że warunki I-IV wymienione powyżej są spełnione przez t-normy. W tym sensie zależność (4.9) może być interpretowana jako prawo De Morgana dla zbiorów rozmytych.

Zadeh [108], [114] zaproponował dwie definicje iloczynu i sumy zbiorów rozmytych. Funkcja przynależności iloczynu dwóch zbiorów rozmytych $A,B\in F(X)$ zdefiniowana jest jako $\min[A(x),B(x)]$ lub $A(x)\cdot B(x)$. Funkcja przynależności sumy dwóch zbiorów rozmytych definiowana jest jako $\max[A(x),B(x)]$ lub $A(x)+B(x)-A(x)\cdot B(x)$. W praktyce okazało się jednak, że nie zawsze takie definicje są właściwe z punktu widzenia zastosowań. Wykorzystując dane eksperymentalne, Rödder [79] stwierdził, że hipoteza dotycząca traktowania iloczynu zbiorów rozmytych w sensie minimum funkcji przynależności została odrzucona na poziomie ufności 0,01. Stąd też wynikła potrze-

ba dalszych studiów w zakresie definiowania działań na zbiorach rozmytych. Doprowadziło to do głębszego zrozumienia pojęcia iloczynu i sumy zbiorów oraz pozwoliło na właściwą interpretację wyników eksperymentalnych. Na szczególną uwagę zasługują prace Zimmermanna i innych [93], [116], [118] dotyczące weryfikacji postaci działań na zbiorach rozmytych. Zaproponowano też nowe działania na zbiorach rozmytych [93]. W związku z powyższym normy trojkątne mogą stanowić wygodny aparat formalny dla definiowania działań na zbiorach rozmytych. Każdą z t-norm możemy odnosić do działania minimum, wprowadzając odległość [107] t-normy od minimum. Będziemy ją definiować w sposób następujący:

$$d(t) = 1-3\int_0^1\int_0^1 xty\ dxdy. \tag{4.46}$$

Całka po prawej stronie (4.46) ze względu na ograniczoność normy trójkątnej ma sens. Można wykazać, że:

$$0 \leqslant d(t) \leqslant 1, \tag{4.47}$$

przy czym $d(\min) = 0$. Wynika to z następujących nierówności:

$$0 \leqslant xty \leqslant \min(x,y), \tag{4.48}$$

co po scałkowaniu daje:

$$0 \leqslant \int_0^1\int_0^1 xty\ dxdy \leqslant \int_0^1\int_0^1 \min(x,y)dxdy. \tag{4.49}$$

Mamy

$$\int_0^1\int_0^1 \min(x,y)dxdy = 1/3. \tag{4.50}$$

Przykładowo, obliczając dla normy t_3 wartość odległości (4.46) otrzymujemy:

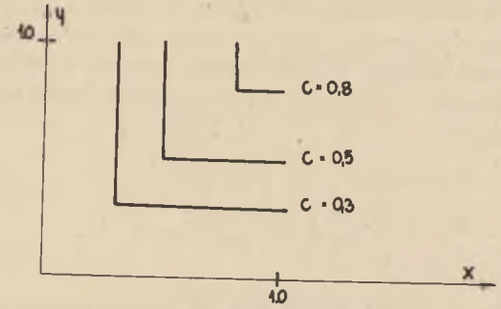
$$d(t_3) = 1-3\int_0^1\int_0^1 xy\ dxdy = 1/4. \tag{4.51}$$

Można też zaproponować inny wskaźnik [70]:

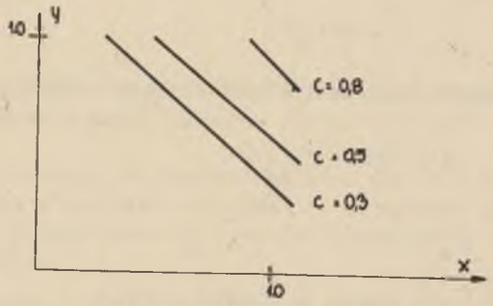
$$e(t) = \int_0^1 [2(1-c)-L(c)]\,dc, \tag{4.52}$$

gdzie L(c) jest długością krzywej c = xty. Dla t = min dostajemy L(c) = = 2(1-c) (rys. 4.1), a stąd e(min) = 0.

Biorąc przykładowo normę t_5 dla $\lambda = 0$ (rys. 4.2) dostajemy $e(t_5) = 1-\sqrt{2}/2$.



Rys. 4.1. Zależność c = min(x,y)



Rys. 4.2. Zależność c = max(0,x+y-1)

Analogicznie jak poprzednio, każdą s-normę możemy odnosić do działania maksimum wprowadzając odległość s-normy od maksimum zdefiniowaną następująco:

$$d(s) = \int_0^1 \int_0^1 x \text{s} y \, dxdy - 2/3. \qquad (4.53)$$

5. ROZWIĄZYWANIE ROZMYTYCH RÓWNAŃ RELACYJNYCH

W niniejszym rozdziale omówimy różne postacie rozmytych równań relacyjnych ze składaniem sup-t oraz równań dualnych ze składaniem inf-s. Przedstawione zostaną analityczne metody rozwiązywania tej klasy równań oraz wprowadzona zostanie charakteryzacja rodziny rozwiązań dla równań ze składaniem sax-min.

5.1. Rozmyte równania relacyjne $Y = X \Box R$ i równania dualne $Y = X \triangle R$

Rozpoczynając dyskusję na temat rozmytych równań relacyjnych wprowadzimy następującą definicję.

DEFINICJA 5.1

Sup-t(inf-s) złożeniem $\Box$, $\triangle$ zbioru rozmytego $X \in F(\mathbb{X})$ i relacji rozmytej $R \in F(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$ jest zbiór rozmyty określony na przestrzeni $\mathbb{Y}$ o funkcji przynależności:

$$(X \Box R)(y) = \sup_{x \in \mathbb{X}} [X(x) \text{t } R(x,y)], \qquad (5.1)$$

$$(X \triangle R)(y) = \inf_{x \in \mathbb{X}} [X(x) \text{s } R(x,y)], \qquad (5.2)$$

$y \in \mathbb{Y}$.

Przedmiotem rozważań są rozmyte równania relacyjne o postaci:

$$Y = X \Box R, \qquad (5.3)$$

i dualne do nich równania:

$$Y = X \triangle R, \qquad (5.4)$$

gdzie: $X \in F(\mathbb{X})$, $Y \in F(\mathbb{Y})$, $R \in F(\mathbb{X} \times \mathbb{Y})$.

Problem rozwiązywania równań przedstawiony powyżej sformułujemy następująco (patrz też [69], [73]):

I - dane są zbiory rozmyte X i Y, należy wyznaczyć relację R,
II - dany jest zbiór rozmyty Y i relacja rozmyta R, należy wyznaczyć X.

W celu rozwiązania tak postawionych problemów wprowadzimy dwa operatory korespondujące z t- oraz s-normami. Będą one użyteczne w dalszych rozważaniach.

DEFINICJA 5.2

φ - operator jest to operator o następujących własnościach:

$$\text{I} \quad \varphi : [0,1] \times [0,1] \to [0,1], \tag{5.5}$$

$$\text{II} \quad x \varphi \max(y,z) \geq \max(x\varphi y, x\varphi z), \tag{5.6}$$

$$\text{III} \quad x\, t(x\varphi y) \leq y, \tag{5.7}$$

$$\text{IV} \quad x\varphi(x\, t\, y) \geq y, \tag{5.8}$$

$x,y,z \in [0,1]$.

DEFINICJA 5.3

β - operator jest to operator o następujących własnościach:

$$\text{I} \quad \beta : [0,1] \times [0,1] \to [0,1], \tag{5.9}$$

$$\text{II} \quad x \beta \min(y,z) \leq \min(x\beta y, x\beta z), \tag{5.10}$$

$$\text{III} \quad x\, s(x\beta y) \geq y, \tag{5.11}$$

$$\text{IV} \quad x\beta(x\, s\, y) \leq y, \tag{5.12}$$

$x,y,z \in [0,1]$.

Wykorzystując φ - i β - operatory zdefiniujemy następujące złożenia.

DEFINICJA 5.4

φ-, β - złożenie zbiorów rozmytych, $X\varphi Y$, $X\beta Y$, $X \in F(\mathbb{X})$, Y $F(Y)$ jest relacją rozmytą określoną w $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ o następującej funkcji przynależności:

$$(X\varphi Y)(x,y) = X(x)\, t\, Y(y), \tag{5.13}$$

$$(X\beta Y)(x,y) = X(x)\beta Y(y), \tag{5.14}$$

$x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$.

DEFINICJA 5.5

φ-, β- złożenie relacji rozmytej i zbioru rozmytego, $R\varphi Y, R\beta Y, R \in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$, $Y \in F(\mathbb{Y})$, jest zbiorem rozmytym $R\varphi Y$, $R\beta Y \in F(\mathbb{X})$ a następującej funkcji przynależności:

$$(R\varphi Y)(x) = \inf_{y \in \mathbb{Y}} [R(x,y) \varphi Y(y)], \tag{5.15}$$

$$(R\beta Y)(x) = \sup_{y \in \mathbb{Y}} [R(x,y) \beta Y(y)], \tag{5.16}$$

$x \in \mathbb{X}$.

Udowodnimy obecnie następujące lematy.

Lemat 5.1

$$\bigvee_{X \in F(\mathbb{X})} \bigvee_{R \in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})} R \subset X\varphi(X \,\square\, R), \tag{5.17}$$

D o w ó d

Rozpisując prawą stronę (5.17) i wykorzystując nierówność (5.6) otrzymujemy:

$$(X\varphi(X \,\square\, R))(x,y) = X(x)\varphi(X \,\square\, R)(y) = X(x)\varphi\left\{\sup_{z \in \mathbb{X}} [X(z)\, t\, R(z,y)]\right\} =$$

$$= X(y)\varphi\left\{\max\left[\sup_{z \in \mathbb{X}} [X(z)\, t\, R(z,y)],\ X(x)\, t\, R(x,y)\right]\right\} \geq$$

$$\geq X(x)\varphi[X(x)\, t\, R(x,y)]. \tag{5.18}$$

Zastosowanie nierówności (5.8) do (5.18) daje:

$$(X\varphi(X \,\square\, R))(x,y) \geq R(x,y), \tag{5.19}$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{Y}$.

Lemat 5.2

$$\bigvee_{X \in F(\mathbb{X})} \bigvee_{Y \in F(\mathbb{Y})} X \,\square\, (X\varphi Y) \subset Y. \tag{5.20}$$

D o w ó d

Nierówność (5.20) wynika z zależności (5.7). Dla wszystkich $y \in \mathbb{Y}$ zachodzi bowiem:

$$(X \,\square\, (X\varphi Y))(y) = \sup_{x \in \mathbb{X}}\left\{X(x)\, t\, [X(x)\varphi Y(y)]\right\} \leq \sup_{x \in \mathbb{X}} Y(y) = Y(y). \tag{5.21}$$

Lemat 5.3

$$\bigvee_{Y\in F(\mathbb{Y})} \bigvee_{R\in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})} (R\textcircled{\varphi}Y)\,\square\, R \subset Y. \tag{5.22}$$

D o w ó d

Funkcja przynależności zbioru rozmytego stojącego po lewej stronie (5.22) równa jest:

$$\sup_{x\in\mathbb{X}}\left\{\left\{\inf_{y\in\mathbb{Y}}\left[R(x,y)\varphi Y(y)\right]\right\} t\ R(x,y)\right\}, \tag{5.23}$$

a stąd:

$$\sup_{x\in\mathbb{X}}\left\{\left\{\inf_{y\in\mathbb{Y}}\left[R(x,y)\varphi Y(y)\right]\right\} t\ R(x,y)\right\} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{X}}\left\{\left\{\min\left\{\inf_{z\in\mathbb{Y}}\left[R(x,z)\varphi Y(z)\right],\ R(x,y)\varphi Y(y)\right\}\right\} t\ R(x,y)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in\mathbb{X}}\left\{\left[R(x,y)\varphi Y(y)\right] t\ R(x,y)\right\}. \tag{5.24}$$

Biorąc pod uwagę (5.7) otrzymujemy nierówność:

$$\sup_{x\in\mathbb{X}}\left\{\left[R(x,y)\varphi Y(y)\right] t\ R(x,y)\right\} \leqslant Y(y), \tag{5.25}$$

$y\in\mathbb{Y}$.

Lemat 5.4

$$\bigvee_{X\in F(\mathbb{X})} \bigvee_{R\in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})} X \subset R\textcircled{\varphi}(X\,\square\, R). \tag{5.26}$$

D o w ó d

Mamy

$$\inf_{y\in\mathbb{Y}}\left\{R(x,y)\varphi\sup_{x\in\mathbb{X}}\left[X(x) t\ R(x,y)\right]\right\} =$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{Y}}\left\{R(x,y)\varphi\max\left\{\sup_{z\in\mathbb{X}}\left[X(z) t\ R(z,y)\right],\ X(x) t\ R(x,y)\right\}\right\}. \tag{5.27}$$

Zastosowanie zależności (5.6) i (5.8) prowadzi do:

$$\inf_{y\in\mathbb{Y}}\left\{R(x,y)\varphi\sup_{x\in\mathbb{X}}\left[X(x) t\ R(x,y)\right]\right\} \geqslant \inf_{y\in\mathbb{Y}}\left\{R(x,y)\varphi\left[X(x) t\ R(x,y)\right]\right\} =$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{Y}}\left\{R(x,y)\varphi\left[R(x,y) t\ X(x)\right]\right\} > X(x), \tag{5.28}$$

dla każdego $x\in\mathbb{X}$.□

Oznaczmy przez $\mathfrak{R}$ rodzinę relacji rozmytych $R\in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ takich, że:

$$\mathfrak{R} = \left\{R\in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y}) \mid Y = X\,\square\, R\right\}. \tag{5.29}$$

Niech $\mathfrak{X}$ oznacza rodzinę zbiorów rozmytych $X\in F(\mathbb{X})$ takich, że:

$$\mathfrak{X} = \left\{X\in F(\mathbb{X}) \mid Y = X\,\square\, R\right\}. \tag{5.30}$$

Mówimy, że relacja (zbiór) $\hat{R}\in\mathfrak{R}(\hat{X}\in\mathfrak{X})$ jest największym elementem $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$, jeżeli zachodzi:

$$T\supset\hat{R} \Rightarrow T = \hat{R} \tag{5.31}$$

tzn.

$$T(x,y)\geqslant\hat{R}(x,y) \Rightarrow T(x,y) = \hat{R}(x,y), \tag{5.32}$$

$x\in\mathbb{X}$, $y\in\mathbb{Y}$

oraz

$$W\supset\hat{X} \Rightarrow W = \hat{X} \tag{5.33}$$

$$W(x)\geqslant\hat{X}(x) \Rightarrow W(x) = X(x), \tag{5.34}$$

$x\in\mathbb{X}$.

Podobnie możemy zdefiniować w $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{X}$ relację i zbiór najmniejszy.

Obecnie udowodnimy:

TWIERDZENIE 5.1

I. Jeżeli dla danych $X\in F(\mathbb{X})$, $Y\in F(\mathbb{Y})$ istnieje $R\in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$ spełniająca rozmyte równanie relacyjne $X\,\square\, R = Y$, to największa relacja rozmyta $\hat{R}\in F(\mathbb{X}\times\mathbb{Y})$, taka że $X\,\square\,\hat{R} = Y$, dana jest w postaci:

$$\hat{R} = X\textcircled{\varphi}Y, \tag{5.35}$$

II. Jeżeli dla danych $Y \in F(Y)$ i $R \in F(X \times Y)$ istnieje $\hat{X} \in F(X)$ spełniający rozmyte równanie relacyjne $X \square R = Y$, to największy zbiór rozmyty $\hat{X} \in F(X)$, taki że $\hat{X} \square R = Y$, jest równy:

$$\hat{X} = R \textcircled{\scriptsize /} Y. \tag{5.36}$$

D o w ó d

I. Niech R będzie dowolnym rozwiązaniem równania $X \square R = Y$. Z Lematu 5.1 wynika zależność $R \subset \hat{R}$, gdzie $\hat{R} = X \textcircled{\scriptsize /} Y$. Ponadto, z nierówności $R \subset \hat{R}$ otrzymujemy $X \square R \subset X \square \hat{R}$, czyli $Y \subset X \square \hat{R}$. Z drugiej strony z Lematu 5.2 otrzymujemy $X \square \hat{R} \subset Y$. Łącząc dwie powyższe nierówności, $Y \subset X \square \hat{R}$ i $X \square \hat{R} \subset Y$ otrzymujemy równość $X \square \hat{R} = Y$.

II. Niech X będzie dowolnym rozwiązaniem równania $X \square R = Y$. Oznaczając $\hat{X} = R \textcircled{\scriptsize /} Y$, na podstawie Lematu 5.3 otrzymujemy nierówność $\hat{X} \square R \subset Y$. Zachodzi również $X \square R \subset \hat{X} \square R$ dla $X \subset \hat{X}$. Stosując następnie Lemat 5.4 dostajemy $X \subset R \textcircled{\scriptsize /} Y = \hat{X}$, co implikuje $\hat{X} \square R = Y$.

W świetle Twierdzenia 5.1 widać, że gdy zbiór rozwiązań jest niepusty, istnieje dokładnie jedna największa relacja rozmyta spełniająca równanie relacyjne. Ta właśnie relacja będzie podstawą tworzenia modeli w systemach rozmytych.

Rozpatrzmy zagadnienie wyznaczania relacji rozmytej $R \in F(X \times Y)$ dla $X \in F(X)$ i $Y \in F(Y)$ danych i takich, że $Y = X \circ R$ ($\circ$ oznacza złożenie sup-min). W [81], [82] zdefiniowano $\textcircled{\scriptsize /}$ i $\textcircled{\scriptsize \backslash}$ - złożenie X i Y w sposób następujący:

$$(X \textcircled{\scriptsize /} Y)(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } X(x) \leqslant Y(y), \\ Y(y), \text{ gdy } X(x) > Y(y) \end{cases}, \tag{5.37}$$

$$(X \textcircled{\scriptsize \backslash} Y)(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } X(x) < Y(y) \\ Y(y), \text{ gdy } X(x) \geqslant Y(y) \end{cases}, \tag{5.38}$$

$x \in X$, $y \in Y$. Wówczas każda relacja $\tilde{R} \in F(X \times Y)$ zawarta pomiędzy $X \textcircled{\scriptsize \backslash} Y$ i $X \textcircled{\scriptsize /} Y$ spełnia rozmyte równanie relacyjne $X \circ \tilde{R} = Y$.

