

P.3341/84

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

JANUSZ PIOTROWSKI

**MODELOWANIE MATEMATYCZNE BŁĘDÓW SYSTEMÓW
POMIAROWYCH WIELOWYMIAROWYM, NIESTACJONARNYM
PROCESEM LOSOWYM**

AUTOMATYKA

**Z. 77
GLIWICE
1984**

54.27 28,35



9.3341/84

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 816

JANUSZ PIOTROWSKI

MODELOWANIE MATEMATYCZNE BŁĘDÓW SYSTEMÓW POMIAROWYCH WIELOWYMIAROWYM, NIESTACJONARNYM PROCESEM LOSOWYM

GLIWICE

1984

52 10.041

OPINIODAWCY :

Doc. dr hab. inż. Ernest Czogała
Doc. dr hab. inż. Marian Stachowicz

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), *Anna Skrzywan-Kosek* (redaktor
działu), *Elżbieta Stinzing* (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Roma Łoś

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0434-0760

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Ńaki. 220+85 Ark. wyd. 3,9 Ark. druk 4,75 Papier offset. kl. III 70x100. 70 g
Oddano do druku 17.08.84 Podpis. do druku 20.09.84 Druk ukończ. w paźdz. 1984
Zam. 1056/84 U-23 Cena zł 59,-

Skład, fotokopie, druk i oprawe
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

7.299/84

SPIS TREŚCI

	Str.
1. WSTĘP	5
2. BŁĄD POMIARU JAKO AKSJOMAT METROLOGII	7
2.1. Wprowadzenie	7
2.2. Skala fizyczna i niejednoznaczność obrazu rzeczywistości ..	9
3. SYSTEM POMIAROWY I JEGO MODEL	18
3.1. Model systemu i skala pomiarowa	18
3.2. Fizyczne przyczyny błędów	22
4. MODEL BŁĘDU I JEGO WŁAŚCIWOŚCI	27
4.1. Właściwości fizyczne błędu	27
4.2. Właściwości matematyczne błędu	28
4.3. Metrologiczne właściwości błędu	32
4.4. Modyfikacja niektórych definicji błędów	34
5. ZAGADNIENIA ESTYMACJI BŁĘDÓW	40
5.1. Wyznaczalność modelu błędów	40
5.2. Skorelowanie współczynników modelu błędów	43
5.3. Estymacja błędów w warunkach skorelowania współczynników modelu	48
6. ZASTOSOWANIA MODELU BŁĘDÓW	55
6.1. Ocena błędów przy propagacji wzorców	55
6.2. Algorytmy i błędy adiustacji SP	60
6.3. Ocena błędów serii pomiarów o skorelowanych realizacjach błędów	64
7. ZAKOŃCZENIE	69
LITERATURA	71

1. WSTĘP

Modelowanie matematyczne jest przybliżonym opisem rozmaitych zjawisk. Nie ma formalnych wymagań, które nakazują stosować w modelowaniu określony aparat matematyczny. Zwykle sposób modelowania dostosowany jest do celu, jaki zamierza się osiągnąć.

Istnieje potrzeba formułowania ogólnych modeli, które bez istotnych zmian można zastosować do wielu różnorodnych celów. Im więcej zjawisk można modelować tym samym modelem, tym większa jest uniwersalność modelu i tym bardziej rozwinięta jest nauka operująca takimi modelami.

W metrologii jedną z podstawowych pojęć i zjawisk jest błąd pomiaru lub błąd systemu pomiarowego. Losowość zjawisk fizycznych powoduje, że do modelowania błędów stosuje się rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną.

W niniejszej pracy przedstawię się modelowanie błędów wielowymiarowym, niestacjonarnym procesem losowym, a ściślej takim procesem niestacjonarnym, który przez odpowiednie przekształcenie matematyczne można sprowadzić do procesu stacjonarnego.

Zdaniem autora proponowany model błędów

- ma prostą interpretację fizyczną,
- jest uniwersalny,
- można dobrze dostosować do dotychczas stosowanych pojęć błędów, przez co stanowi ich rozwinięcie i wzbogacenie,
- pozwala zinterpretować zjawiska metrologiczne nie poddające się analizie matematycznej tradycyjnymi metodami,
- ma znane w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej właściwości i metody estymacji jego parametrów.

W literaturze pojawiają się wzmianki o modelowaniu błędów niestacjonarnym procesem losowym. Są to kilkudziesięcioletnie wzmianki bez określenia sensu fizycznego i powiązania z właściwościami systemu pomiarowego.

Nazwę klasy procesu losowego przyjęto ze Pugaczewca [1]. Smirnow i Dunin-Barkowski [2] podają przykład błędów indykatora opisywanych procesem niestacjonarnym, którego wartość oczekiwana zależy od wielkości mierzonej. Autorzy uważają tę niestacjonarność za nieistotną, gdyż składnik losowy błędu (po odjęciu wartości oczekiwanej) jest procesem stacjonarnym.

Przykłady niestacjonarnych, wielowymiarowych sygnałów losowych podaje Bendat i Piersol [3]. Interpretację wielowymiarowego procesu losowego zaczerpniętą z ich pracy [3].

Właściwości niestacjonarnych funkcji losowych w ujęciu wygodnym do zastosowania przedstawił Swiecznikow [4]. Najbardziej wyraźnie opisano właściwości błędów w dodatku do zalecań norastycznych MS 53-78 krajów RWPG [5] wprowadzając model błędu podstawowego w postaci niestacjonarnego procesu losowego. Podobna interpretacja błędów pojawiła się w międzynarodowym dokumencie OIML [6] norastującym charakterystyki metrologiczne narzędzi pomiarowych. Można przypuszczać, że wcześniejsza norma GOST 8.009.72 i powyższe dokumenty mają swe źródło w pracy Kewelerowa i Mandalaztasa [18], chociaż w pracy tej nie wyróżnia się błędów niestacjonarnych, lecz wielkości niestacjonarne (mierzone i wpływające).

Propozycję modelowania błędów systemów pomiarowych niestacjonarnych, wielowymiarowym procesem losowym autor przedstawił na konferencji "Metrologia 1980" [36]. Dalej prace kontynuowano w problemie węzłowym R.I-3 MNSzWiT [37]. Bardziej obzerne przedstawienie zagadnienia zawiera praca [38] znajdująca się w druku.

2. BŁĄD POMIARU JAKO AKSJOMAT METROLOGII

2.1. Wprowadzenie

Podstawy pomiarów sformułowano w starożytności tworząc geometrię. Zasady te stosowane były praktycznie w pomiarach długości. Stały się one podstawą matematyki, a pojęcie pomiaru znane było w matematyce od dawna.

Nowoczesne podstawy metrologii stworzono przez przyjęcie systemu metrycznego pomiarów długości oraz masy. Przyjęto jako założenie, że stany cech przedmiotów i zjawisk odwzorowuje się w dziedzinie liczb rzeczywistych. Założenie to spowodowało, że znane stosunki między liczbami przeniesiono na stany fizyczne, a stosunki między stanami rozmaitych cech wyrażano za pomocą praw fizycznych. Przy tym założeniu powstał obraz świata fizycznego sformułowany przez fizykę.

Relacje zachodzące między stanami cech fizycznych istotna dla metrologii zostały sformułowane przez Helmholtze w 1887 r. [7] i formalnie ujęte przez Höldera [8]. Pfanzagl [9] wyraża pogląd, że zasady podane przez Helmholtze całkowicie wystarczają do tworzenia obrazów świata fizycznego. Ten stan wiedzy uzupełniony pracami Campbella [10], Stevensa [11] wyraża się istnieniem 4 rodzajów skal pomiarowych, które wyrażają stosunki między stanami wielkości mierzonej wg danej skali, przy czym stosunki te są izomorficzne ze stosunkami wartości danej skali.

Gdy stany a danej cechy x tworzą zbiór A

$$A : a \in A, \quad (1)$$

a obrazy b stanów tej cechy zbiór B

$$B : b \in B, \quad (2)$$

to przyporządkowanie stanom $a \in A$ obrazów $b \in B$ tworzy funkcję pomiarową [12]

$$b = f(a). \quad (3)$$

Odwzorowanie (3) winno być wzajemnie jednoznaczne, tzn. winno istnieć funkcja odwrotna

$$a = \varphi(b) = f^{-1}(b). \quad (4)$$

Wówczas funkcja pomiarowa (3) krauje skalę pomiarową danej cechy (wielkości).

Spśród wielu możliwych wzajemnie jednoznacznych funkcji pomiarowych do kreowania skali wybiera się taką funkcję, która izomorficznie odwzorowuje relacje (stosunki) między stanami danej cechy na relacje pomiędzy obrazami stanów tej cechy. Zależnie od możliwych do stwierdzenia relacji między stanami rozasypanych cech wyróżnia się 4 rodzaje skal pomiarowych.