W pracy [16] rozważano problem znajdowania rodziny rozwiązań dla danych Y i R przy dodatkowym założeniu o skończonym wymiarze przestrzeni X i Y. Dla tak postawionego zagadnienia istnieje jedno rozwiązanie największe (zbiór $\hat{X}$) wyznaczone za pomocą $\textcircled{\scriptsize /}$ - złożenia i skończony zbiór rozwiązań dolnych $\check{X}_1, \check{X}_2, \ldots, \check{X}_l \in F(X)$. Prawdziwa jest implikacja:
jeżeli $\check{X}_s \subset X \subset \hat{X}$, $s = 1,2,\ldots,l$, to $X \circ R = Y$. Warto również zauważyć, że zbiór rozwiązań równania $X \circ R = Y$ ze względu na X przy działaniu minimum tworzy półgrupę przemienną.

Podobnie jak poprzednio, można udowodnić lematy dla równań z inf-s operatorem złożenia.

Lemat 5.5

$$\bigvee_{X \in F(X)} \bigvee_{R \in F(X \times Y)} X \textcircled{\scriptsize /} (X \triangle R) \subset R. \tag{5.39}$$

Lemat 5.6

$$\bigvee_{X \in F(X)} \bigvee_{Y \in F(Y)} X \triangle (X \textcircled{\scriptsize /} Y) \supset Y. \tag{5.40}$$

Lemat 5.7

$$\bigvee_{R \in F(X \times Y)} \bigvee_{Y \in F(Y)} (R \textcircled{\scriptsize /} Y) \triangle R \supset Y. \tag{5.41}$$

Lemat 5.8

$$\bigvee_{X \in F(X)} \bigvee_{R \in F(X \times Y)} R \textcircled{\scriptsize \backslash} (X \triangle R) \subset X. \tag{5.42}$$

Wykorzystując lemat (5.5-5.8) można udowodnić następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 5.2

I. Jeżeli dla danych $X \in F(X)$, $Y \in F(Y)$ istnieje $R \in F(X \times Y)$ spełniające równanie relacyjne $X \triangle R = Y$ (tzn. $\mathfrak{R}$ jest niepusty), to najmniejsza relacja rozmyta $\check{R} \in \mathfrak{R}$ dana jest funkcją przynależności:

$$\check{R} = X \textcircled{\scriptsize \backslash} Y. \tag{5.43}$$

II. Jeżeli dla danych $Y \in F(Y)$ i $R \in F(X \times Y)$ istnieje $X \in F(X)$ spełniający rozmyte równanie relacyjne $X \triangle R = Y$ ($\mathfrak{X} \neq \emptyset$), to najmniejszy zbiór rozmyty $\check{X} \in \mathfrak{X}$ dany jest funkcją przynależności:

$$\check{X} = R \textcircled{\scriptsize \backslash} Y. \tag{5.44}$$

Operatory φ i β dla t- i s-norm przedstawionych w poprzednim rozdziale zestawiono w tabeli 5.1. Operatory $\varphi_1, \varphi_2, \beta_1, \beta_2$ zilustrowano na rys. 5.1-5.4. Warto zwrócić uwagę na równania z operatorem złożenia $\sup\text{-}t_1$. Przy $p = \infty$ otrzymujemy minimum; $\lim\limits_{p \to \infty}(xt_1y) = \min(x,y)$, $x,y \in [0,1]$. Dla tej normy trójkątnej (i konormy) rozwiązanie równania relacyjnego przedstawiono w pracy [81], przy czym odpowiedni operator przyjmuje postać:

Tabela 5.1

φ i β operatory dla t- i s-norm, $x,y \in [0,1]$

$$x\varphi_1 y = \begin{cases} 1, & x \le y \\ 1 - \sqrt[p]{(1-y)^p - (1-x)^p}, & x > y \end{cases} \qquad x\beta_1 y = \begin{cases} 0, & x > y \\ \sqrt[p]{y^p - x^p}, & x \le y \\ & p \ge 1 \end{cases}$$

$$x\varphi_2 y = \begin{cases} 1, & x \le y \\ \log_w\left[1 + \dfrac{(w^y-1)(w-1)}{w^x - 1}\right], & x > y \end{cases} \qquad x\beta_2 y = \begin{cases} 0, & x > y \\ 1 - \log_w\left[1 + \dfrac{(w^{1-y}-1)(w-1)}{w^{1-x} - 1}\right], & x \le y \end{cases}$$

$0 < w < \infty,\ w \neq 1$ $\qquad$ $0 < w < \infty,\ w \neq 1$

$$x\varphi_3 y = \begin{cases} 1, & x \le y \\ y/x, & x > y \end{cases} \qquad x\beta_3 y = \begin{cases} 0, & x > y \\ \dfrac{y - x}{1 - x}, & x \le y \end{cases}$$

$$x\varphi_4 y = \begin{cases} 1, & x \le y \\ \dfrac{y\gamma + xy(1-\gamma)}{x - y + y\gamma + xy(1-\gamma)}, & x > y \end{cases} \qquad x\beta_4 y = \begin{cases} 0, & x > y \\ \dfrac{y - x}{x[(\gamma-1)(1-y) - 1] + 1}, & x \le y \end{cases}$$

$\gamma > 0$ $\qquad$ $\gamma > 0$

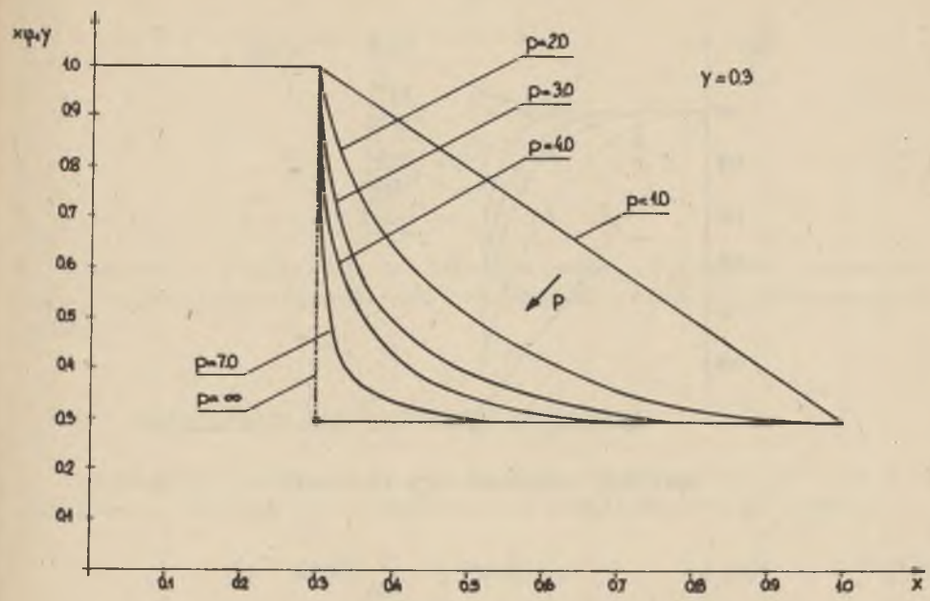
$$x\varphi_5 y = \begin{cases} 1, & x \le y \\ \dfrac{y - x + \lambda + 1 - \lambda x}{\lambda + 1 - \lambda x}, & x > y \end{cases} \qquad x\beta_5 y = \begin{cases} 0, & x > y \\ \dfrac{y - x}{1 + \lambda x}, & x \le y \end{cases}$$

$\lambda > -1$ $\qquad$ $\lambda \ge -1$

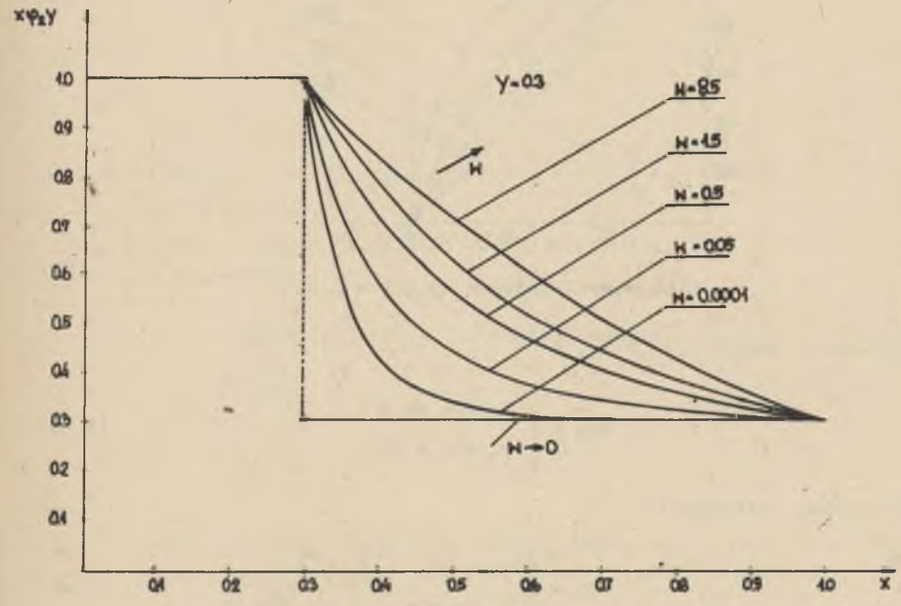
$$x\varphi_6 y = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ y, & x = 1 \end{cases} \qquad x\beta_6 y = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$$

$$x\varphi_7 y = \begin{cases} 1, & x \le y \\ \dfrac{1}{\sqrt[p]{1 + y^{-p} - x^{-p}}}, & x > y \end{cases} \qquad x\beta_7 y = \begin{cases} 0, & x > y \\ 1 - \left[1 - (1-x)^{-p} - (1-y)^{-p}\right]^{-1/p}, & x \le y \end{cases}$$

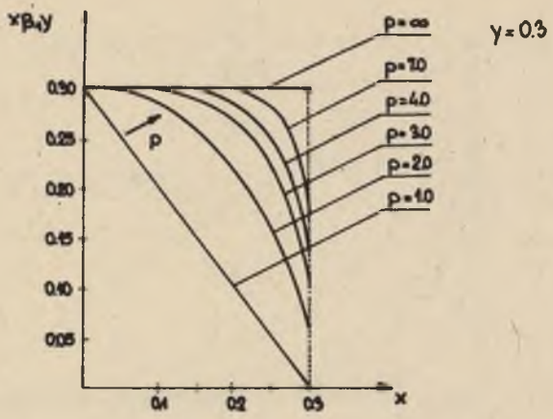
$p \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $p \in \mathbb{R}$



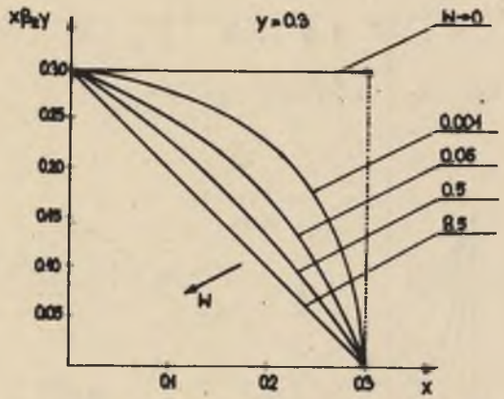
Rys. 5.1. Zależność $x\varphi_1 y$ ($y = 0.3$)



Rys. 5.2. Zależność $x\varphi_2 y$ ($y = 0.3$)



Rys. 5.3. Zależność $x\beta_1 y$ ($y = 0.3$)



Rys. 5.4. Zależność $x\beta_2 y$ ($y = 0.3$)

dla t-normy (min):

$$x \varphi y = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \leq y \\ y, & \text{dla } x > y \end{cases} \tag{5.45}$$

dla s-normy (maksimum):

$$x \beta y = \begin{cases} y, & x < y \\ 0, & x \geq y \end{cases} \tag{5.46}$$

$x, y \in [0,1]$.

Z rys. 5.1 i 5.4 wynikają zależności:

$$\lim_{p \to \infty} (x \varphi_1 y) = x \varphi y, \tag{5.47}$$

$$\lim_{p \to \infty} (x \beta_1 y) = x \beta y, \tag{5.48}$$

$x, y \in [0,1]$.

Traktując równanie $Y = X \circ R$ jako podstawowe, przejdziemy do prezentacji rozwiązywania rozmytych równań relacyjnych o bardziej złożonych postaciach.

5.2. Rozwiązywanie złożonych równań relacyjnych

Przedstawimy obecnie zastosowanie metody otrzymanej w p. 5.1 dla rozwiązywania złożonych równań relacyjnych o następujących postaciach:

$$Y = X_1 \circ X_2 \circ \ldots \circ X_n \circ R, \tag{5.49}$$

$$Y = X_1 \triangle X_2 \triangle \ldots \triangle X_n \triangle R, \tag{5.50}$$

oraz

$$T = S \circ W, \tag{5.51}$$

$$T = S \triangle W, \tag{5.52}$$

gdzie: $X_i \in F(X_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $Y \in F(Y)$, $R \in F(\bigtimes_{i=1}^{n} X_i \times Y)$, $S \in F(X \times Z)$, $W \in F(Z \times Y)$, $T \in F(X \times Y)$.

Dla każdego z równań (5.49)-(5.52) zbiór rozmyty Y i relacji T obliczane są odpowiednio:

$$Y(y) = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2 \\ \vdots \\ x_n \in X_n}} [X_1(x_1) t X_2(x_2) t \ldots t X_n(x_n) t R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)], \tag{5.53}$$

$y \in Y$,

$$Y(y) = \inf_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_2 \in X_2 \\ \vdots \\ x_n \in X_n}} [X_1(x_1) s X_2(x_2) s \ldots s X_n(x_n) s R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)], \tag{5.54}$$

$y \in Y$,

$$T(x,y) = \sup_{z\in Z}\left[S(x,z)tW(z,y)\right] \tag{5.55}$$

$$T(x,y) = \inf_{z\in Z}\left[S(x,z)sW(z,y)\right], \tag{5.56}$$

$x\in X$, $y\in Y$.

Problem rozwiązywania tych równań możemy sformułować tak jak poprzednio. A zatem dla (5.53)-(5.54) mamy:

(a) Niech $X_1,X_2,\ldots,X_n$ są dane, należy wyznaczyć R

(b) Niech $R,X_1,X_2,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_n,Y$ są dane, należy wyznaczyć X_j

(c) Niech R, Y są dane, należy wyznaczyć $X_1,X_2,\ldots,X_n$.

Rozpatrzmy zadanie (a). W tym celu zauważmy, że równanie (5.53) można zapisać następująco:

$$Y(y) = \sup_{\underline{x}\in\bigtimes_{i=1}^{n} X_i}\left[\underline{X}(\underline{x})tR(\underline{x},y)\right] \tag{5.57}$$

$y\in Y$, gdzie $\underline{X}$ jest relacją rozmytą zdefiniowaną na iloczynie kartezjańskim przestrzeni X_i, $i = 1,2,\ldots,n$. $\underline{X}$ dane jest funkcją przynależności:

$$\underline{X}(\underline{x}) = \underline{X}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = X_1(x_1)tX_2(x_2)t\ldots tX_n(x_n). \tag{5.58}$$

$x_i\in X_i$.

Stąd posługując się zależnością (5.35) otrzymujemy:

$$\hat{R} = \underline{X}\textcircled{\varphi}Y, \tag{5.59}$$

czyli:

$$\hat{R}(\underline{x},y) = \left[X_1(x_1)tX_2(x_2)t\ldots tX_n(x_n)\right]\varphi Y(y), \tag{5.60}$$

$x_i\in X_i$, $y\in Y$.

W przypadku (b), przyjmując założenie nieskończonej rozdzielności ε-normy względem supremum (por. [37]) zależność (5.53), można zapisać:

$$Y = X_j\,\square\,(X_1\,\square\,X_2\,\square\ldots\square\,X_{j-1}\,\square\,X_{j+1}\,\square\ldots\square\,X_n)\,\square\,R = X_j\,\square\,G, \tag{5.61}$$

gdzie G jest relacją rozmytą równą

$$G = X_1\,\square\,X_2\,\square\ldots\square X_{j-1}\,\square\,X_{j+1}\,\square\ldots\square\,X_n\,\square\,R, \tag{5.62}$$

$G\in F(X_j\times Y)$.

Największy zbiór rozmyty $\hat{X}_j\in F(X_j)$ jest równy:

$$\hat{X}_j = G\textcircled{\varphi}Y, \tag{5.63}$$

$$\hat{X}_j(x_j) = \inf_{y\in Y}\left[G(x_j,y)\varphi Y(y)\right], \tag{5.64}$$

$x_j\in X_j$.

Rozpatrując (c), równanie (5.53) zapiszemy jako:

$$Y = \underline{X}\,\square R, \tag{5.65}$$

a stąd otrzymujemy:

$$\hat{X} = R\textcircled{\varphi}Y. \tag{5.66}$$

Prowadzi to do zależności:

$$\hat{\underline{X}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \inf_{y\in Y}\left[R(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)\varphi Y(y)\right], \tag{5.67}$$

$x_i\in X_i$, $y\in Y$.

Zbiory rozmyte $\hat{X}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ mogą być uzyskane poprzez rzutowanie relacji $\hat{\underline{X}}$ na odpowiednie przestrzenie:

$$\hat{X}_i = \mathrm{Proj}_{X_i}\hat{\underline{X}}, \tag{5.68}$$

$$\hat{X}_i(x_i) = \sup_{\substack{x_1\in X_1\\ x_2\in X_2\\ \vdots\\ x_{i-1}\in X_{i-1}\\ x_{i+1}\in X_{i+1}\\ \vdots\\ x\in X_n}} \hat{\underline{X}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{5.69}$$

$x_i\in X_i$.

Należy podkreślić, że zbiory rozmyte $\hat{X}_i$ otrzymane w wyniku rzutowania spełniają (5.49) w przypadku, gdy relacja $\hat{\underline{X}}$ jest rozkładalna [31], [32] tzn. da się zapisać w formie:

$$\hat{\underline{X}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \hat{X}_1(x_1)t\hat{X}_2(x_2)t\ldots t\hat{X}_n(x_n). \tag{5.70}$$

Wyniki dla równań dualnych (5.50) wyprowadza się w analogiczny sposób.

Rozważając równanie relacyjne $T = S \square W$ sformułujemy następujące zadania:

(a) dane S, T, należy wyznaczyć W,
(b) dane W, T, należy wyznaczyć S.