1. Skala nominalna

Dana cecha jest mierzalna wg skali nominalnej, gdy między stanami tej cechy da się stwierdzić relację równoważności stanów.

$$a_1 = a_2 \quad \text{lub} \quad a_1 \neq a_2. \quad (5a)$$

Gdy zachodzi $a_1 = a_2$, to winno zachodzić $b_1 = b_2$ i odwrotnie $b_1 = b_2$ pociąga za sobą $a_1 = a_2$.

2. Skala porządkowa

Między stanami danej cechy mogą zachodzić relacje równoważności oraz ściślego uporządkowania stanów.

Izomorficznie odwzorowanie tych relacji dla dowolnych stanów $a_1, a_2 \in A$ oznacza, że

$$a_1 = a_2 \iff f(a_1) = f(a_2) \quad (5b)$$

oraz

$$a_1 < a_2 \iff f(a_1) < f(a_2). \quad (6)$$

Cecha o takich właściwościach jest mierzalna wg skali porządkowej.

3. Skala interwałowa

W tym przypadku między stanami cechy winny zachodzić relacje równoważności i ściślego uporządkowania stanów oraz równoważności i ściślego uporządkowania interwałów stanów. Tak więc oprócz (5), (6) winien zachodzić izomorfizm relacji uporządkowania interwałów dla dowolnych stanów $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$

$$a_1 - a_2 \leq a_3 - a_4 \iff f(a_1) - f(a_2) \leq f(a_3) - f(a_4). \quad (7)$$

4. Skala ilorazowa

Dana cecha jest mierzalna wg skali ilorazowej, gdy da się stwierdzić następujące relacje:

- równoważności i ściślego uporządkowania stanów,
- równoważności i ściślego uporządkowania interwałów,
- równoważności i ściślego uporządkowania ilorazów.

Odwzorowanie jest izomorficzne, gdy oprócz (5), (6), (7) zachodzi dla dowolnych $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$

$$\frac{a_1}{a_2} \leq \frac{a_3}{a_4} \iff \frac{f(a_1)}{f(a_2)} \leq \frac{f(a_3)}{f(a_4)}. \quad (8)$$

Wielkość (cecha) spełniająca ww. relacje nazywa się wielkością addytywnymi [12]. Skalę ilorazową nazywa się także skalą astryczną [12].

Skalę interwałową przez przeunięcie można sprawdzić do skali metrycznej [12].

Obrazami stanów cech mierzalnych wg skal interwałowej i ilorazowej są liczby rzeczywiste, tak więc $B \subset \mathbb{R}$, a elementy b zbioru B (2) nazywa się wartościami danej wielkości.

Przedstawienie omówionych właściwości można znaleźć w literaturze polskiej i obcej. Najlepiej przedstawił to Ajdukiewicz [12], najbardziej przejrzysto Urban [13]. Szczegółowe omówienie zawierają prace Jaworskiego [14], [15]. Poszukiwania dalszych relacji, które winny być spełnione, aby wielkość niemierzalna z zakresu nauk behawiorystycznych uczynić mierzalną, zajmowali się m.in. Pfanzagl [9] oraz Krantz i inni [16]. Praca Pfanzgla może być użyteczna przy feruleowaniu skal takich wielkości, jak: użyteczność wyrobu i innych ocen wyrażonych na podstawie ankiet lub testów.

2.2. Skala fizyczna i niejednoznaczność obrazu rzeczywistości

Powyżej skala pomiarowa przedstawiono wg interpretacji matematycznej względnie logicznej. Pomiar fizyczne nie zapewniają warunków, jakie są osiągnięte w eksperymentach matematycznych. Ze względu na właściwości zmysłów człowieka oraz narzędzi, którymi człowiek się posługuje, nie ma fizycznej możliwości sprawdzenia równoważności dwóch stanów danej cechy w sposób jednoznaczny. Wskutek tego obrazy rzeczywistości są niejednoznaczne. Stan $a \in A$ mierzonej cechy x odwzorowywany jest w dziedzinie abstrakcji w postaci zbioru wartości, mianowicie:

$$a \rightarrow B_a \subset B. \quad (9)$$

Charakter odwzorowania (9) punktu w zbiór powoduje trudność zdefiniowania skali pomiarowej jak (3). Dlatego ze zbioru B_n wybiera się element b^* , który najlepiej odwzorowuje stan a i definiuje się jednoznaczne przyporządkowanie

$$b^* = f^*(a) \quad (10)$$

oraz jednoznaczne odwzorowanie odwrotne

$$a^* = \varphi^*(b^*), \quad (11)$$

przy czym $\varphi^* = f^{*-1}$. Znakami * oznacza się odwzorowanie definiujące skale fizyczne dla odróżnienia od postulowanych skal (3) matematycznych. Przy pomiarach fizycznych skalę pomiarową tworzy przyporządkowanie (10). Przykładem kształtowania funkcji f^* są kolejne MPST (Międzynarodowa Praktyczna Skala Temperatury) z lat 1948, 1968^{x)}. Punktwi stażemu krzepnięcia złota przypisywano wartości temperatury odpowiednio: 1063; 1064,43°C. Powstaje pytanie, czy stany a , a^* są równe?