Mogą one być rozwiązane za pomocą następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 5.3

I. Jeżeli dla danych $S \in F(X \times Z)$ i $T \in F(X \times Y)$ istnieje $W \in F(Z \times Y)$ spełniająca $T = S \square W$, to największa relacja rozmyta $\hat{W} \in F(Z \times Y)$, taka że $T = S \square \hat{W}$, dana jest funkcją przynależności:

$$\hat{W} = S^T \textcircled{\varphi} T, \tag{5.71}$$

$$W(z,y) = \inf_{x \in X} [S^T(z,x) \varphi T(x,y)], \tag{5.72}$$

$z \in Z$, $y \in Y$. (S^T oznacza transpozycję S; $S^T(z,x) = S(x,z)$).

II. Jeżeli dla danych $W \in F(Z \times Y)$ i $T \in F(X \times Y)$ istnieje $S \in F(X \times Z)$, taka że $T = S \square W$, to największa relacja rozmyta $\hat{S} \in F(X \times Z)$, $T = \hat{S} \square W$, dana jest funkcją przynależności:

$$\hat{S} = (W \textcircled{\varphi} T^T)^T, \tag{5.73}$$

$$\hat{S}(x,z) = \left\{ \inf_{y \in Y} [W(z,y) \varphi T^T(y,x)] \right\}^T, \tag{5.74}$$

$x \in X$, $z \in Z$.

Dla dualnego równania relacyjnego (5.52), przy założeniach Twierdzenia 5.3, najmniejsze relacje rozmyte $\check{W}$ i $\check{S}$ wyrażają się zależnościami:

$$\check{W} = S^T \textcircled{\vartheta} T, \tag{5.75}$$

$$\check{W}(z,y) = \sup_{x \in X} [S^T(z,x) \vartheta T(x,y)], \tag{5.76}$$

$$\check{S} = (W \textcircled{\vartheta} T^T)^T, \tag{5.77}$$

$$\check{S}(x,z) = \left\{ \sup_{y \in Y} [W(z,y) \vartheta T^T(y,x)] \right\}^T, \tag{5.78}$$

$x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Równania relacyjne o postaci przedstawionej powyżej (5.51-5.52) można też traktować jako układ równań relacyjnych indeksowanych wartościami $y \in Y$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$T_y(x) = T(x,y), \tag{5.79}$$

$$W_y(z) = W(z,y), \tag{5.80}$$

$y \in Y$.

Wówczas (5.51) możemy przedstawić w postaci równoważnej:

$$T_y(x) = \sup_{z \in Z} [S(x,z) t W_y(z)] = \sup_{z \in Z} [W_y(z) t S^T(z,x)] = (W_y \square S^T)(x). \tag{5.81}$$

Wykorzystując Twierdzenie 5.1 otrzymujemy zależności:

- dla T_y i S^T danych i spełniających (5.81), największy zbiór rozmyty $\hat{W}_y$, taki że $W_y \square S^T = T_y$, jest równy:

$$\hat{W}_y = S^T \textcircled{\varphi} T_y. \tag{5.82}$$

Ponieważ (5.82) obowiązuje dla wszystkich $y \in Y$, relacja rozmyta $\hat{W}$ równa się:

$$\hat{W} = S^T \textcircled{\varphi} T. \tag{5.83}$$

- dla W_y i T_y danych i spełniających (5.81), największa relacja rozmyta $\hat{S}_y^T$, taka że $T_y = W_y \square \hat{S}_y^T$, obliczona na podstawie (5.35) równa się:

$$\hat{S}_y^T = W_y \textcircled{\varphi} T_y, \tag{5.84}$$

$$\hat{S}_y^T(z,x) = W(z,y) \varphi T(x,y) = W(z,y) \varphi T^T(y,x), \tag{5.85}$$

$z \in Z$, $x \in X$.

Ponieważ S_y^T zależy od y i zachodzi zależność:

$$\bigvee_{y \in Y} \quad W \circledcirc T^T \supset S_y^T, \tag{5.86}$$

w rezultacie otrzymujemy:

$$\hat{S}^T = \bigcap_{y \in Y} \hat{S}_y^T, \tag{5.87}$$

czyli

$$\hat{S}(x,z) = \left\{ \inf_{y \in Y} \left[W(z,y) \wp T^T(y,z) \right] \right\}^T, \tag{5.88}$$

$x \in X$, $z \in Z$.

Omówimy obecnie wielomianowe rozmyte równanie relacyjne [65] o postaci:

$$\bigcup_{i=1}^{I} (A^i \square X \square B^i) = Y, \tag{5.89}$$

gdzie: $A^i \in F(X \times Z)$, $X \in F(X \times W)$, $B^i \in F(W \times Y)$, $Y \in F(X \times Y)$.

Dane są relacje A^i, B^i, Y, poszukujemy relacji rozmytej spełniającej (5.89). Przyjmijmy, że przestrzenie X, Y, W, Z posiadają skończoną liczbę elementów:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\},$$
$$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_p\}, \quad Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_r\}.$$

Równanie (5.89) można przedstawić w równoważnej postaci:

$$\mathcal{X} \square \mathcal{A} = \mathcal{Y} \tag{5.90}$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest relacją rozmytą (macierzą rozmytą) skonstruowaną na bazie A^i i B^i, $i = 1,2,\ldots,I$. Jest ona dana zależnością:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{I} (A^i \circledast (B^i)^T)^T, \tag{5.91}$$

$$A^i \circledast (B^i)^T = \begin{bmatrix} A^i(x_1,z_1) t (B^i)^T & \ldots & A^i(x_1,z_r) t (B^i)^T \\ \vdots & & \vdots \\ A^i(x_n,z_1) t (B^i)^T & \ldots & A^i(x_n,z_r) t (B^i)^T \end{bmatrix} \tag{5.92}$$

gdzie:

$$A^i(x_s,z_v) t (B^i)^T = A^i(x_s,z_v) t \begin{bmatrix} B^i(w_1,y_1) & \ldots & B^i(w_p,y_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B^i(w_1,y_m) & \ldots & B^i(w_p,y_m) \end{bmatrix} =$$

$$= [A^i(x_s,z_v) t B^i(w_l,y_j)], \tag{5.93}$$

$s = 1,2,\ldots,n$, $v = 1,2,\ldots,r$, $l = 1,2,\ldots,p$, $j = 1,2,\ldots,m$.

$\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ są zbiorami rozmytymi o funkcjach przynależności skonstruowanych w oparciu o relacje rozmyte X i Y:

$$\mathcal{X} = [X(z_1,w_1) X(z_1,w_2) \ldots X(z_1,w_p) X(z_2,w_1) \ldots X(z_r,w_p)], \tag{5.94}$$

$$\mathcal{Y} = [Y(x_1,y_1) Y(x_1,y_2) \ldots Y(x_1,y_m) Y(x_2,y_1) \ldots Y(x_n,y_m)]. \tag{5.95}$$

Rozmyte równanie relacyjne (5.90) rozwiązujemy korzystając z wyników uzyskanych poprzednio. Zachodzi bowiem:

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \circledcirc \mathcal{Y} \tag{5.96}$$

W analogiczny sposób rozwiązujemy równanie dualne:

$$\bigcap_{i=1}^{I} (A^i \triangle X \triangle B^i) = Y, \tag{5.96}$$

które możemy zapisać w postaci:

$$\mathcal{X} \triangle \mathcal{A} = \mathcal{Y}. \tag{5.97}$$

$\mathcal{A}$ obliczane jest z zależności

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^{I} (A^i \circledcirc (B^i)^T)^T. \tag{5.98}$$

$\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ natomiast dane są wzorami (5.94)-(5.95).

6. METODY NUMERYCZNE W ROZWIĄZYWANIU PROBLEMÓW ROZMYTYCH RÓWNAŃ RELACYJNYCH

Dyskusja prezentowana w poprzednim rozdziale dotyczyła analitycznych metod rozwiązywania równań relacyjnych. Metody te obowiązują przy założeniu, że zbiór rozwiązań jest niepusty. Obecnie przedstawione zostaną metody numeryczne, które mogą znaleźć zastosowanie w przypadku przybliżonego rozwiązywania równań. Literatura z zakresu numerycznych metod optymalizacji jest obszarna (np. [30], [78]), dlatego tutaj poruszymy podstawowe problemy i sposób ich formułowania. Przedstawiona zostanie metoda iteracji prostych pozwalająca na rozwiązanie postawionych zadań. Przyjmiemy, że przestrzenie X i Y posiadają skończoną liczbę elementów: $\bar{\bar{X}} = n$, $\bar{\bar{Y}} = m$. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$X(x_i) = x_i \in [0,1], \tag{6.1}$$

$$R(x_i,y_j) = r_{ij} \in [0,1], \tag{6.2}$$

$$Y(y_j) = y_j \in [0,1], \tag{6.3}$$

$i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Zbiory rozmyte $\underline{x}$, $\underline{y}$ oraz relacja R będą reprezentowane w postaci wektorów i macierzy:

$$\underline{x} = [x_1,x_2,\ldots,x_n], \tag{6.4}$$

$$\underline{y} = [y_1,y_2,\ldots,y_m], \tag{6.5}$$

$$R = [r_{ij}] \quad i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,m. \tag{6.6}$$

6.1. Numeryczne rozwiązywanie równań relacyjnych $\underline{x} \circ R = \underline{y}$

Podobnie jak w rozdziale 5 przy rozwiązywaniu równań $\underline{x} \circ R = \underline{y}$ można sformułować dwa podstawowe problemy:

I dane są zbiory $\underline{x}$ i $\underline{y}$, należą wyznaczyć R,

II dane są zbiory $\underline{y}$ i relacja R, należy wyznaczyć $\underline{x}$.

W przypadku, gdy zbiór rozwiązań jest niepusty, największą relację R (I) i zbiór rozmyty $\underline{x}$ (II) można wyznaczyć zgodnie z Tw. 5.1. W przeciwnym razie problemy (I)-(II) sformułujemy następująco [72]:

I dane są zbiory $\underline{x}$ i $\underline{y}$, znaleźć relację R, która minimalizuje wskaźnik jakości (kryterium) Q,

II $\underline{y}$ i R są dane, znaleźć zbiór $\underline{x}$ minimalizujący Q.

Wskaźnik jakości Q zdefiniowany jest jako odległość ϱ pomiędzy zbiorami $\underline{y}$ i $\tilde{\underline{y}}$, $Q = \varrho(\tilde{\underline{y}},\underline{y})$, gdzie $\tilde{\underline{y}}$ dla obu przypadków obliczane jest z zależności:

$$\tilde{\underline{y}} = \underline{x} \circ R. \tag{6.7}$$

W dalszym ciągu ograniczymy dyskusję do odległości Euklidesowej. Otrzymujemy zatem następujące zadania optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami:

I

$$\min_{R \in F(X \times Y)} \varrho_E(\tilde{\underline{y}},\underline{y}), \tag{6.8}$$

II

$$\min_{x \in F(X)} \varrho_E(\tilde{\underline{y}},\underline{y}). \tag{6.9}$$

Zadania (6.8)-(6.9) mogą być zapisane w postaci równoważnej, która uwypukla liczbę zmiennych i ograniczeń:

- dla (6.8):

$$\min_{r_{ij}} \varrho_E(\tilde{\underline{y}},\underline{y}), \tag{6.10}$$
$$0 \leqslant r_{ij} \leqslant 1,$$

- dla (6.9):

$$\min_{x_i} \varrho_E(\tilde{\underline{y}},\underline{y}), \tag{6.11}$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant 1$$

$i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Tak postawione problemy mogą stanowić zadania dla analizy numerycznej. Zaproponujemy tutaj metodę iteracji prostych pozwalającą na otrzymanie rozwiązań (6.8) i (6.9).

Mamy następujące schematy iteracyjne:

$$R^{(k+1)} = R^{(k)} - \alpha_k F(R)\Big|_{R=R^{(k)}}, \tag{6.12}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \alpha_k G(\underline{x})\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^{(k)}}, \tag{6.13}$$

gdzie: k oznacza numer kroku iteracji, k = 0,1,..., współczynnik α_k dobierany jest eksperymentalnie tak, aby uzyskać dużą szybkość zbieżności, bez oscylacji, a jednocześnie, by otrzymane wyniki mieściły się w przedziale $[0,1]$. Dobre rezultaty daje nierosnący ciąg α_k:

$$\alpha_k = 1/(c+k^{\varkappa}), \tag{6.14}$$

przy $c>0$, $\varkappa \geqslant 0$.

Funkcje F i G otrzymamy w wyniku formalnego zróżniczkowania odpowiednich odległości względem R i $\underline{x}$:

$$F(R) = \nabla_R Q, \tag{6.15}$$

$$G(\underline{x}) = \nabla_{\underline{x}} Q. \tag{6.16}$$

Zgodnie z (6.12) możemy zapisać następująco:

$$r_{vw}^{(k+1)} = r_{vw}^{(k)} - 2\alpha_k\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i tr_{iw}) - y_w\right]P_{vw}\Big|_{r_{vw}=r_{vw}^{(k)}} \tag{6.17}$$

$$P_{vw} = \begin{cases} \dfrac{\partial(x_v tr_{vw})}{\partial r_{vw}}, & \text{jeżeli } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i tr_{iw}) = x_v tr_{vw} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{6.18}$$

$v = 1,2,\ldots,n$, $w = 1,2,\ldots,m$, $k = 0,1,\ldots,\alpha_k$ przyjmujemy w postaci (6.14), gdzie współczynnik stały c dobieramy w wyniku oszacowania:

$$c = \sup_{a,b\in[0,1]}\left\{2\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i tr_{iw}) - y_w\right]\left|\frac{\partial(atb)}{\partial b}\right|\right\} \leqslant 2\sup_{a,b\in[0,1]}\left|\frac{\partial(atb)}{\partial b}\right| \tag{6.19}$$

Schemat iteracyjny (6.13) możemy również przedstawić następująco:

$$x_v^{(k+1)} = x_v^{(k)} - \alpha_k \cdot 2\sum_{j=1}^{m}\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i tr_{ij}) - y_j\right]P_{jv}, \tag{6.20}$$

$$P_{jv} = \begin{cases} \dfrac{\partial(x_i tr_{vi})}{\partial x_v} & \text{jeżeli } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_{iw} tr_{ij}) = x_v tr_{vj} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{6.21}$$

Podobnie jak poprzednio współczynnik c dobieramy na podstawie oszacowania:

$$c = 2\sum_{j=1}^{m}\left[\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i tr_{ij}) - y_j\right]\left|P_{jv}\right| \leqslant 2m \cdot \sup_{a,b\in[0,1]}\left|\frac{\partial(atb)}{\partial b}\right|. \tag{6.22}$$

Zilustrujemy obecnie działanie opisanego schematu iteracyjnego dla równań w max-min złożeniem:

$$\underline{y} = \underline{x} \circ R, \tag{6.23}$$

tzn.:

$$y_j = \bigvee_{i=1}^{n}(x_i \wedge r_{ij}), \tag{6.24}$$

$j = 1,2,\ldots,m$.

Pochodną $\frac{\partial(\min(a,b))}{\partial a}$ zdefiniujemy następująco (por. [92], [96]):

$$\frac{\partial(\min(a,b))}{\partial a} = \begin{cases} 1, \text{ dla } a \leqslant b \\ 0, \text{ dla } a > b \end{cases} \tag{6.25}$$

Schematy iteracyjne przyjmują postać:
- dla I

$$r_{vw}^{(k+1)} = r_{vw}^{(k)} - 2\alpha_k\left\{\bigvee_{i=1}^{n}(x_i \wedge r_{iw}) - y_w\right\}P_{vw}\Big|_{r_{vw}=r_{vw}^{(k)}} \tag{6.25}$$

$$P_{vw} = \begin{cases} 1, \text{ dla } x_v \wedge r_{vw} \geqslant \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^{n} (x_i \wedge r_{iw}) \text{ i } x_v > r_{vw} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{6.26}$$

$v = 1,2,\ldots,$ $w = 1,2,\ldots,m$ oraz

$$\alpha_k = 1/(2+k^{\mathcal{R}}). \tag{6.27}$$

- dla II

$$x_{vv}^{(k+1)} = x_v^{(k)} - 2\alpha_k \sum_{j=1}^{m} \left[\bigvee_{i=1}^{n} (x_i \wedge r_{ij}) - y_j\right] P_{jv} \Big|_{x_i = x_i^{(k)}} \tag{6.28}$$

$$P_{jv} = \begin{cases} 1, \text{ dla } x_v \wedge r_{vj} > \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^{n} (x_i \wedge r_{ij}) \text{ i } x_v \leqslant r_{vj} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{6.29}$$

i

$$\alpha_k = 1/(2m+k^{\mathcal{R}}). \tag{6.30}$$

Przykładowo, rozpatrując I i stosując schemat iteracyjny z warunkiem początkowym $r_{vw}^{(0)} = 0$, $v = 1,2,\ldots,n$, $w = 1,2,\ldots,m$ ($\mathcal{R} = 0$) otrzymujemy ciąg: $r_{vw}^{(1)} = 0.33\ y_w$, $r_{vw}^{(2)} = 0,66\ y_w$, $r_{vw}^{(3)} = 0.92\ y_w$, $\lim_{k\to\infty} r_{vw}^{(k)} = y_w$.

Przedstawimy obecnie przykład numeryczny.