Równoważność

$$a \leftrightarrow a^* \quad (12)$$

zachodzi w granicach zdolności rozróżniania charakteryzowanej niejednoznacznością odwzorowania (9).

Stosując język matematyczny można powiedzieć, że odwzorowanie (9) przeprowadza stan a w zmienną losową, a B_n oznacza zbiór wartości tej zmiennej. Zmienna losowa będąca obrazem stanu $a \in A$ ma rozkład prawdopodobieństwa $p_n(b)$, przy czym dla rozkładu dyskretnego

$$\sum_{b \in B_n} p_n(b) = 1, \quad (13a)$$

a dla rozkładu ciągłego

$$\int_B p_n(b) db = 1. \quad (13b)$$

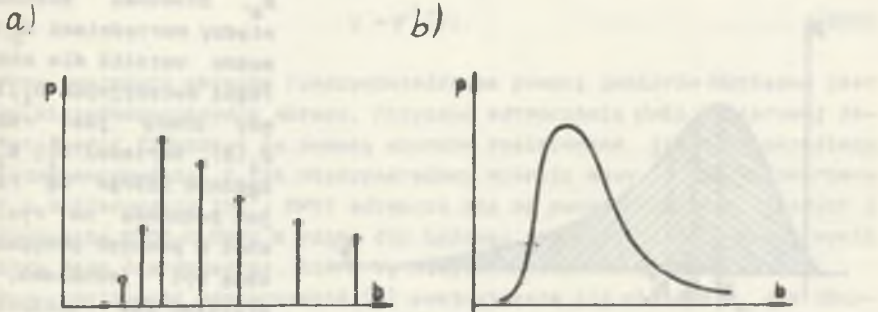
Przyporządkowanie jednemu stanowi a wielu elementów zbioru $B_n \subset B \subset R$ nie jest równo uprzywilejowane, a miarą uprzywilejowania jest prawdopodobieństwo $p_n(b_i)$, $i = 1, \dots, N$; $b_i \in B_n$ w przypadku rozkładu dyskretnego lub gęstość prawdopodobieństwa $p_n(b)$, $b \in B_n$ w przypadku rozkładu ciągłego.

^{x)} Pierwszą Międzynarodową Skalę Temperatury wprowadzono w 1927 r. Punkt staży krzepnięcia złota miał wartość 1063°C.

Odzwierciedlenie stanu a w obraz tego stanu zamiast (9) ma postać:

$$a \rightarrow \{b, p_a(b)\}. \quad (14)$$

Przykład zbioru B_a odzwierciedlającego uatolony stan a przedstawiono na ryc. 1.



Rys. 1. Prawdopodobieństwo odzwierciedlenia stanu a w dziedzinie abstrakcji
a) zbiór wartości dyskretny, b) zbiór wartości ciągły

Jak powiedziano powyżej, dla zdefiniowania skali fizycznej (10) należy ze zbioru $\{b, p_a\}$ dokonać wyboru elementu $b^* \in B_a$, który najlepiej odzwierciedla stan a . Wybór dokonany jest wg decyzji D :

$$b^* = D(p_a). \quad (15)$$

Stosuje się różne reguły decyzyjne, przy czym reguła zastosowana do kreowania skali winna być znana. Na przykład reguła decyzyjna D_1 określa, że najlepszym odzwierciedleniem stanu a jest wartość b^* najbardziej prawdopodobna, tzn. wartość modalna.

$$D_1(p_a) = b_1^* \quad \text{takie, że} \quad p_a(b_1^*) = \max_{b \in B} p_a(b). \quad (16)$$

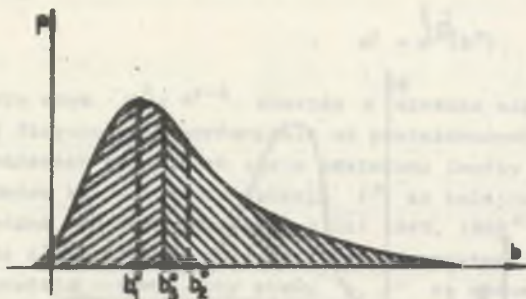
Inną regułą jest wybór wartości przeciętnej, tzn.:

$$D_2(p_a) = b_2^* \quad \text{takie, że} \quad \int b p_a(b) db = b_2^* \quad \text{lub} \quad \sum_1 b_1 p_{a1} = b_2^* \quad (17)$$

albo mediany

$$D_3(p_a) = b_3^* \quad \text{takie, że} \quad P_a(b_3^*) = \frac{1}{2}^x. \quad (18)$$

przy czym $P_a(b)$ jest dystrybuantą rozkładu.