Przykład 6.1

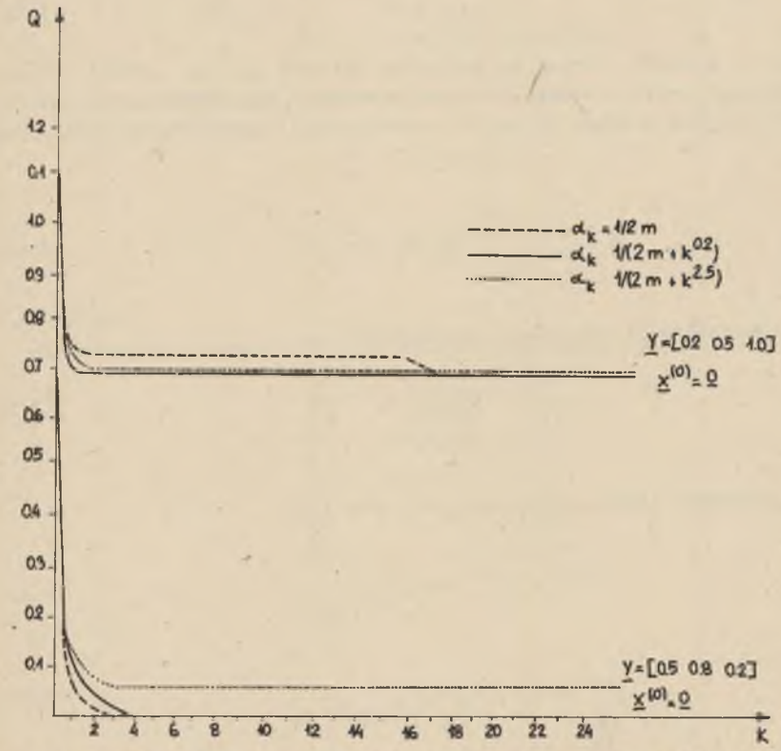
Niech relacja R będzie dana w postaci następującej macierzy:

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 0.0 \end{bmatrix}$$

zbiór zaś rozmyty $\underline{y}$ jest równy $[0.5 \quad 0.8 \quad 0.2]$. Można łatwo stwierdzić, że równanie $\underline{x} \circ R = \underline{y}$ ma rozwiązanie. Zastosowanie $\circledcirc$ - złożenia (patrz rozdział 5) daje:

$$\hat{\underline{x}} = R \circledcirc \underline{y} = [0,5 \quad 1.0].$$

Algorytm opisany powyżej został przetestowany dla trzech ciągów α_k: dla ciągu stałego $\alpha_k = 1/(2m+1)$, dla ciągów malejących $\alpha_k = 1/(2m+k^{0.2})$ i $\alpha_k = 1/(2m+k^{2.5})$. Punktem startowym we wszystkich przypadkach jest zerowy zbiór rozmyty $\underline{x}^0 = \underline{0} = [0.0 \quad 0.0]$. Wyniki obliczeń zilustrowane są na rys. 6.1. Ciąg stały pozwala na uzyskanie szybszej zbieżności w porów-



Rys. 6.1. Zależność wskaźnika jako Q od kroku iteracji dla różnych α_k

naniu z malejącymi ciągami α_k. Warto zwrócić uwagę, że dla pierwszych dwóch ciągów osiągnięto zbiór rozmyty równy $[0.5 \quad 0.8]$ (Q = 0). Ciąg trzeci maleje zbyt szybko, co w rezultacie powoduje, że wskaźnik jakości nie osiąga zera.

Powtórzymy obliczenia dla innego zbioru rozmytego $\underline{y} = [0.2 \quad 0.5 \quad 1.0]$, który nie spełnia równania (6.33). Dla ciągu (1) i (2) otrzymujemy ten sam zbiór rozmyty $\underline{x} = [0.35 \quad 0.35]$. Ciąg (3) nie pozwala na uzyskanie małych wartości Q - zjawisko to wystąpiło już dla zbioru rozmytego $\underline{y}$ użytego poprzednio.

6.2. Dekompozycja relacji rozmytych

Innym interesującym problemem, który wynika bezpośrednio z zastosowań zbiorów rozmytych w teorii systemów rozmytych jest dekompozycja relacji rozmytej. Dana jest relacja $R \in F(X \times Y)$, należy znaleźć zbiory rozmyte $\underline{x} \in F(X)$ i $\underline{y} \in F(Y)$, które spełniają zależność:

$$\underline{x} \times \underline{y} = R, \tag{6.31}$$

w której "x" oznacza iloczyn kartezjański zbiorów $\underline{x}$ i $\underline{y}$. Jeżeli (6.31) jest spełnione, wtedy mówimy, że relacja rozmyta jest dekomponowalna. Formułując niniejszy problem od strony numerycznej, rozpatrzmy wskaźnik jakości:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i t y_j - r_{ij})^2. \tag{6.32}$$

Problem optymalizacji postawimy następująco:

$$\min_{\substack{\underline{x} \in F(X) \\ \underline{y} \in F(Y)}} Q. \tag{6.33}$$

Równania schematu iteracyjnego dane są w postaci:

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} - \alpha_k F(\underline{x})\Big|_{\underline{x}=\underline{x}^{(k)}} \tag{6.34}$$

$$\underline{y}^{k+1} = \underline{y}^{k} - \beta_k G(\underline{y})\Big|_{\underline{y}=\underline{y}^{(k)}} \tag{6.35}$$

Traktując t = min, dostajemy:

$$F(\underline{x}) = 2 \sum_{j=1}^{m} (x_v \wedge y_j - r_{vj}) P_{jv} \tag{6.36}$$

$$G(y) = 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i \wedge y_w - r_{jw}) W_{iw} \tag{6.37}$$

gdzie:

$$P_{jv} = \begin{cases} 1, & x_v \leq y_j \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}, \tag{6.38}$$

$$W_{iw} = \begin{cases} 1, & y_w \leq x_i \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}, \tag{6.39}$$

$v = 1,2,\ldots,n$, $w = 1,2,\ldots,m$ oraz

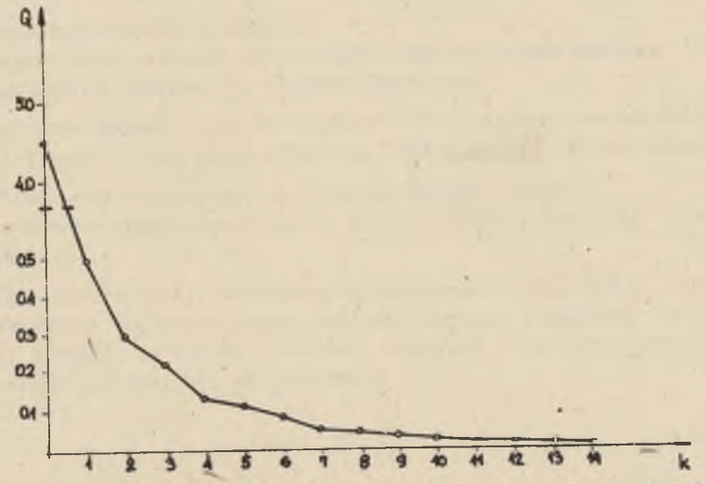
$$\alpha_k = 1/(2m+k^{\alpha}), \tag{6.40}$$

$$\beta_k = 1/(2n+k^{\alpha}). \tag{6.41}$$

Przykład 6.2

Zastosowanie (6.34)-(6.35) do następującej relacji:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$



Rys. 6.2. Zależność wskaźnika jakości od kroku iteracji

dostarcza dekompozycji:

$$\underline{x} = [0.5 \quad 0.3 \quad 0.9 \quad 0.9 \quad 0.4],$$

$$\underline{y} = [0.6 \quad 0.2 \quad 0.9 \quad 0.5].$$

(warunek początkowy iteracji $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$, $\underline{y}^{(0)} = \underline{0}$). Wartości wskaźnika jakości Q (6.32) w zależności od liczby iteracji przedstawione są na rysunku 6.2.

7. PROBLEMY IDENTYFIKACJI I STEROWANIA W SYSTEMACH ROZMYTYCH

W niniejszym rozdziale sformułujemy i przedstawimy rozwiązanie problemu identyfikacji w systemach rozmytych opisanych rozmytymi równaniami relacyjnymi dyskutowanymi poprzednio. Problem identyfikacji jest istotny i podstawowy z teoretycznego i aplikacyjnego punktu widzenia.

Otrzymany model stanowi bazę dla prezentacji zagadnień sterowania w systemach rozmytych. W sposób obszerny przedstawiona zostanie idea rozmytej dyskretyzacji przestrzeni stanu i przestrzeni sterowania, która ułatwia implementację algorytmów sterowania i identyfikacji. Zaprezentowany zostanie również sposób otrzymywania relacji regulatora rozmytego. Wykorzystując dane Boxa-Jenkinsa omówiony zostanie w sposób szczegółowy algorytm identyfikacji.

7.1. Metoda identyfikacji w systemach rozmytych

Zadanie tworzenia modelu matematycznego, który odzwierciedlałby wiedzę o systemie, stanowi etap krytyczny. Jeżeli model ten nie jest adekwatny, dalsze kroki analizy czy syntezy (np. predykcji czy sterowania) mogą być pozbawione sensu. Zazwyczaj (por. [14], [33], [85]) omawia się dwa aspekty modelu, tzn. jego strukturę i wartości wprowadzonych parametrów. Ogólna procedura identyfikacji może być podzielona na trzy etapy:

1) przyjęcie struktury modelu,
2) wyznaczenie wartości numerycznych współczynników modelu,
3) testowanie poprawności otrzymanego modelu.

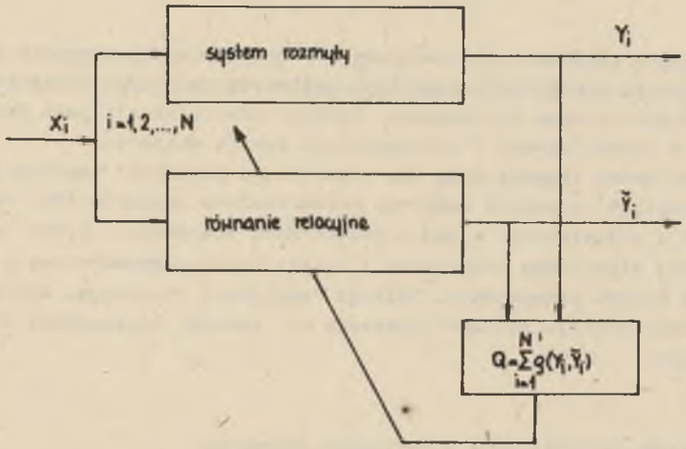
Rozpatrując modele systemów rozmytych przyjęte w formie rozmytych równań relacyjnych i dyskutując strukturę modelu należy zwrócić uwagę na:

a) rząd równania relacyjnego opisującego system rozmyty,
b) typ równania relacyjnego (sup-t, inf-s operator złożenia) oraz normę trójkątną.

Problem identyfikacji sformułujemy następująco [22], [25]: Dana jest rodzina zbiorów rozmytych (dane rozmyte) związana z systemem rozmytym i wskaźnik jakości Q; należy wyznaczyć strukturę i parametry modelu (równania relacyjnego) tak, aby minimalizować Q:

$$\min Q, \tag{7.1}$$

gdzie minimalizacja prowadzona jest ze względu na strukturę (rząd i typ równania), normę trójkątną, jej parametr (jeżeli istnieje) oraz funkcję przynależności relacji rozmytej równania. Poglądowy schemat identyfikacji w systemie rozmytym przedstawiony jest na rys. 7.1.



Rys. 7.1. Ilustracja problemu identyfikacji w systemach rozmytych

Dyskusję zadania identyfikacji rozpoczniemy od przypadku, gdy wszystkie $X_i \in F(X)$ i $Y_i \in F(Y)$ tworzące elementy danych rozmytych $\{(X_i,Y_i)\}_{i=1,2,...,N}$ spełniają równanie systemu, które przyjmuje postać:

$$Y = X \square R, \tag{7.2}$$

tzn. zachodzi:

$$\bigvee_{1 \leq i \leq N} \quad Y_i = X_i \square R. \tag{7.3}$$

W celu wyznaczenia nieznanej relacji R skorzystamy z twierdzenia 5.1. Zgodnie z (7.3) mamy:

$$\hat{R}_i = X_i \textcircled{\square} Y_i, \tag{7.4}$$

$i = 1,2,...,N$, i

$$R \subset \hat{R}_i. \tag{7.5}$$

Biorąc pod uwagę zbiór relacji $\hat{R}_i$, relację modelu wyznaczamy jako iloczyn poszczególnych relacji $\hat{R}_i$:

$$\hat{R} = \bigcap_{i=1}^{N} \hat{R}_i \tag{7.6}$$

$$\hat{R}(x,y) = \min_{1 \leq i \leq N} \hat{R}_i(x,y). \tag{7.7}$$

Rozpatrując system dualny opisany równaniem:

$$Y = X \triangle R \tag{7.8}$$

i przyjmując założenie:

$$\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant N} \quad Y_i = X_i \triangle R, \tag{7.9}$$

a następnie stosując twierdzenie 5.2, otrzymujemy:

$$\check{R} = \bigcup_{i=1}^{N} (X_i \textcircled{\triangle} Y_i), \tag{7.10}$$

tzn.:

$$\check{R}(x,y) = \max_{1 \leq i \leq N} [X_i(x) \textcircled{\triangle} Y_i(y)]. \tag{7.11}$$

Zachodzi tu inkluzja:

$$\check{R} \subset R. \tag{7.12}$$

Zgodnie z zależnością (7.5) lub (7.12) otrzymane relacje różnią się od relacji R. Podamy obecnie twierdzenia, które precyzują warunki pozwalające na otrzymanie równości relacji $\check{R} = R = \hat{R}$.

TWIERDZENIE 7.1

Jeżeli:

$$\text{I} \quad \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant N} \quad X_i \square R = Y_i, \tag{7.13}$$

$$\text{II} \quad \bar{\bar{X}} = N, \tag{7.14}$$

III X_i są zdegenerowanymi zbiorami rozmytymi, tzn.:

$$X_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ dla } x = x_i \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{7.15}$$

spełniającymi warunek

$$\bigvee_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq N} X_i(x) = 1, \tag{7.16}$$

to

$$\hat{R} = R. \tag{7.17}$$

D o w ó d

Rozpatrzmy i_0-tę parę zbiorów rozmytych X_{i_0}, Y_{i_0}, $i_0 = 1,2,\ldots,N$. Zgodnie z założeniem (i) otrzymujemy:

$$Y_{i_0}(y) = \sup_{x \in X} [X_{i_0}(x) t R(x,y)] = \max\left\{ \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq x_{i_0}}} [X_{i_0}(x) t R(x,y)], \; X_{i_0}(x_{i_0}) t \right.$$

$$\left. t R(x_{i_0},y) \right\} = R(x_{i_0},y), \tag{7.18}$$

$y \in Y$.

Stąd mamy:

$$(X_{i_0} \textcircled{\varphi} Y_{i_0})(x,y) = X_{i_0}(x) \varphi Y_{i_0}(y) = \begin{cases} 1, & x \neq x_{i_0} \\ R(x_{i_0},y), & x = x_{i_0} \end{cases} \tag{7.19}$$

Biorąc iloczyn powyższych relacji:

$$\bigcap_{i_0=1}^{N} (X_{i_0} \textcircled{\varphi} Y_{i_0}) \tag{7.20}$$

zachodzi równość:

$$\bigcap_{i_0=1}^{N} (X_{i_0} \textcircled{\varphi} Y_{i_0}) = R. \tag{7.21}$$

Dla dualnego równania relacyjnego (7.8) zachodzi twierdzenie:

TWIERDZENIE 7 2

Jeżeli:

$$\text{I} \quad \bigvee_{1 \leq i \leq N} X_i \triangle R = Y_i \tag{7.22}$$

$$\text{II} \quad \bar{X} = N, \tag{7.23}$$

III X_i są zbiorami rozmytymi spełniającymi warunki:

$$X_i(x) = \begin{cases} 0, & x = x_i \\ 1, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{7.24}$$

$$\bigvee_{x \in X} \min_{1 \leq i \leq N} X_i(x) = 0, \tag{7.25}$$

to

$$\check{R} = R. \tag{7.26}$$

D o w ó d

Dla ustalonego $i_0, i_0 = 1,2,\ldots,N$ zgodnie z (I) mamy,

$$Y_{i_0}(y) = \inf_{x \in X} [X_{i_0}(x) s R(x,y)] =$$

$$= \min\left\{ \inf_{\substack{x \in X \\ x \neq x_{i_0}}} [X_{i_0}(x) s R(x,y)], \; X_{i_0}(x_{i_0}) s R(x_{i_0},y) \right\} = R(x_{i_0},y), \tag{7.27}$$

$y \in Y$.

Obliczając dalej, wykorzystuje się równość:

$$(X_{i_0} \textcircled{\delta} Y_{i_0})(x,y) = X_{i_0}(x) \delta Y_{i_0}(y) = \begin{cases} R(x_{i_0},y), \text{ dla } & x = x_{i_0} \\ 0, \text{ dla } & x \neq x_{i_0} \end{cases} \tag{7.28}$$

skąd w oparciu o (7.10) dostajemy:

$$\bigcup_{i_0=1}^{N} (X_{i_0} \textcircled{\delta} Y_{i_0}) = R. \tag{7.29}$$

Ogólnie rzecz biorąc, w wielu sytuacjach założenia (7.3) i (7.4) nie są spełnione bądź spełnione są w przybliżeniu. Dla równań relacyjnych z sup-min (i dualnym inf-max) operatorem złożenie problem wyznaczania współczynników modelu (relacji R) został rozwiązany dzięki zastosowaniu pojęcia zbioru probabilistycznego, np. [42] - [45], [71]. W pracach tych sformułowano pojęcie spełniania równania modelu w sensie średnim i dokonano oceny uzyskanego modelu.

Po wprowadzeniu sup-t i odpowiednio inf-s złożenia istnieje możliwość znalezienia takiej normy trójkątnej i określenia jej parametru tak, aby zminimalizować zadany wskaźnik jakości. Wtedy dla modelu o ustalonym rzędzie i danych zbiorach rozmytych (X_i, Y_i), $i = 1,2,\dots,N$ należy określić taką normę trójkątną (i jej parametr, jeśli istnieje) i relację $R \in F(X \times Y)$, która minimalizuje Q:

$$\min_{\substack{R \in F(X \times Y) \\ t_1, t_2, \dots \\ s_1, s_2, \dots}} Q, \tag{7.30}$$

gdzie Q obliczane jest zgodnie ze wzorami:

- dla t-normy:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \varrho(X_i \square R, Y_i), \tag{7.31}$$

- dla s-normy:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \varrho(X_i \triangle R, Y_i), \tag{7.32}$$

gdzie ϱ jest odległością pomiędzy odpowiednimi zbiorami rozmytymi.

Otrzymana wartość wskaźnika jakości (7.31) lub (7.32) określa miarę odległości uzyskanego modelu od zebranych danych Y_i, $i = 1,2,\dots,N$.

Można zaproponować inny sposób oceny uzyskanego modelu poprzez wykorzystanie miary zgodności (miary możliwości) zbiorów rozmytych Y_i i otrzymanych z utworzonego modelu $\tilde{Y}_i$ ($\tilde{Y}_i = X_i \square R$ lub $\tilde{Y}_i = X_i \triangle R$). Miara ta definiowana jest następująco [115]:

$$\lambda_i = M(\tilde{Y}_i | Y_i) = \sup_{y \in Y} [\min(\tilde{Y}_i(y), Y_i(y))], \tag{7.33}$$

$i = 1,2,\dots,N$.