Ryc. 2. Obrazy stanu a dla reguł dancyjnych D_1, D_2, D_3

Punkt $b^* \in B$, ale nie musi to być punkt zbioru B_a . Stosunki zachodzące między wartościami b_1^*, b_2^*, \dots można ustalić dla znanych reguł dancyjnych D_1, D_2, \dots , gdy znany jest rozkład $P_a(b)$. Wartości b_1^*, b_2^*, \dots ogólnie biorąc są różne, jak pokazano na ryc. 2, choć w pewnych przypadkach mogą być jednakowe. Na przykład dla rozkładu asymetrycznego względem punktu b_3^* zachodzi $b_2^* = b_3^*$.

Drugą istotną właściwością odwzorowań f^* oraz φ^* jest postulat, aby były one określone nie tylko dla stanu a lub wartości b^* , ale także dla odchyień od tych punktów leżących w otoczeniu tego stanu lub wartości. Oznacząc symbolem u rezerwację obciążenia można napisać następująco:

$$b^* + v = f^*(a + u), \quad (19)$$

przy czym v jest odchyleniem od punktu b^* . Odwzorowanie odwrotne ma postać:

$$a^* + u = \varphi^*(b^* + v) = f^{*-1}(b^* + v). \quad (20)$$

Właściwość ta, jak wykazał m.in. Ajdukiewicz [12], jest spełniona dla wielkości addytywnych, mierzalnych wg skal metrycznych. Sumę $a + u$ można zrealizować fizycznie spełniając wymagania izomorfizmu stosunków między stanami cechy (w rzeczywistości fizycznej) i stosunków między liczbami rzeczywistymi, które są obrazami tych stanów. Prowadzi to do odwzorowania [12]^{xx)}

^{x)} Dla rozkładu dyskretnego b_3^* jest takie, że

$$P_a(b \leq b_3^*) \geq \frac{1}{2}, \quad P_a(b > b_3^*) \geq \frac{1}{2}.$$

^{xx)} Właściwość (21) oznacza, że funkcja pomiarowa f^* (operator odwzorowania) jest w przypadku skal metrycznych operatorem liniowym.

$$u^* + v = f^*(a + u) = f^*(a) + f^*(u), \quad (21)$$

a stąd po uwzględnieniu (10) do odzworowania

$$v = f^*(u) \quad (22a)$$

oraz

$$u = \varphi^*(v). \quad (22b)$$

Przy twierzeniu obrazów rzeczywistości za pomocą pomiarów niezbędna jest ocena niejednoznaczności obrazu. Fizyczne odtworzenie skali pomiarowej danej wielkości fizycznej za pomocą wzorców realizowane jest z określoną niejednoznacznością. I tak międzynarodowy wzorec masy 1 kg odtworzony jest z dokładnością 10^{-9} ; MPST odtworza się za pomocą punktów stałych z dokładnością 0,01-0,0001 K różną dla każdego z punktów, itd. Każdy wynik pomiaru jest nierównością, która tę niejednoznaczność określa.

Przy realizacji odzworowania (9) poeżugiwienie się zbiorom B_a lub zbiorom $\{b, p_a(b)\}$, $b \in B_a$ jest uciążliwe i nie zawsze potrzebne. Izomorficzność odzworowania (10) oraz (22) pozwala poszukiwać miar niejednoznaczności odzworowania (9) w matematyce, w teorii miary, gdyż zbiór B_a jest zbiorom liczb rzeczywistych.

W fizyce i w technice zastosowanie znalazły tylko niektóre miary zbiorów: miara Lebesgue'a, miary odległości i entropia.

I. Miara Lebesgue'a zbioru

Rozpatrzmy najpierw przypadek rozkładu równomiernego zbioru B_a :

$$p_a(b) = \frac{1}{b_g - b_d}, \quad (23)$$

gdzie b_g , b_d oznaczają kraje górny i dolny zbioru B_a .

Zbiór B_a za pomocą punktu b^* został podzielony na 2 rozłączne podzbiory:

$$B_a = B_d \cup B_g \quad (24)$$

Dla każdego ze zbiorów: B_a , B_d , B_g można zastosować miarę Lebesgue'a. Miary te mają wartości:

$$\mu(B_d) = \varepsilon_d > 0 \quad (25a)$$

$$\mu(B_g) = \varepsilon_d > 0 \quad (25b)$$

oraz

$$\mu(B_a) = \mu(B_d \cup B_g) = \varepsilon_d + \varepsilon_g = 2\varepsilon^x. \quad (26)$$

Przez wprowadzenie siery zbioru stanowi a można przyporządkować parę

$$a \rightarrow (b^x, 2\varepsilon) \quad (27)$$

lub trójkę uporządkowaną

$$a \rightarrow (b^x, \varepsilon_d, \varepsilon_g). \quad (28)$$

przy czym wybór elementu b^x jest rezultatem decyzji D (15). Należałoby stosować zapis b_D^x . Zwykle, jeżeli nie ustala się inaczej, stosowane jest reguła decyzyjne D_2 (17) i wówczas indeks D pomija się.

Dla rozpatrywanego przypadku rozkładu równomiernego

$$2\varepsilon = b_g - b_d \quad (29)$$

oraz

$$\varepsilon_d = \varepsilon_g = \varepsilon. \quad (30)$$

Miarę Lebesgue'a można stosować do zbiorów w k -wymiarowej przestrzeni euklidesowej (wówczas $B \subset R^k$) oraz dla dowolnych rozkładów $p_a(b)$.

Dla rozkładów a dziedzinie nieograniczonej miarę Lebesgue'a przyjmuje wartość ∞ i stosowanie tej miary traci sens. Można wówczas wprowadzić pewne modyfikacje zbioru B_a .

1. Ze zbioru B_a wyłącza się podzbiór B_p

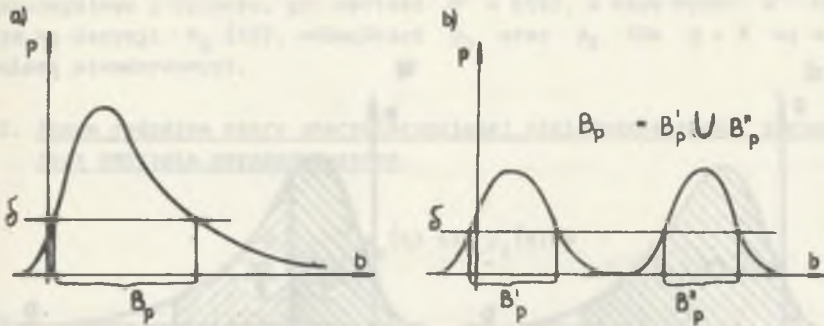
$$B_p = \left\{ b \in B_a : p_a(b) > \delta \right\}, \quad (31)$$

które elementy realizowane są z odpowiednio dużym prawdopodobieństwem i za miarę niejednoznaczności przyjmuje się miarę zbioru B_p . Wydzielenie podzbioru B_p ilustruje rys. 3a.

Wartość miary Lebesgue'a zbioru B_p wynosi:

$$\mu(B_p) = 2\varepsilon_p \leq 2\varepsilon. \quad (32)$$

* Można wykazać, że wyłączenie ze zbioru B_a punktu b^x nie zmienia miary zbioru B_a , gdyż $\mu(b^x) = 0$.



Rys. 3. Miara niejednoznaczności obrotu, gdy $p_a(b) > \delta$

a) interpretacja graficzna miary, b) przypadek, gdy miara nie w pełni charakteryzuje niejednoznaczność obrotu

Im δ jest mniejsze, tym miara $2\epsilon_p$ jest bliższa wartości 2δ . Powyższa miara przestaje być miarodajna dla niespójnych rozkładów prawdopodobieństwa zbioru B_a , jak przykładowo pokazano na rys. 3b.

2. Ze zbioru B_a wyłącza się podzbiór $B_{\alpha} \subset B_a$ będący otoczeniem punktu b^x , tak aby prawdopodobieństwo zrealizowania elementu należącego do otoczenia było dostatecznie duże. Gdy $b^x - \epsilon_d$, $b^x + \epsilon_g$ są kresami dolnym i górnym zbioru B_{α} , to