W przypadku zupełnej zgodności, $\lambda_i = 1$, zaś $\lambda_i = 0$ oznacza całkowity brak zgodności pomiędzy Y_i i $\tilde{Y}_i$. Uśredniając λ_i otrzymujemy globalną ocenę modelu:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i}{N}. \tag{7.34}$$

Minimalizacja (7.30) może okazać się zadaniem złożonym. Można zaproponować rozwiązanie suboptymalne przyjmując określoną normę (konormę) z parametrem i minimalizując (7.30) względem tego parametru. Relację $\tilde{R}$ obliczać będziemy zgodnie z zależnością:

$$\tilde{R} = \bigcap_{i=1}^{N} (X_i \circledcirc Y_i). \tag{7.35}$$

Rozpatrzmy prosty przykład numeryczny.

<u>Przykład 7.1</u>

Dana jest rodzina zbiorów rozmytych (X_i, Y_i), $i = 1,2,3$. Model systemu przyjmiemy w postaci:

$$\tilde{Y}_i = X_i \square \tilde{R}, \tag{7.36}$$

$$\tilde{Y}_i = X_i \triangle \tilde{R}, \tag{7.37}$$

z normą trójkątną $t_1(s_1)$ por. tab. 4.1.

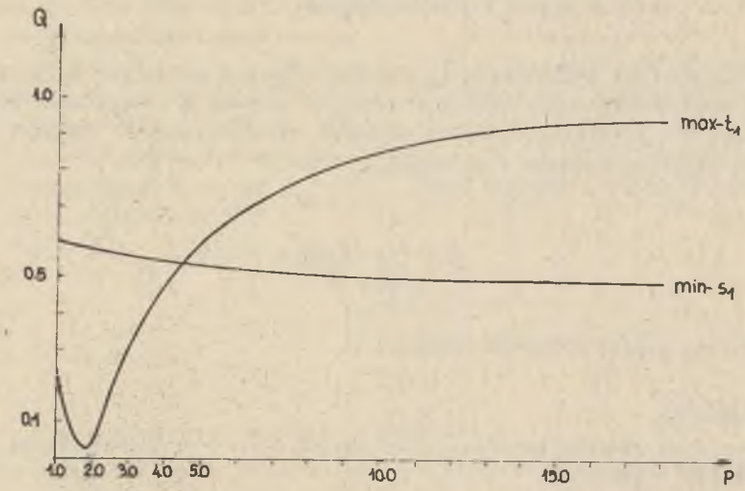
i	X_i		Y_i		
1	0.40	0.70	0.58	0.22	0.39
2	1.00	0.30	1.00	0.50	0.90
3	0.50	0.60	0.50	0.29	0.49

Odległość ϱ traktować będziemy jako odległość Hamminga ϱ_H [31]. Mamy:

$$Q = \sum_{i=1}^{3} \varrho_H(\tilde{Y}_i, Y_i) \tag{7.38}$$

$\tilde{Y}_i = X_1 \square \tilde{R}$ lub $\tilde{Y}_i = X_1 \triangle \tilde{R}$, w zależności od przyjętego złożenia. $\tilde{R}$ obliczane jest zgodnie z (7.35) lub (7.14). Optymalną wartość parametru p ($p \geq 1$) otrzymujemy w wyniku minimalizacji wskaźnika (7.38). Wybór normy $t_1(s_1)$ następuje w zależności od wartości Q.

Wartości wskaźnika jakości przedstawione są na rys. 7.2.



Rys. 7.2. Zależność Q = Q(p) dla max-t_1 i min-s_1 operatora złożenia

Widać stąd wyraźnie, że minimalna wartość Q osiągana jest dla złożenia max-t_1 i p = 2.0. Relacja rozmyta $\tilde{R}$ jest równa:

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.496 & 0.890 \\ 0.700 & 0.280 & 0.470 \end{bmatrix}.$$

Dla $p = \infty$ otrzymujemy Q = 1.04 i

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.22 & 0.39 \\ 0.50 & 0.22 & 0.39 \end{bmatrix}.$$

Dla operatora złożenia min-s_1 i $p = \infty$, Q = 0.49 oraz

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0.58 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.50 & 0.90 \end{bmatrix}.$$

7.2. Numeryczne rozwiązywanie wybranych problemów identyfikacji i sterowania

Obecnie omówimy szczegółowo niektóre problemy identyfikacji i sterowania dla systemów opisanych rozmytymi równaniami relacyjnymi z max-min operatorem złożenia ($\bar{X} = n$, $\bar{U} = m$). Prezentowane metody mogą być łatwo przeniesione na systemy dowolnego rzędu opisane równaniami z dowolną normą trójkątną. Model systemu przyjmiemy w postaci:

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{u}_t \circ \underline{x}_t \circ R, \tag{7.39}$$

gdzie $\underline{u}_t$, $\underline{x}_t$, $\underline{x}_{t+1}$ są zbiorami rozmytymi sterowania i stanu określonymi w dyskretnych chwilach czasu. W celu uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenie:

$$\underline{y}_l = \underline{u}_l \circ \underline{x}_l \circ R, \tag{7.40}$$

$l = 1,2,\ldots,K,$

$$(\underline{u}_l, \underline{x}_l, \underline{y}_l) = (\underline{u}_t, \underline{x}_t, \underline{x}_{t+1}), \tag{7.41}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{u}_l &= [u_1^l \; u_2^l \; \ldots \; u_m^l] \\ \underline{x}_l &= [x_1^l \; x_2^l \; \ldots \; x_n^l] \\ \underline{y}_l &= [y_1^l \; y_2^l \; \ldots \; y_n^l] \end{aligned} \tag{7.42}$$

Rozpatrując skończony zbiór danych (rodzina zbiorów rozmytych) (7.41) i ustalając wskaźnik jakości Q jako sumę odległości Euklidesowych ϱ_E pomiędzy $\underline{u}_l \circ \underline{x}_l \circ R$ i $\underline{y}_l$, $l = 1,2,\ldots,N$:

$$Q = \sum_{l=1}^{K} \varrho_E(\underline{u}_l \circ \underline{x}_l \circ R, \underline{y}_l), \tag{7.43}$$

relacja R zostanie wyznaczona w wyniku minimalizacji Q:

$$\min_{R \in F(U \times X \times X)} Q. \tag{7.44}$$

Wzór (7.43) można zapisać w równoważnej postaci:

$$Q = \sum_{l=1}^{K} \sum_{z=1}^{n} \left[\bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (u_i^l \wedge x_j^l \wedge r_{ijz}) - y_z^l \right]^2 \tag{7.45}$$

Korzystając z wyników rozdziału 6 otrzymujemy:

$$r_{vwz}^{(k+1)} = r_{vwz}^{(k)} - \alpha_k F(r_{vwz}) \Big|_{r_{vwz}=r_{vwz}^{(k)}}, \tag{7.46}$$

v = 1,2,...,m,2, z = 1,2,...,n, k = 0,1,2,...,

gdzie:

$$F(r_{vwz}) = 2 \sum_{l=1}^{K} \left[\bigvee_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} (u_i^l \wedge x_j^l \wedge r_{ijz} - y_z^l) \right] P_{lvwz}, \tag{7.47}$$

$$P_{lvwz} = \begin{cases} 1, \text{ dla } u_v^{(l)} \wedge x_w^{(l)} \wedge r_{vwz} \geqslant \bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^{n} \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq w}}^{n} (u_i^l \wedge x_j^l \wedge r_{ijz}) \\ \qquad \text{i } r_{vwz} \leqslant u_v^{(l)} \wedge x_w^{(l)} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{7.48}$$

$$\alpha_k = 1/(2K+k^{\alpha}). \tag{7.49}$$

Schemat iteracyjny (7.46) może być użyty do wyznaczenia relacji występujących w równaniach wyższego rzędu. Należy zwrócić uwagę,że liczba zmiennych, których wartości muszą być wyznaczone,wzrasta gwałtownie.Rozpatrzmy równanie rzędu L-tego:

$$\underline{x}_{t+L} = \underline{u}_t \circ \underline{x}_t \circ \underline{x}_{t+1} \circ \cdots \circ \underline{x}_{t+L-1} \circ R. \tag{7.50}$$

Mamy w tym przypadku:

$$R \in F(U \times X \times \cdots \times X). \tag{7.51}$$
$$(L+1)\text{-razy}$$

Określenie relacji wymaga więc wyznaczenia $m \cdot n^{L+1}$ elementów.

Jedną z szeroko dyskutowanych metod reprezentacji systemów niedeterministycznych jest opis systemu przy wykorzystaniu zbiorów i relacji. Relacja R_b wiążąca wejście (sterowanie) i stan reprezentowane w formie zbiorów przyjmuje wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0,1\}$. Przyjęty w pracy model w postaci rozmytego równania relacyjnego ma znacznie ogólniejszy charakter. Relacja R_b jest indukowana przez relację rozmytą R i wyraża się zależnością:

$$R_b(u,x,y) = \begin{cases} 1, \text{ dla } R(u,x,y) \geqslant e \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{7.52}$$

$e \in [0,1]$, $u \in U$, x, $y \in X$.

Wartość progowa e dobrana jest w wyniku minimalizacji następującej sumy odległości:

$$\sum_{l=1}^{K} \varrho_E(\underline{u}_l \circ \underline{x}_l \circ R_b, \underline{y}_l) \tag{7.53}$$

względem e. Metoda tworzenia relacji R_b zilustrowana zostanie za pomocą następującego przykładu.

Przykład 7.2

Rozpatrzmy model postaci:

$$\underline{y} = \underline{x} \circ R. \tag{7.54}$$

Dostarczone dane przedstawiono poniżej:

$\underline{x}$	$\underline{y}$
1 1 0 0	1 0 1 1
0 0 1 0	0 1 1 0
1 1 0 0	1 0 1 0
0 0 1 1	1 1 0 0
0 0 0 1	0 1 0 1
1 1 0 0	0 1 0 1
0 0 1 0	1 1 1 0
1 0 0 1	0 1 0 1
0 0 0 1	1 1 1 1

Relacja R obliczona zgodnie z zależnością (7.46) jest równa:

$$\begin{vmatrix} 0.30 & 0.33 & 0.30 & 0.75 \\ 0.67 & 0.33 & 0.67 & 0.57 \\ 0.67 & 1.00 & 0.67 & 0.00 \\ 0.33 & 1.00 & 0.33 & 0.75 \end{vmatrix}$$

zaś wartość wskaźnika jakości Q wynosi 6.10. Zależność pomiędzy wartością progową e a sumą odległości (7.53) dana jest następująco:

e	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Q	14	14	14	14	9	9	9	13	16	16	16

Dla $e \in [0.4, 0.6]$ Q przyjmuje wartość minimalną, która jest wyższa w porównaniu z tą, która daje model opisany relacją rozmytą. Indukowana relacja R_b (e = 0.6) przymuje postać:

$$R_b = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Biorąc pod uwagę (7.39) sformułujemy trzy problemy sterowania:

A. Wyznaczenie sterowania $\underline{u}$ dla danego celu $\underline{x}_{opt}$, przy ograniczeniach i bez ograniczeń.

B. Sterowanie wielokrokowe.

C. Konstrukcja relacji regulatora $G \in F(X \times U)$ dla sterowania rozmytego, co koresponduje z zadaniem tworzenia relacji regulatora rozmytego dyskutowanego w rozdziale 1.

W A możemy wyróżnić dwa problemy, sformułowane w następujący sposób:

I. określony jest stan $\underline{x}_{opt}$, stan systemu dany jest zbiorem rozmytym $\underline{x}$; wyznaczyć sterowanie $\underline{u} \in F(U)$ tak, aby minimalizować odległość pomiędzy $\underline{x}_{opt}$, a $\underline{u} \circ \underline{x} \circ R$:

$$\min_{\underline{u} \in F(U)} \varrho(\underline{u} \circ \underline{x} \circ R, \underline{x}_{opt}). \tag{7.55}$$

Oznaczając

$$\underline{x} \circ R = T \in F(U \times X), \tag{7.56}$$

mamy

$$\min_{\underline{u} \in F(U)} \varrho(\underline{u} \circ T, \underline{x}_{opt}). \tag{7.57}$$

Zadanie optymalizacji (7.57) można rozwiązać metodami przedstawionymi w rozdziale 6. Wprowadźmy dodatkowe ograniczenie narzucone na sterowanie rozmyte w postaci zbioru rozmytego $\underline{u}_{opt} \in F(U)$. Minimalizowany wskaźnik jakości powinien uwzględniać oba ograniczenia:

II. sterowanie przy ograniczeniach $\underline{u}_{opt} \in F(U)$: określony jest stan systemu $\underline{x} \in F(X)$, dany jest $\underline{x}_{opt}$, wyznaczyć $\underline{u} \in F(U)$ taki, aby minimalizować odległość:

$$\varrho(\underline{u} \circ \underline{x} \circ R, \underline{x}_{opt}) + \varrho(\underline{u}, \underline{u}_{opt}). \tag{7.58}$$

Ad B. Wielokrokowe zadanie sterowania polega na wyznaczaniu ciągu sterowań rozmytych $\underline{u}_k, \underline{u}_{k+1}, \ldots, \underline{u}_{k+L-1}$ o długości L, który pozwala na ociągnięcie celu $\underline{x}_{opt}$. Pisząc równanie (7.39) dla kolejnych dyskretnych chwil czasu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{u}_k \circ \underline{x}_k \circ R, \\ \underline{x}_{k+2} &= \underline{u}_{k+1} \circ \underline{x}_{k+1} \circ R = \underline{u}_{k+1} \circ \underline{u}_k \circ \underline{x}_k \circ R \circ R = \underline{u}_k \circ \underline{u}_{k+1} \circ \underline{x}_k \circ R \circ R, \\ &\vdots \\ \underline{x}_{k+L} &= \underline{u}_k \circ \underline{u}_{k-1} \circ \ldots \circ \underline{u}_{k+L-1} \circ x_k \circ \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{L\text{-razy}} \end{aligned} \tag{7.58}$$

Niech

$$\underline{u}(L) = \underline{u}_k \circ \underline{u}_{k+1} \circ \ldots \circ \underline{u}_{k+L-1} \tag{7.59}$$

oznacza relację rozmytą zdefiniowaną w L-krotnym iloczynie kartezjańskim przestrzeni U i równą:

$$\underline{u}(L)(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_L}) = \underline{u}_k(u_{i_1}) \wedge \underline{u}_{k+1}(u_{i_2}) \wedge \ldots \wedge \underline{u}_{k+L-1}(u_{i_L}), \tag{7.60}$$

$i_1, i_2, \ldots, i_L = 1, 2, \ldots, m.$

$$R_L = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{L\text{-razy}} \tag{7.61}$$

jest relacją rozmytą określoną w $U \times U \times \ldots \times U \times X \times X$ o funkcji przynależności:

$$R_L(u_{i_1},u_{i_2},\ldots,u_{i_L},x_j,y) = \bigvee_{k_1,k_2,\ldots,k_{L-1}} (r_{i_1 j k_1} \wedge r_{i_2 k_1 k_2} \wedge \ldots \wedge r_{i_L k_{L-1}}) \quad (7.62)$$

$i_1,i_2,\ldots,i_L = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,n.$

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie:

$$G = \underline{x}_k \circ R_L = \bigvee_{j=1}^{m} (x_j \wedge R_L(u_{i_1},u_{i_2},\ldots,u_{i_L},x_j,y)). \quad (7.63)$$

Równanie (7.58) zapiszemy w postaci:

$$\underline{x}_{k+L} = \underline{u}(L) \circ G, \quad (7.64)$$

czyli:

$$\underline{x}_{opt} = \underline{u}(L) \circ G. \quad (7.65)$$

Sterowanie $\underline{u}(L)$ może być obliczone w oparciu o wzory z rozdziału 5 i 6. Warto nadmienić, że sterowanie L-krokowe w przestrzeni U można zastąpić sterowaniem jednokrokowym w L-krotnym iloczynie kartezjańskim U.

Ad C. Konstrukcja relacji rozmytej G może być traktowana jako próba wyznaczenia sprzężenia zwrotnego w systemie rozmytym, które dla każdego zbioru rozmytego stanu $\underline{x}$ generuje zbiór rozmyty $\underline{u}$ pozwalający na otrzymanie zbioru rozmytego stanu $\underline{y}$.

Równanie regulatora przyjmiemy w następującej postaci:

$$\underline{u}_k = \underline{x}_k \circ G. \quad (7.66)$$

Wstawiając (7.66) do równania modelu (7.39) dostajemy zależność:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{u}_k \circ \underline{x}_k \circ R = \underline{x}_k \circ G \circ \underline{x}_k \circ R. \quad (7.67)$$

Relacja G powinna spełniać warunek:

$$\bigwedge_{\underline{x} \in F(X)} \underline{y} = \underline{x} \circ G \circ \underline{x} \circ R.$$

Prowadzi to do następującego zadania optymalizacji:

$$\min_{G \in F(X \times U)} Q, \quad (7.68)$$

gdzie:

$$Q = \sum_{x \in F'(X)} \sum_{j=1}^{n} \left[\bigvee_{k=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{t=1}^{n} (x_i \wedge x_t \wedge g_{tk} \wedge r_{kij}) - y_j \right]^2. \quad (7.69)$$

Pierwsze sumowanie przebiega po wszystkich stanach $\underline{x}$ należących do rodziny $F'(X)$ (podrodziny $F(X)$) wszystkich zbiorów rozmytych określonych w X. Wybór podrodziny może być przeprowadzony na wiele sposobów. Wyróżnimy tu dwa z nich:

$F'(X) = \{x^1,x^2,\ldots,x^M\}$ składa się z wyróżnionych zbiorów rozmytych zdefiniowanych w przestrzeni X, dla których można podać interpretację lingwistyczną (np. mały, średni, duży), tym samym stanowią one poprzedniki w implikacjach rozmytych używanych przy konstrukcji regulatora rozmytego.