$$\int_{b^x - \epsilon_d}^{b^x + \epsilon_g} p_a(b) db \geq \alpha \quad (33)$$

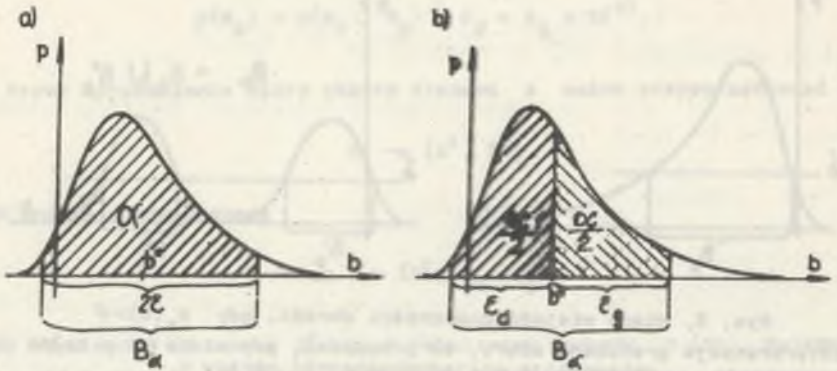
albo

$$\int_{b^x - \epsilon_d}^{b^x} p_a(b) db \geq \frac{\alpha}{2}, \quad \int_{b^x}^{b^x + \epsilon_g} p_a(b) db \geq \frac{\alpha}{2} \quad (34)$$

W tym przypadku $\alpha \in (0,1)$ nazywa się poziomem ufności lub ufnością, a przedział

$$\epsilon_d + \epsilon_g = 2\delta \quad (35)$$

przedziałem ufności. Zachodzi przy tym prawidłowość, że im większa ufność, tym przedział ufności jest większy i odwrotnie. Interpretację graficzną przedziału ufności pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Sposoby wydzielenia zbioru B_α
 a) z warunku (33). b) z warunku (34)

II. Zbiór B_α można scharakteryzować odległością elementów tego zbioru od punktu b^* po zdefiniowaniu metryki przestrzeni

Wskutek założenia, że $B \subset \mathbb{R}$ (lub $B \subset \mathbb{R}^k$) przestrzeń zbioru B_α jest unormowana i odpowiednio do stosowanych norm tej przestrzeni odległości p są następujące:

$$\rho_1 = \sup_{b \in B_\alpha} |b - b^*|, \quad (36)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |b_i - b^*|; \quad b_i \in B_\alpha, \quad (37)$$

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (b_i - b^*)^2}; \quad b_i \in B_\alpha, \quad (38)$$

$$\rho_4 = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (b_i - b^*)^q \right]^{1/q}; \quad b_i \in B_\alpha, \quad (39)$$

Dla zbiorów ciągłych dla $q \geq 1$

$$\rho_5 = \left[\int_{B_\alpha} (b - b^*)^q db \right]^{1/q} \quad (40)$$

W szczególnym przypadku, gdy wartość $b^* = E(b)$, a więc wybór b^* następuje wg decyzji D_2 (17), odległości ρ_3 oraz ρ_5 dla $q = 2$ są odchyleniami standardowymi.

III. Innym rodzajem miary charakteryzującej niejednoznaczność obrazu B jest entropia wyrażana wzorem:

$$H = - \int_{\mathcal{B}} p_b(b) \log p_b(b) db \quad (41a)$$

lub

$$H = - \sum_{i=1}^N p_1(b_i) \log p_1(b_i). \quad (41b)$$

Dla zbioru \mathcal{e} rozkładzie równomiernym (23) entropia ma wartość:

$$H = \log(b_g - b_d). \quad (42)$$

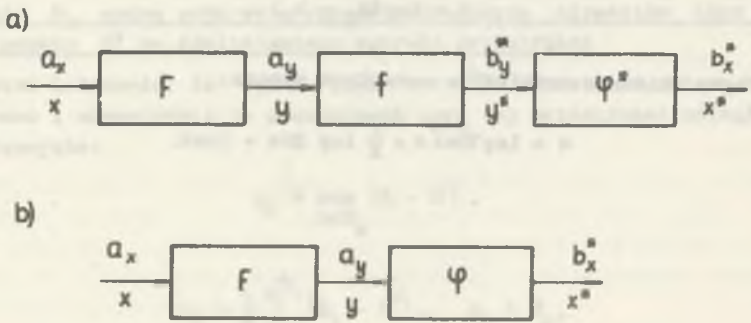
\mathcal{e} entropia zbioru \mathcal{e} rozkładzie normalnym wynosi:

$$H = \log \sqrt{2\pi} \sigma + \frac{1}{2} \log 2\pi e + \log \sigma. \quad (43)$$

3. SYSTEM POMIAROWY I JEGO MODEL

3.1. Model systemu i skala pomiarowa

Człowiek własnymi zmysłami odczuwa tylko niektóre zjawiska. Dlatego do pomiarów używa się narzędzi pomiarowych, które reagując na dane zjawisko przetwarzają daną cechę-wielkość mierzoną w wielkość dostępną zmysłom człowieka. W precy używa się nazwy system pomiarowy (skrót SP) jako równoważnej narzędzia pomiarowego. Tak więc wielkość mierzona jest wielkością wejściową SP, natomiast wielkość wyjściowa SP odbierana jest przez obserwatora (człowieka) jako odwzorowanie wielkości mierzonej.