$F'(X) = \{\{x_1\},\{x_2\},\ldots,\{x_n\}\}$ składa się ze zdegenerowanych zbiorów rozmytych takich, że $\underline{x}_j(x_i) = 1$ dla $i = j$ i 0 dla $i \neq j$. Takie zdefiniowanie $F'(X)$ jest wygodne z punktu widzenia rozwiązania numerycznego. Wskaźnik (7.69) wyraża się w postaci podwójnej sumy:

$$Q = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\bigvee_{k=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{t=1}^{n} (x_i \wedge x_t \wedge g_{tk} \wedge r_{kij}) - y_j \right]^2. \quad (7.70)$$

7.3. Konstrukcja modeli rozmytych za pomocą dyskretyzacji rozmytej

Rozpatrzmy obecnie problem identyfikacji w systemach rozmytych w sytuacji, gdy mamy do czynienia z informacją o charakterze lingwistycznym reprezentowaną za pomocą zbiorów rozmytych, jak i danymi w postaci liczbowej (zdegenerowanymi zbiorami rozmytymi). Skonstruowany model powinien być tworzony w oparciu o obie formy danych. W celu jednolitego przetwarzania informacji wykorzystamy koncepcję dyskretyzacji [99], [103], [104] rozmytej. Polega ona na zdefiniowaniu w przestrzeni X rodziny zbiorów podstawowych $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,\ldots,\mathcal{X}_N$, która "pokrywa" X (por. rozdział 1). Zapewnia to, że każdy element $x \in X$ należy do przynajmniej jednego $\mathcal{X}_i$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ ze stopniem przynależności różnym od zera. Każdy zbiór rozmyty $\underline{x} \in F(X)$ może być wyrażony przy użyciu zbiorów podstawowych zgodnie z zależnością:

$$\mathcal{X}_i = \sup_{z \in X} [\min(\mathcal{X}_i(z),\underline{x}(z))] = \mathcal{N}(\underline{x}|\mathcal{X}_i), \quad (7.71)$$

gdzie: $\mathcal{X}_i$ jest wspomnianą w p. 7.1 miarą możliwości zbioru rozmytego $\underline{x}$ względem $\mathcal{X}_i$, i = 1,2,....,N. Idea dyskretyzacji rozmytej pozwala na zastąpienie zbioru rozmytego $\underline{x} \in F(\mathcal{X})$ zbiorem rozmytym $\underline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$ określonym na skończonej rodzinie zbiorów podstawowych x_i, i = 1,2,....,N. W przypadku zdegenerowanego zbioru rozmytego (7.71) upraszcza się do postaci:

$$x_i = \mathcal{X}_i(z_0), \tag{7.72}$$

gdzie $\underline{x}(z_0) = 1$.

W ten sposób modele rozmyte mogę być tworzone nie bezpośrednio na przestrzeniach U i X, jak to miało miejsce dotychczas, lecz na przestrzeniach zbiorów podstawowych $\mathcal{U}$ i $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_M\} \tag{7.73}$$

$$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}. \tag{7.74}$$

Celowość zastosowania tej konstrukcji może być uzasadniona w dwojaki sposób:

- pozwala na zmniejszenie zajętości pamięci koniecznej do przechowywania elementów relacji modelu, która mając postać dyskretną wymaga zapamiętania znacznej liczby elementów. Przykładowo, dyskutując (7.39) relacja składa się z m.n.n elementów. Dla modeli określonych w przestrzeni zbiorów podstawowych $\mathcal{U}$ i $\mathcal{X}$ wymaga to zapamiętania M.N.N elementów, przy czym M≪m, N≪n,
- dane rozmyte i nierozmyte traktowane są w jednolity sposób.

Ilustrują zastosowania metody dyskretyzacji są następujące dwa przykłady

Przykład 7.3

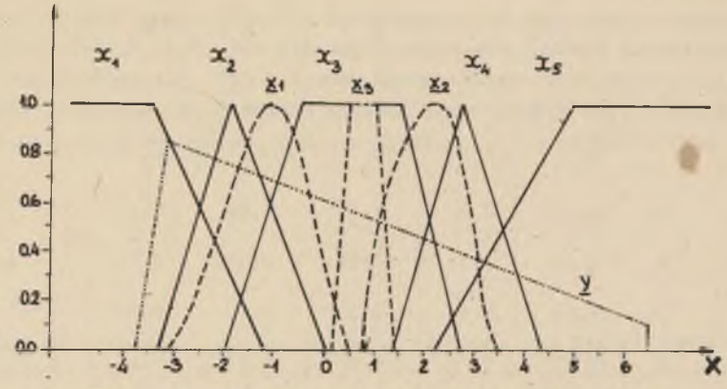
W tabeli 7.1 zebrano dane dla systemu rozmytego, który opisać będziemy rozmytym równaniem relacyjnym rzędu pierwszego z sup-min operatorem złożenia. Dane te zawierają zarówno wartości liczbowe, jak i zbiory rozmyte. Przyjęty w sposób subiektywny podział przestrzeni X i U ilustrują rys. 7.3 i 7.4. Po dokonaniu transformacji danych z tab. 7.1 zgodnie z zależnościami (7.71)-(7.72) i obliczeniu relacji rozmytej R otrzymujemy:

Tabela 7.1

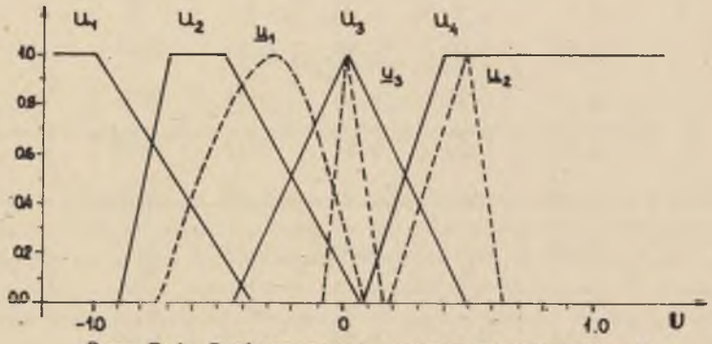
Dane dotyczęce sterowania i stanu w systemie (7.39)

sterowanie u_k	stan x_k
90.1	3.5
-0.2	0.5
$\underline{u}_1$	$\underline{x}_1$
$\underline{u}_2$	2.5
-0.5	-3.5
0.3	$\underline{x}_2$
$\underline{u}_3$	$\underline{x}_3$

	$\mathcal{X}_1$	$\mathcal{X}_2$	$\mathcal{X}_3$	$\mathcal{X}_4$	$\mathcal{X}_5$
$\mathcal{X}_1$	0.19	0.00	0.57	0.28	0.31
$\mathcal{X}_2$	0.19	0.11	0.57	0.18	0.23
$\mathcal{X}_3$	0.19	0.11	0.57	0.18	0.23
$\mathcal{X}_4$	0.22	0.13	0.57	0.17	0.15
$\mathcal{X}_5$	0.22	0.13	0.57	0.17	0.15
					$\mathcal{U}_1$
	0.16	0.00	0.85	0.84	0.45
	0.19	0.11	0.42	0.18	0.23
	0.23	0.13	0.57	0.17	0.15
	0.23	0.13	0.57	0.17	0.15
	0.23	0.13	0.57	0.17	0.15
					$\mathcal{U}_2$
	0.19	0.11	0.57	0.18	0.23
	0.19	0.11	0.42	0.18	0.23
	0.19	0.02	0.47	0.01	0.01
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
					$\mathcal{U}_3$
	0.22	0.13	0.57	0.17	0.15
	0.22	0.13	0.57	0.17	0.15
	0.19	0.02	0.73	0.01	0.01
	0.26	0.00	0.73	0.00	0.00
	0.69	0.00	0.36	0.00	0.00
					$\mathcal{U}_4$



Rys. 7.3. Dyskretyzacja rozmyta przestrzeni X



Rys. 7.4. Dyskretyzacja rozmyta przestrzeni U

Relacja rozmyta tworzy zwartę reprezentację zbioru reguł lingwistycznych opisujących działanie systemu. Każdemu elementowi macierzy R można przyporządkować następującą implikację:

- jeżeli stan systemu w k-tej chwili czasu dany jest przez $\mathcal{X}_i$ i sterowanie dane jest zbiorem rozmytym $\mathcal{U}_j$, to stan systemu w(k+1)-szej chwili czasu określony jest przez $\mathcal{X}_{k_{ij}}$, i,k = 1,2,...,N, j = 1,2,...,M.

Każdemu zdaniu przypisana jest miara możliwości $\lambda_{ijk} \in [0,1]$. Przykładowo: $\mathcal{M}$(jeżeli $\mathcal{X}_4$ i $\mathcal{U}_1$, to $\mathcal{X}_3$) = 0.57.

Relację modelu przedstawimy w innej formie. Ustalonym $\mathcal{X}_i$ i $\mathcal{U}_j$ przyporządkujmy zbiory rozmyte $\mathcal{X}_k$, które w kontekście występowania $(\mathcal{X}_i, \mathcal{U}_j)$ posiadają najwyższe wartości miary możliwości. Pozwala to na utworzenie następującej tablicy:

	$\mathcal{U}_1$	$\mathcal{U}_2$ ...	$\mathcal{U}_j$ ...	$\mathcal{U}_M$
$\mathcal{X}_1$				
$\mathcal{X}_2$				
.				
.				
.				
$\mathcal{X}_i$			λ_{ijk_0}	
.				
.				
.				
$\mathcal{X}_N$				

gdzie:

$$\lambda_{ijk_0} = \max_{1 \le k \le N} \lambda_{ijk}. \tag{7.75}$$

Postawimy teraz problem wyznaczenia relacji G regulatora dla celu danego zbiorem rozmytym $\underline{y}$ (rys. 7.3), którego reprezentacja w przestrzeni $\mathcal{X}$ dana jest poniżej:

$$[0.85 \quad 0.70 \quad 0.65 \quad 0.45 \quad 0.37].$$

Relacja G, obliczona według opisanego uprzednio algorytmu, posiada funkcję przynależności:

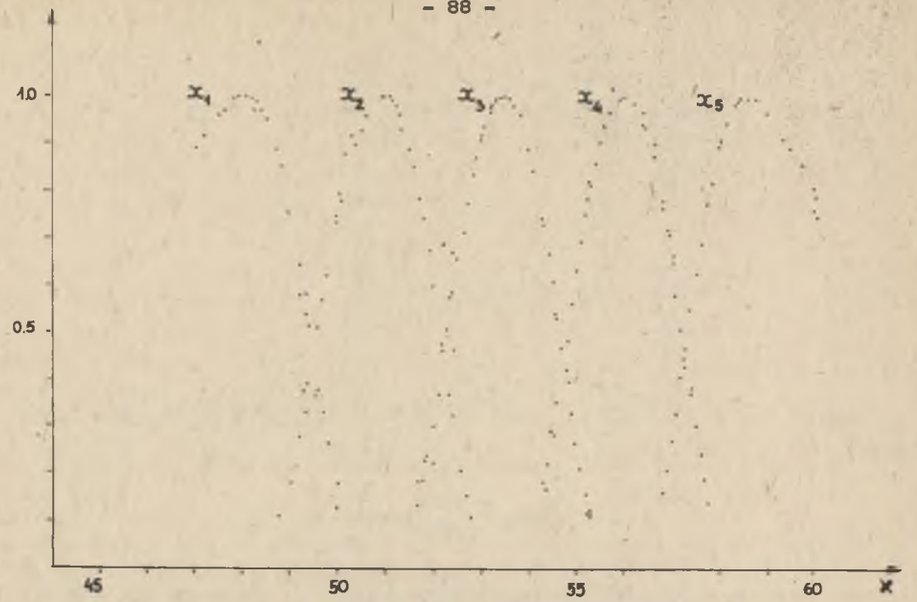
	$\mathcal{U}_1$	$\mathcal{U}_2$	$\mathcal{U}_3$	$\mathcal{U}_4$
$\mathcal{X}_1$	0.55	0.55	0.75	0.55
$\mathcal{X}_2$	0.55	0.55	0.86	0.55
$\mathcal{X}_3$	0.55	0.55	0.80	0.55
$\mathcal{X}_4$	0.55	0.55	0.86	0.55
$\mathcal{X}_5$	0.82	0.55	0.54	0.55

Przykład następny prezentuje działanie algorytmu budowy modelu rozmytego systemu dla danych o charakterze numerycznym.

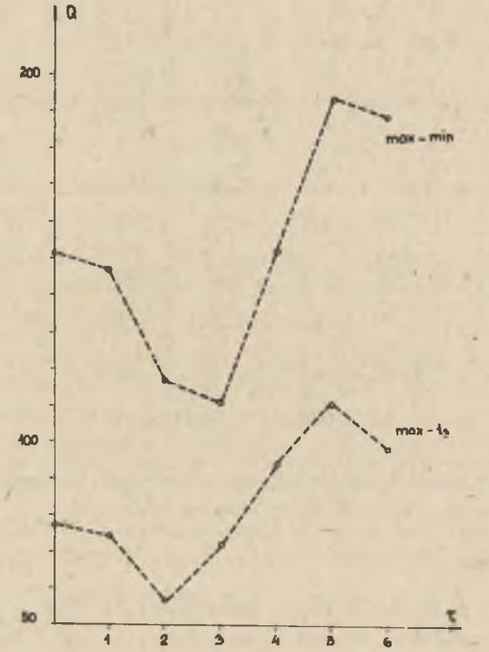
Przykład 7.4

Rozpatrywane dane pochodzą z pracy Boxa-Jenkinsa [10] i były wielokrotnie stosowane przy ocenie algorytmów identyfikacji [95]. Zaproponujemy model rozmyty opisany równaniem:

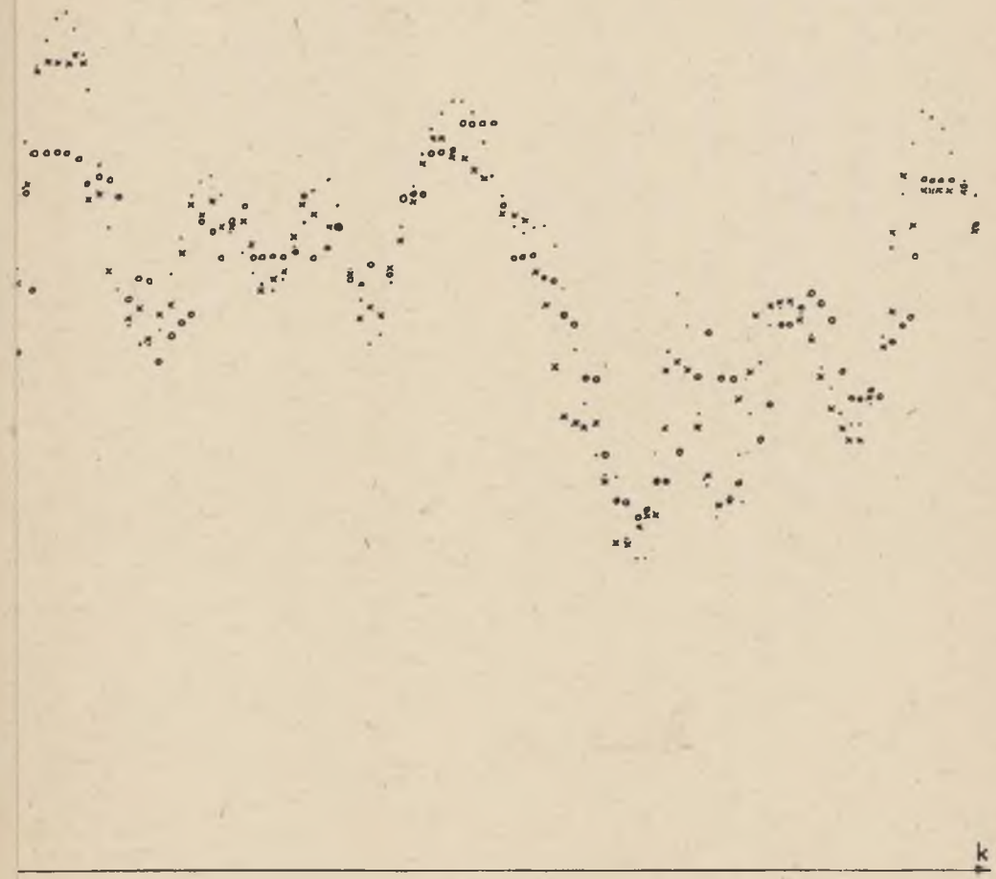
$$\underline{x}_{k+1} = \underline{u}_{k-\tilde{c}} \circ \underline{x}_k \circ R, \tag{7.76}$$



Rys. 7.5. Dyskretyzacja rozmyta przestrzeni X



Rys. 7.6. Zależność Q w funkcji τ dla działania minimum i iloczynu



N = 9

Rys. 7.7. Wyniki identyfikacji modelu rozmytego
• - dane, o- dyskretyzacja rozmyta dla M = N = 5, x - dyskretyzacja rozmyta dla M = N = 9

(równanie relacyjne pierwszego rzędu z opóźnieniem), gdzie $\underline{u}_{k-\tau}$ oznacza zbiór rozmyty sterowania, zaś $\underline{x}_k$, $\underline{x}_{k+1}$ są zbiorami rozmytymi stanu w dwóch kolejnych dyskretnych chwilach czasu; τ oznacza opóźnienie w sterowaniu, $\underline{u}_{k-\tau} \in F(\mathcal{U})$, $\underline{x}_k$, $\underline{x}_{k+1} \in F(\mathcal{X})$, $R \in F(\mathcal{U}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X})$. Podstawowe zbiory rozmyte określone na $\mathcal{X}$ i $U(\subset R)$ skonstruowano w oparciu o algorytm klasyfikacji FUZZY C-MEANS [9]. Liczba zbiorów podstawowych M i N została przyjęta jako 5. Podstawowe zbiory rozmyte w przestrzeni $\mathcal{X}$ ilustruje rysunek 7.5. Rozpatrzono dwie t-normy: minimum i iloczyn. Wskaźnik jakości przyjęto w następującej formie:

$$Q = \sum_{k=\tau+1}^{n-1} Q_E(\underline{x}_{k+1}, \underline{u}_{k-\tau} \circ \underline{x}_k \circ R), \tag{7.77}$$

(n-liczba pomiarów), gdzie $\underline{x}_{k+1}$ oznacza zbiór rozmyty otrzymany w wyniku doświadczenia. Wartości Q dla różnych czasów opóźnień ilustruje rysunek 7.6. Wynika stąd, że $\tau_{opt} = 2$ przy t-normie traktowanej jako iloczyn. Relacja modelu jest równa:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
u_1	-	-	x_5	x_4	x_5
			0.92	0.76	0.98
u_2	-	x_3	x_3	x_4	x_5
		0.73	0.82	0.92	0.95
u_3	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5
	0.49	0.89	0.99	0.98	0.99
u_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0.79	0.96	0.81	0.69	0.13
u_5	x_1	x_2	x_2	-	-
	0.97	0.74	0.27		

(- oznacza, że miara możliwości nie osiąga wartości 0.10).

Rozmyty model systemu może dostarczyć informacji o charakterze numerycznym. W celu zastąpienia zbioru rozmytego wynikającego z (7.76) jedną wartością zastosujemy metodę środka ciężkości wykorzystywaną przy konstrukcji regulatora rozmytego (rozdział 2).

Oznaczmy:

$$\mathcal{X}(c_i) = \sup_{x \in X} \mathcal{X}_i(x). \tag{7.78}$$

Każdemu zbiorowi rozmytemu $\underline{x}_{k+1} \in F(\mathcal{X})$, $\underline{x}_{k+1} = [x_{(k+1)1}, x_{(k+1)2}, \ldots, x_{(k+1)N}]$ przyporządkujemy liczbę $\tilde{x}_{k+1} \in R$ zgodnie z zależnością:

$$\tilde{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N} x_{(k+1)i} c_i / \sum_{i=1}^{N} x_{(k+1)i}. \tag{7.79}$$

Otrzymane wyniki zilustrowane są na rys. 7.7. Zamieszczono tam również rezultaty dla M = N = 9.

8. ZASTOSOWANIE METOD RELACYJNYCH RÓWNAŃ ROZMYTYCH W ZAGADNIENIACH ARYTMETYKI LICZB ROZMYTYCH I PODEJMOWANIU DECYZJI

W rozdziale tym przeanalizujemy możliwości sformułowania zagadnień arytmetyki liczb rozmytych i podejmowania decyzji w kategoriach rozmytych równań relacyjnych. Ujęcie to jest tym bardziej przydatne ze względu na fakt, że dostarcza ono efektywnego narzędzia rozwiązywania równań ze współczynnikami rozmytymi. Rozważania rozpoczniemy od prezentacji podstawowych pojęć i problemów arytmetyki liczb rozmytych.

8.1. Arytmetyka liczb rozmytych. Równanie ze współczynnikami rozmytymi

Wprowadźmy następującą definicję (por. [29], [31], [32]).

DEFINICJA 8.1

Liczbą rozmytą A (rzeczywistą liczbą rozmytą) nazywamy zbiór rozmyty A określony na przestrzeni liczb rzeczywistych:

$$A: R \to [0,1] \tag{8.1}$$

o następujących własnościach:

I A jest normalny, $\sup_{x \in R} A(x) = 1$,

II A jest wypukły, $A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq A(x_1) \wedge A(x_2), x_1, x_2 \in R, \lambda \in [0,1]$,

III A(x) jest funkcją ciągłą.

Oznaczmy:

$$f: R \times R \to R. \tag{8.2}$$

DEFINICJA 8.2

Rozszerzeniem funkcji f dla liczb rozmytych $A, B \in F(R)$ jest funkcja: $F: F(R) \times F(R) \to F(R)$ taka, że

$$C(c) = F(A,B)(c) = \sup_{a,b \in R: c=f(a,b)} [\min(A(a), B(b))], \tag{8.3}$$

$c \in R$.

Równanie (8.3) nosi nazwę zasady rozszerzania (por. [114]). Definicja 8.2 może być rozszerzona na dowolną skończoną liczbę argumentów. Operator minimum w (8.3) można zastąpić dowolną ciągłą t-normą, uzyskując w ten sposób uogólnioną zasadę rozszerzania:

$$C(c) = F(A,B)(c) = \sup_{a,b\in R: c=f(a,b)} [A(a) t B(b)], \tag{8.4}$$

$c \in R$.

Określając postać funkcji f możemy mówić o dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu liczb rozmytych A i B:

dodawanie $A \oplus B$,

$$(A \oplus B)(c) = \sup_{a,b\in R: c=a+b} [A(a) t B(b)] = \sup_{a\in R} [A(a) t B(c-a)], \tag{8.5}$$

odejmowanie $A \ominus B$,

$$(A \ominus B)(c) = \sup_{a,b\in R: c=a-b} [A(a) t B(b)] = \sup_{a\in R} [A(a) t B(c+a)], \tag{8.6}$$

mnożenie $A \odot B$,

$$(A \odot B)(c) = \sup_{a,b\in R: c=ab} [A(a) t B(b)] = \sup_{a\in R} [A(a) t B(c/a)], \tag{8.7}$$

dzielenie $A \oslash B$,

$$(A \oslash B)(c) = \sup_{a-b\in R: c=a/b} [A(a) t B(b)] = \sup_{a\in R} [A(a) t B(a/c)], \tag{8.8}$$

$c \in R$.

Zwróćmy uwagę, że (8.5)-(8.8) stanowią istotne uogólnienie wyników znanych w analizie przedziałowej stosowanej m.in. w metodach numerycznych [39], [63]. Weźmy pod uwagę działanie dodawania. Przyjmijmy, że A, B dane są za pomocą funkcji charakterystycznych:

$$A(a) = \begin{cases} 1, & a \in [a_1, a_2] \\ 0, & a \notin [a_1, a_2] \end{cases} \qquad B(b) = \begin{cases} 1, & b \in [b_1, b_2] \\ 0, & b \notin [b_1, b_2] \end{cases} \tag{8.9}$$

$a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$.

Wykorzystując (8.5) mamy znany wzór analizy przedziałowej:

$$(A \oplus B)(c) = \begin{cases} 1, & c \in [a_1+b_1, a_2+b_2] \\ 0, & c \notin [a_1+b_1, a_2+b_2] \end{cases}. \tag{8.10}$$

$c \in R$.

Odwracalne działania na liczbach rozmytych można sformułować w języku rozmytych równań relacyjnych. Jeżeli istnieje funkcja $g: R \times R \to R$, taka że $g(a, f(a,b)) = b$, wówczas (8.4) możemy przepisać w postaci:

$$C(c) = \sup_{a,b\in R: c=f(a,b)} [A(a) t B(b)] = \sup_{a\in R} [A(a) t B(g(a,c))], \tag{8.11}$$

$c \in R$.

Wprowadźmy relację rozmytą $R \in F(R \times R)$ zdefiniowaną następująco:

$$R(a,c) = B(g(a,c)), \tag{8.12}$$

$a, c \in R$.

Pozwala to na zapisanie (8.11) w formie równania relacyjnego:

$$C(c) = \sup_{a\in R} [A(a) t R(a,c)] = (A \Box R)(c), \tag{8.13}$$

$c \in R$.

W ten sposób rozwiązywanie równań ze współczynnikami rozmytymi sprowadza się do rozwiązywania rozmytych równań relacyjnych zgodnie z metodami zaproponowanymi w poprzednich rozdziałach.

Przykład 8.1

Dane są liczby rozmyte A i X o funkcjach przynależności:

$$A(a) = \exp[-(a-1)^2/\sigma_a^2], \tag{8.14}$$

$$X(x) = \exp[-x^2/\sigma_x^2], \tag{8.15}$$

$a, x \in R$.

Przyjmując t = min, suma $B = A \oplus X$ określona jest zależnością:

$$B(b) = \sup[X(x) \wedge A(a)] = \sup[X(x) \wedge A(b-x)] = \sup\{\exp(-x^2/\sigma_x^2) \wedge \wedge \exp[-(b-1-x)^2/\sigma_a^2]\}, \tag{8.16}$$

$b \in R$.

Rozwiązując równanie (8.16) względem x otrzymujemy:

$$\exp(-x^2/\sigma_x^2) = \exp\left[-(b-1-x)^2/\sigma_a^2\right], \tag{8.16}$$

czyli:

$$(x/\sigma_x)^2 = \left[(b-1-x)/\sigma_y\right]^2. \tag{8.18}$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{b-1}{c+1}, \tag{8.19}$$

$$x_2 = -\frac{b-1}{c-1}, \tag{8.20}$$

gdzie:

$$c = \sigma_a/\sigma_x. \tag{8.21}$$

W rezultacie mamy:

$$B(b) = \exp(-x_1^2/\sigma_x^2), \tag{8.22}$$

$b \in R$.

Rozwiążmy obecnie równanie $B = X \oplus A$, przyjmując, że A i B są dane zależnościami (8.14) i (8.22). Korzystając z (8.11)-(8.13) mamy równanie relacyjne:

$$B = X \square R, \tag{8.23}$$

gdzie:

$$R(x,b) = A(b-x) = \exp\left[-(b-x-1)^2/\sigma_a^2\right], \tag{8.24}$$

$x,b \in R$.

Stąd rozwiązując (8.23) względem X zachodzi:

$$\hat{X}(x) = \inf_{b \in R}\left[R(x,b) \alpha B(b)\right], \tag{8.25}$$

$x \in R$.

Rozpisując (8.25) dostajemy:

$$\hat{X}(x) = \min\left\{\inf_{b \in B_1}\left[R(x,b) \alpha B(b)\right], \inf_{b \in B_2}\left[R(x,b) \alpha B(b)\right]\right\} = \inf_{b \in B_2}\left[R(x,b) \alpha B(b)\right], \tag{8.26}$$

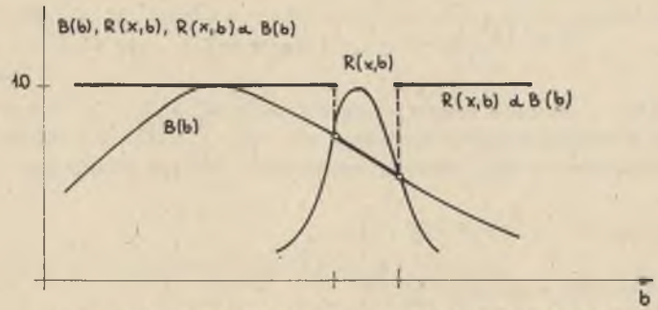
$x \in R$,

z

$$B_1 = \left\{b \in R \,|\, R(x,b) \leqslant B(b)\right\}, \tag{8.27}$$

$$B_2 = \left\{b \in R \,|\, R(x,b) > B(b)\right\}. \tag{8.28}$$

Problem redukuje się do wyznaczenia takiego $b_0 \in R$ (rys. 8.1), dla którego $R(x,b) \alpha B(b)$ osiąga swoją najmniejszą wartość.



Rys. 8.1. Zależności R(x,b), B(b), $R(x,b) \alpha B(b)$

Rozwiązując następujące równania:

$$\exp\left[-(b-x-1)^2/\sigma_a^2\right] = \exp\left[-(b-1)^2/(\sigma_a+\sigma_x)^2\right], \tag{8.29}$$

względem b i biorąc większy z pierwiastków, otrzymujemy:

$$b_0 = 1 + \frac{d}{d-1}, \tag{8.30}$$

gdzie:

$$d = 1 + \sigma_x/\sigma_a. \tag{8.31}$$

Stąd $\hat{X}(x) = \exp\left[-x^2/\sigma_x^2\right]$.

8.2. Rozmyte równania relacyjne jako model procesów podejmowania decyzji

Proces podejmowania decyzji w warunkach nieprecyzyjnie określonych celów i ograniczeń traktowanych jako zbiory rozmyte został po raz pierwszy sformułowany przez Bellmana i Zadeha (por. [31]). Model matematyczny tego procesu formułuje się w oparciu o następujące założenia. Przyjmuje się,

że dany jest zbiór ograniczeń $C_1, C_2, \ldots, C_m$ i celów $G_1, G_2, \ldots, G_n$ traktowanych jako zbiory rozmyte określone odpowiednio na przestrzeni ograniczeń $\mathbb{C}$ i przestrzeni celów $\mathbb{G}$:

$$C_i \in F(\mathbb{C}), \qquad G_j \in F(\mathbb{G}), \tag{8.32}$$

$i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Decyzja D określona na przestrzeni decyzji $\mathbb{D}$ zależy od zbioru ograniczeń i celów, co można zapisać w postaci równania:

$$D = \Phi(G_1, G_2, \ldots, G_n, C_1, C_2, \ldots, C_m) \tag{8.33}$$

$D \in F(\mathbb{D})$, gdzie Φ określa operator agregowania G_i i C_j, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots m$. W najprostszym przypadku, gdy $\mathbb{G} = \mathbb{C} = \mathbb{X}$, D należy do $\mathbb{X}$. W [47] zaproponowano dwa sposoby wyznaczania zbioru rozmytego D:

I

$$D = \bigcap_{i=1}^{n} G_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} C_j \tag{8.34}$$

tzn.:

$$D(x) = \min\left[\min_{1\le i\le n} G_i(x), \min_{1\le j\le m} C_j(x)\right], \tag{8.35}$$

$x \in \mathbb{X}$,

II

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n} G_i(x) \prod_{j=1}^{m} C_j(x), \tag{8.36}$$

$x \in \mathbb{X}$.

Łatwo zauważyć, że dla tak przyjętych sposobów wyznaczania zbioru rozmytego decyzji D:

- G_i i C_j są nierozróżnialne,
- wszystkie ograniczenia i cele traktowane są w ten sam sposób, brak jest zróżnicowania ich istotności.

Wspomniane powyżej cechy naszkicowanego algorytmu podejmowania decyzji mogą być w sprzeczności w stosunku do istniejących realiów. Pewne rozszerzenia podstawowej metody podejmowania decyzji można znaleźć w [2] [46] [47].

Bardziej realne wydaje się sformułowanie modelu procesu podejmowania decyzji w postaci rozmytego równania relacyjnego:

$$D = G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_n \square C_1 \square C_2 \square \ldots \square C_m \square R. \tag{8.37}$$

Równanie (8.37) stanowi formalny zapis stwierdzenia: ograniczenia i cele $(C_1, C_2, \ldots, C_m, G_1, G_2, \ldots, G_n)$ oraz podjęta decyzja (D) pozostają ze sobą w relacji.

Schemat Bellmana-Zadeha stanowi szczególny przykład (8.37). Jeżeli $G_i, C_j \in F(\mathbb{X})$, norma trójkątna zostanie przyjęta jako minimum oraz relacja R dana jest w postaci:

$$R = I, \tag{8.38}$$

tzn.:

$$I(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m, z) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = y_1 = y_2 = \ldots = y_m = z \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{8.39}$$

$x_i, y_j, z \in \mathbb{X}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$, wówczas otrzymujemy:

$$D(z) = \sup_{x_i, y_j}\left[G_1(x_1) \wedge G_2(x_2) \wedge \ldots \wedge G_n(x_n) \wedge C_1(y_1) \wedge C_2(y_2) \wedge \ldots \wedge C_m(y_m) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)\right] =$$

$$= G_1(z) \wedge G_2(z) \wedge \ldots \wedge G_n(z) \wedge C_1(z) \wedge C_2(z) \wedge \ldots \wedge C_m(z), \tag{8.40}$$

$z \in \mathbb{X}$.

Dobór normy trójkątnej oraz wyznaczenie relacji rozmytej przebiega w oparciu o zestaw testowy celów, ograniczeń i podjętej decyzji i wykorzystanie metod z rozdziałów 5 i 6.

9. ZAKOŃCZENIE

Niniejsza praca zawiera prezentację problemów i ich rozwiązań w zakresie sterowania rozmytego, analizy i syntezy systemów rozmytych.Teoretyczne ramy niniejszych rozważań stanowią rozmyte równania relacyjne z normami trójkątnymi. Są one oryginalnym dorobkiem Autora. Rozpatrywane dotychczas równania relacyjne z sup-min(inf-max) operatorem złożenia można traktować jako szczególny przypadek dyskutowanej klasy równań. Rozpatrzono ogólne problemy konstrukcji regulatora rozmytego. Zaproponowano również nową oryginalną koncepcję regulatora probabilistyczno-rozmytego, który stanowi istotne uogólnienie regulatora omawianego dotychczas w literaturze. Podkreślono istotę stosowania teoriomnogościowego opisu systemów niedeterministycznych. W pracy zawarto szczegółową dyskusję na temat norm trójkątnych, rozmytych równań relacyjnych oraz analitycznych i numerycznych metod ich rozwiązywania. W dalszym ciągu rozpatrzono zastosowanie rozmytych równań relacyjnych w analizie i syntezie systemów rozmytych. Postawiono i rozwiązano problem identyfikacji. Omówiono zagadnienie sterowania. Dokonano konstrukcji regulatora rozmytego w oparciu o model systemu rozmytego. Tego rodzaju ujęcie problemu tworzenia relacji regulatora może być traktowane jako rozwiązanie alternatywne do już istniejącego w literaturze.Rozdział 8 pracy poświęcono bezpośredniemu zastosowaniu równań relacyjnych do formułowania i rozwiązywania problemów, które występują w arytmetyce liczb rozmytych i podejmowaniu decyzji. Znane w literaturze zagadnienia znalazły w ten sposób zupełnie nowe i konstruktywne ujęcie.

Do oryginalnych elementów niniejszej pracy warto zaliczyć:

1) wprowadzenie rozmytych równań relacyjnych z normami trójkątnymi i podanie metod ich rozwiązywania,

2) sformułowanie i rozwiązanie zadań analizy i syntezy w systemach rozmytych opisanych równaniami relacyjnymi,

3) sformułowanie i rozwiązanie problemów znanych w teorii zbiorów rozmytych (arytmetyka liczb rozmytych i podejmowanie decyzji) w języku równań relacyjnych,

4) prezentacja konstrukcji regulatora rozmytego w oparciu o wykorzystanie modeli systemów rozmytych.

Zaproponowane w pracy rozmyte równania relacyjne mają znaczne większy zasięg zastosowań. Mogą stanowić formalny aparat formułowania i rozwiązywania problemów w różnorodnych dyscyplinach naukowych, takich jak: badania operacyjne, rozpoznawanie obrazów czy też zagadnienia diagnostyki systemów.

LITERATURA

[1] Aczel J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, New York 1966.

[2] Baas J.M., Kwakernaak H.: Rating and ranking of multi-aspect alternatives using fuzzy sets. Automatica, 13, 1977, 47-58.

[3] Backer E.: Cluster analysis by optimal decomposition of induced fuzzy sets. Delft Univ. Press, Delft, 1978.

[4] Ball G., Hall A.: A clustering technique for summarizing multivariate data. Behav. Sci., 12, 1976, 153-155.

[5] Bellman R.E., Zadeh L.A.: Abstraction and pattern clasification. J. Math. Anal. and Appl., 13, 1966, 1-7.

[6] Bellman R.E., Giertz M.: On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. Information Sciences, 5, 1973, 149-156.

[7] Bellman R.E., Zadeh L.A.: Local and fuzzy logics, w Modern Uses of Multiple Valued Logic (J.M. Dunn, D. Epstein eds.). D. Reidel, Dordrecht, 1977, 103-165.

[8] Bertseks D.P., Rhodes I.B.: Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. IEEE Trans. Automatic Control, AC-16, 1971, 117-128.

[9] Bezdek J.C.: Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms. Plenum Press, New York 1981.

[10] Box G.E.P., Jenkins G.M.: Time Series Analysis; Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco 1970.

[11] Braae M., Rutherford D.A.: Selection of parameters for a fuzzy logic controller. Fuzzy Sets and Systems, 2, 1979, 185-199.

[12] Braae M., Rutherford D.A.: Theoretical and linguistic aspects of the fuzzy logic controller. Automatica, 15, 1979, 553-579.

[13] Bruin J.: Controlling and adjusting. Application of a decision procedure. M. Sc. thesis, Dept. of Electrical Eng., Delft Univ.of Technology, 1981.

[14] Bubnicki Z.: Identyfikacja obiektów sterowania. PWN, Warszawa 1974.

[15] Czaja-Poépiech D., Czogała E., Pedrycz W.: Sterowanie rozmyte jako matematyczna formalizacja heurystycznego sposobu sterowania złożonymi procesami. Podstawy Starowania, 3, 1978, 243-252.

[16] Czogała E., Drewniak J., Pedrycz W.: Fuzzy relation equations on a finite set. Fuzzy Sets and Systems, 7, 1982, 89-101.

[17] Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W.: On the concepts of measures of fuzziness and their applications in decision-making. ZN Pol.Śl.seria Automatyka z.65, 1982, 55-67.

[18] Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W.: Contribution to application of energy measure of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 8, 1982, 205-214.

[19] Czogała E., Gottwald S., Pedrycz W.: Aspects for the evaluation of decision situations. Fuzzy Information and Decision Processes (M.M. Gupta, E. Sanchez, eds.),North-Holland, Amsterdam, w druku.

[20] Czogała E., Kopka J., Pedrycz: Diagnostics of systems in terms of fuzzy sets theory. Symp. Technical Diagnostics, IMECO London, 1981, 37-43.

[21] Czogała E., Pedrycz W.: Computer fault diagnostics by the use pof multivalued logic and fuzzy set theory. Proc.2nd Conf.Fault Tolerant Systems, Brno 1979.

[22] Czogała E., Pedrycz W.: On identification in fuzzy systems and its applications in control problems. Fuzzy Sets and Systems, 6,1981,73-83.

[23] Czogała E., Pedrycz W.: Some problems concerning the construction of algorithms of decision-making in fuzzy systems. Int. J. Man-Machine Studies, 15, 1981, 201-211.

[24] Czogała E., Pedrycz W.: An approach to the control problem of the process of changes of methane concentration by using a fuzzy controller. Archiwum Górnictwa, 3, 1981, 539-549.

[25] Czogała E., Pedrycz W.: Control problems in fuzzy systems.Fuzzy Sets and Systems, 7, 1982, 257-273.

[26] Czogała E., Pedrycz W.: Fuzzy rules generation for fuzzy control. Cybernetics and Systems (w druku).

[27] Czogała E.: Distribution function description of probabilistic sets and its application in decision making. ZN Pol.Śl. seria Automatyka, z. 65, 27-37.

[28] Czogała E., Pedrycz W.: The construction of fuzzy-probabilistic controller. Fuzzy Sets and Systems (w druku).

[29] Dijkman J.G., van Haeringen H., de Lange S.J.: Fuzzy numbers, w Applied Systems and Cybernetics (G.E. Lasker ed.). Pergamon Press, New York 1981, vol. VI, 2553-2556.

[30] Dorny C.N.: A Vector Space Approach to Models and Optimization. J. Wiley, New York 1975.

[31] Dubois D., Prade H.: Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York 1980.

[32] Dubois D., Prade H.: Addition of interactive fuzzy numbers.IEEE Trans, Automatic Control, 4, 1981, 926-936.

[33] Eykhoff P.: System Identification. Parameter and State Estimation. J. Wiley, London 1974.

[34] Frank H.J.: On the simultaneous associativity of F(x,y) and x+y-F(x,y). Aequationes Mathematicae, 19, 1979, 194-226.

[35] Fuchs L.: Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press,Oxford 1963.

[36] Gilles R.: Lukasiwicz logic and fuzzy set theory. Int. J. Man-Machine Studies, 8, 1976, 313-327.

[37] Goguen J.A.: L-fuzzy sets, J. Math. Anal. and Appl. 18,1967,145-174.

[38] Gupta M.M.: Feedback control applications of fuzzy set theory: a survey. Prep. 8th Triennial World Congress IFAC, Kyoto 1981, vol.V,1-7.

[39] Hansen E.: Topics in Interval Analysis. Claredon Press. Oxford 1969.

[40] Hersh H.M., Caramazza A.: A fuzzy-set approach to modifiers and vagueness in natural languages. J. Exp. Psych. Gen., 105, 1976,254-276.

[41] Hirota K.: Concepts of probabilistic sets. Fuzzy Sets and Systems, 5, 1981, 31-46.

[42] Hirota K., Pedrycz W.: On identification of fuzzy systems under the existence of vagueness. Summary of Papers on General Fuzzy Problems, Tokyo 6, 1980, 37-41.

[43] Hirota K., Pedrycz W.: On identification of fuzzy systems under the existence of vagueness. Proc. IFAC Symp. on Theory and Application of Digital Control. Jan 1982, New Delhi, 11-15.

[44] Hirota K., Pedrycz W.: Analysis and synthesis of fuzzy systems by the use of probabilistic sets. Fuzzy Sets and Systems (w druku).

[45] Hirota K., Pedrycz W.: System identification via probabilistic sets. Information Sciences (w druku).

[46] Jain R.: Decision-making in the presence of fuzzy variables. IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics, 3, 1976, 698-703.

[47] Kickert W.J.: Fuzzy Theories on Decision Making. Martinus Nijhoff, Leiden 1978.

[48] Kickert W.J., van Nauta Lemke H.R.: Application of a fuzzy controller in a warm water plant. Automatica, 12, 1976, 301-308.

[49] Kickert W.J., Mamdani E.H.: Analysis of fuzzy logic controller.Fuzzy Sets and Systems, 1, 1978, 29-44.

[50] King P.J., Mamdani E.J.: The application of fuzzy control systems to industrial processes. Prep. 6th Triennial IFAC World Congress,Boston 1975.

[51] Lee R.C.T.: Fuzzy logic and resolution principle. J. ACM, 19, 1972, 109-119.

[52] Lee E.T.: Application of fuzzy languages to pattern recognition. Kybernetes, 6, 1973, 167-173.

[53] Ling C.H.: Representation of associative functions, Publ. Math. Debrecen, 12, 1965, 182-212.

[54] Mamdani E.H.: Applications of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant. Proc. IEEE, 121, 1974, 1585-1588.

[55] Mamdani E.H., Baaklini N.: Prescriptive method for deriving control policy in a fuzzy logic controller. Electronics Letters, 2,1975,625.

[56] Mamdani E.H., Assilian S.: An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. Int. J. Man-Machine Studies, 7,1876,1-13.

[57] Mamdani E.H.: Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. Int. J. Man-Machine Studies, 8, 1976, 669-678.

[58] Menger K.: Statistical metric spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 28, 1942, 535-537.

[59] Milanese M., Belforte G.: Estimation theory and uncertainty intervals. Evaluation on presences of unknown but bounded errors linear families of models and estimators. IEEE Trans. Automatic Control,AC-27, 1982, 408-414.

[60] Mizumoto M., Zimmermann H.J.: Comparison of fuzzy reasoning methods. Fuzzy Sets and Systems, 8, 1982, 253-283.

[61] van Nauta Lemke H.R., Kickert W.J.: The application of fuzzy set theory to control a warm water process. Journal A,1, 1976, 8-18.

[62] Negoita C.V., Ralescu D.A.: Applications of Fuzzy Sets of Systems Analysis. Birkhauser-Verlag, Basel 1975.

[63] Nickel K.L.E.: Interval Mathematics. Academic Pres. New York 1980.

[64] Di Nola A., Pedrycz W., Sessa S.: On measures of fuzziness of solutions of fuzzy relation equations with generalized connectives. J. Math. Anal. and Appl. (w druku).

[65] Ohsata A., Sekiguhi T.: Methods of solving the polynomial form of composite fuzzy relational equations. Trans. Soc. Instrument and Control Eng., 7, 1981, 56-63.

[66] Papoulis J.A.: Probability. Random Variables and Stochastic Processes. Mc. Graw-Hill, New York 1965.

[67] Pedrycz W.: On the use of fuzzy Łukasiewicz logic for fuzzy control. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 3, 1980, 301-314.

[68] Pedrycz W.: An approach to the analysis of fuzzy systems. Int.J.Control, 34, 1981, 403-421.

[69] Pedrycz W.: Fuzzy relational equations with triangular norms and their resolution. BUSEFAL, 11, 1982, 24-32.

[70] Pedrycz W.: Some aspects of fuzzy decision-making. Kybernetes,11,1982, 297-301.

[71] Pedrycz W., Hirota K.: Fuzzy-probabilistic algorithms in identification of fuzzy systems. Prep. 8th Triennial World Congress IFAC,Kyoto 1981, vol. V, 52-56.

[72] Pedrycz W.: Numerical and applicational aspects of fuzzy relational equations. Fuzzy Sets and Systems (w druku).

[73] Pedrycz W.: On generalized fuzzy relational equations and their applications. J. Math. Anal. and Appl. (w druku).

[74] Pedrycz W.: Some applicational aspects of fuzzy relational equations in system analysis. Int. J. General Systems, 3, 1983 (w druku).

[75] Pedrycz W.: Towards set-theoretic representation of nondeterministic systems. Problems of Control and Information Theory, 3,1983 (w druku).

[76] Pedrycz W., Backer E.: Determination of the cores of fuzzy clusters and their analytical representation. Fuzzy Sets and Systems (w druku).

[77] Pedrycz W.: Analysis and synthesis of fuzzy systems. Dostarczone do: Encyclopedia of Systems and Control.

[78] Pierre A.: Optimization Theory with Applications. J. Wiley, New York 1969.

[79] Rödder W.: On "and" and "or" connectives in fuzzy set theory. RWTH Aachen, 75/07, 1975.

[80] Ruspini E.H.: A new approach to clustering. Information and Control, 15, 1969, 22-32.

[81] Sanchez E.: Resolution of composite fuzzy relation equations. Information and Control, 30, 1976, 38-48.

[82] Sanchez E.: Solutions in composite fuzzy relation equations: Application to medical diagnosis in Brouwerian logic. Fuzzy Automata and Decision Processes (M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines eds.),221-234, North-Holland, Amsterdam 1977.

[83] Schweizer B., Sklar A.: Statistical metric spaces. Pacific J. Math., vol. 10, 1960, 313-334.

[84] Schweizer B., Sklar A.: Associative functions and abstract semigroups. Publ. Math. Debrecen, 10, 1963, 69-81.

[85] Schweppe F.C.: Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Trans. Automatic Control, AC-13, 1968,22-28.

[86] Schweppe F.C.: Uncertain Dynamic Systems. Prentice-Hall, Englewood 1973.

[87] Shakouri A.: Advanced fuzzy controller for multivariable systems. M. Sc. thesis, Dept. of Electrical Eng. Delft Univ of Technology,1981.

[88] Sheridan T.B., Ferell W.R.: Man-Machine Systems: Information, Control and Decision Models of Human Performance. MIT, Cambridge 1974.

[89] Sommer G., Pollatschek M.A.: A fuzzy programming approach to an air pollution regulation problem. Progress in Cybernetics and Systems Research (R. Trappl, G.J. Klir, L. Ricciardi eds.), vol. III, 303, 323, Washington DC 1978.

[90] Sugeno M.: Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey. Fuzzy Automata and Decision Processes (M.M. Gupta, G.N. Saridis, B.R. Gaines, eds.) 89-102, North-Holland, Amsterdam 1977.

[91] Tanaka H., Okuda T., Asai K.: On fuzzy mathematical programming. J. of Cybernetics, 4, 1974, 37-46.

[92] Thayse A., Davio M.: Boolean differential calculus and its application to switching theory. IEEE Trans. on Computers, A-22, 1973.

[93] Thole U., Zimmermann H.J., Zysno P.: On the suitability of minimum and product operators for intersection of fuzzy sets.Fuzzy Sets and Systems, 2, 1979, 167-180.

[94] Tong R.M.: A control engineering review of fuzzy systems.Automatica, 13, 1977, 559-569.

[95] Tong R.M.: The evaluation of fuzzy models derived from experimental data. Fuzzy Sets and Systems, 4, 1980, 1-12.

[96] Tou J.T., Gonzalez R.C.: Pattern Recognition Principles. Addison-Wesley Publ. Comp. Mass., 1974.

[97] Trillas E., Alsina C., Valverde L.: Do we need max, min and 1-j fuzzy sets theory? Applied Systems and Cybernetics (G.E. Lasker ed.), Pergamon Press, New York, 1981, vol. VI, 2809-2813.

[98] Tsukamoto Y., Takagi T., Sugeno M.: Fuzzification of $L_{Aleph-1}$ and its application to control. Proc. Conf. Cybernetics and Society,Tokyo 1978, vol. II, 1217-1222.

[99] Tsukamoto Y., Nikiforuk P.N., Gupta M.M.: On the comparison of fuzzy sets using fuzzy chopping. Prep. 8th Triennial World Congress IFAC, Kyoto 1981, vol. V, 46-52.

[100] van Veen J.C.T.: Fuzzy sets, theoretical reflections,application to ship steering. M. Sc. thesis, Dept. of Electrical Eng. Delft Univ. of Technology, 1976.

[101] Wang P.Z., Lou S.P.: The responsibility of a fuzzy controller.Prep. 8th Triennial World Congress IFAC, Kyoto 1981, vol. V, 18-22.

[102] Wiedey G., Zimmermann H.J.: Media selection and fuzzy linear programming. J. Operational Res. Soc., 29, 1978, 1071-1084.

[103] Willaeys D.: Contribution a l'étude de la theorie des sous ensembles flous en vue de son application a l'automatique. Ph.D.thesis, Universite de Valenciennes et du Hainaut Cambresis, 1980.

[104] Willaeys D., Malvache N.: The use of fuzzy sets for the treatment of fuzzy information by computer. Fuzzy Sets and Systems, 5, 1981,323-327.

[105] Yager R.R.: On general class of fuzzy connectives. Fuzzy Sets and Systems, 4, 1980, 235-242.

[106] Yager R.R.: Some procedures for selecting fuzzy set-theoretic operators, Int. J. General Systems, 8, 1982, 115-124.

[107] Yong-Yi Ch.: An approach to fuzzy operators. BUSEFAL, 9,1981,59-65.

[108] Zadeh L.A.: Fuzzy sets. Information and Control, 8, 1965, 338-353.

[109] Zadeh L.A.: Fuzzy sets and systems. Proc. Symp. System Theory,Polytechn. Inst. of Brooklyn 1965, 29-37.

[110] Zadeh L.A.: The concepts of system, aggregate and state in systems theory. System Theory (L.A. Zadeh, E. Polak eds.), McGraw-Hill, New York 1969.

[111] Zadeh L.A.: Toward a theory of fuzzy systems. Aspects of Network and System Theory (R. Kalman, N. DeClaris eds.), 209-215, Rinehart, New York 1971.

[112] Zadeh L.A.: A rationale for fuzzy control. Trans. ASME 3, 1972.

[113] Zadeh L.A.: The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning. Elsevier Publ. Comp., New York 1973.

[114] Zadeh L.A.: Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Systems, Man of Cybernetics, 1, 1973, 28-44.

[115] Zadeh L.A.: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility.Fuzzy Sets and Systems, 1, 1978, 3-28.

[116] Zimmermann H.J.: Description and optimization of fuzzy systems.Int. J. General Systems, 4, 1976, 209-215.

[117] Zimmermann H.J.: Results fo empirical studies in fuzzy set theory. Applied General Systems Research (G. Klir, ed.), 302-312, Plenum Press, New York.

[118] Zimmermann H.J., Zysno P.: Latent connectives in human decision making. Fuzzy Sets and Systems, 4, 1980, 37-51.

STEROWANIE I SYSTEMY ROZMYTE

S t r e s z c z e n i e

W pracy wprowadzono rozmyte równania relacyjne z normami trójkątnymi. W oparciu o nie rozwiązano szereg zadań analizy i syntezy w systemach rozmytych. Wskazano na ogólność i przydatność równań relacyjnych dla formułowania i rozwiązywania problemów teorii i zastosowań zbiorów rozmytych, takich jak: regulatory rozmyte, podejmowanie decyzji czy arytmetyka liczb rozmytych. Zaprezentowano analityczne i numeryczne metody rozwiązywania rozmytych równań relacyjnych. Zaproponowano nową koncepcję regulatora probabilistyczno-rozmytego. Podkreślono istotę stosowania teoriomnogościowego opisu systemów niedeterministycznych. Rozważania teoretyczne ilustrowane są szeregiem przykładów numerycznych.

УПРАВЛЕНИЕ И РАСПЛЫВЧАТЫЕ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе вводятся расплывчатые уравнения соотношений с трёхугольными нормами. На их основании решено ряд задач по анализу и синтезу расплывчатых систем. Указано на общность и применяемость уравнений соотношений для формулировки и решения проблем теории и практики расплывчатых множеств таких как: расплывчатые регуляторы, принимание решений, или-же арифметика расплывчатых чисел. Приведены аналитические и цифровые методы решения расплывчаты уравнений соотношений. Даётся новая концепция вероятностно-расплывчатого регулятора. Подчёркнуто сущность применения теоретико-множественного описания недетерминированных систем. Теоритические рссуждения иллюстрируются рядом машинных примеров.

FUZZY CONTROL AND FUZZY SYSTEMS

S u m m a r y

The paper deals with fuzzy relational equations with triangular norms. Several analysis and synthesis problems in fuzzy systems described by means of the equations established here have been presented. Moreover their generality and usefulness for formulating and solving problems of the theory and applications of fuzzy sets have been pointed out (e.g. fuzzy controllers, decision-making processes and arithmetic of fuzzy numbers). A new concept of probabilistic-fuzzy controller has been introduced. An essence of the use of a set-theoretic approach to description of nondeterministic systems has been underlined. Analytical and numerical methods for solving the fuzzy relational ewuations have been provided. Numerical examples form an illustration of the investigations presented.

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3341/83/70

WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:

44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN — Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.