Rys. 5. Etapy odwzorowanie stanu a w wartość wielkości mierzonej
 a) odwzorowania realizowane formalnie, b) etapy realizowane praktycznie

Zasady odwzorowanie przedstawione w rozdziale 2 dotyczą obrazu wielkości wyjściowej, odwzorowania jej stanu w wartość. Ponieważ SP służy do pomiaru stanów wielkości mierzonej x , a nie wielkości wyjściowej y , więc dla danego SP niezbędne jest ustalenie odwzorowania stanów wielkości wyjściowej y w wartości wielkości mierzonej x^* . W systemach pomiarowych zachodzą następujące odwzorowanie przedstawione na rys. 5:

1) stanu a_x wielkości mierzonej x w stan a_y wielkości wyjściowej y systemu pomiarowego

$$a_x \rightarrow a_y \quad \text{albo} \quad x \rightarrow y. \quad (44)$$

Odwzorowanie to realizowane jest fizycznie przez fizyczne przetworzenie opisywane równaniem przetworzenia

$$a_y = F(a_x) \quad \text{albo} \quad y = F(x). \quad (45)$$

2) stanu a_y wielkości wyjściowej y w wartość b_y^* tej wielkości

$$a_y = b_y^* \quad \text{albo} \quad y = y^*. \quad (46)$$

O odwzorowaniu tym traktuje rozdział 2, a funkcję odwzorowania podaje wzór (10).

3) wartości b_y^* wielkości wyjściowej y SP w wartości b_x^* wielkości mierzonej x

$$b_y^* = b_x^* \quad \text{albo} \quad y^* = x^*. \quad (47)$$

Odwzorowanie to realizowane w dziedzinie abstrakcji opisuje procedura od-tworzenia wartości wielkości mierzonej na podstawie wartości wielkości wyj-ściowej

$$b_x^* = \varphi^*(b_y^*) \quad \text{albo} \quad x^* = \varphi^*(y^*). \quad (48)$$

Powyższe kolejne odwzorowanie można zapisać łącznie, mianowicie

$$b_x^* = \varphi^* \left\{ f_y \left[F(a_x) \right] \right\}. \quad (49)$$

Ponieważ skalę pomiarową wielkości mierzonej definiuje funkcja f_x jak (3) lub (10)

$$b_x = f_x(a_x), \quad (50)$$

więc musi zachodzić równość

$$f_x = \varphi^* \left[f_y(F) \right] \quad (51a)$$

albo

$$f_x = \varphi^* f_y F, \quad (51b)$$

gdy f , φ^* , F są funkcjami lub operatorami. Związek powyższy można zin-terpretować dwojako:

I. Skala f_x wielkości x mierzonej danym systemem pomiarowym zależy od skali f_y wielkości wyjściowej y i od modelu matematycznego SP. Przez dobór właściwości elementów SP opisywanych modelem F oraz procedury odtwarzania wielkości mierzonej φ^x skalę tę można rozmaćcić kształtować.

II. Ponieważ skale f_x, f_y wielkości mierzalnych x oraz y są powszechnie ustalone (skale metryczne), więc warunkiem prawidłowego pomiaru (dla $f_x = f_y = f$) jest taka procedura φ^x , że

$$\varphi^x f F = f, \quad (52)$$

a dla operatorów liniowych

$$\varphi^x = F^{-1}. \quad (53)$$

W postępowaniu praktycznym stosuje się pojęcie "procedura wzorcowania", w której stanem a_y wielkości wyjściowej y systemu pomiarowego nadaje się miarę b_x^k wielkości mierzonej x , tzn. procedura wzorcowania opisuje dwa ostatnie odwzorowania (46), (47) łącznie:

$$a_y \rightarrow b_x^k \quad \text{albo} \quad y \rightarrow x^k. \quad (54)$$

Jest to funkcja lub operator φ , więc

$$b_x^k = \varphi(a_y) \quad \text{albo} \quad x^k = \varphi(y). \quad (55)$$

Biorąc pod uwagę fizyczne przetworzenie $x \rightarrow y$ w systemie pomiarowym opisywane operatorem F (45) otrzymuje się:

$$b_x^k = \varphi[F(a_x)] = I(a_x) \quad (56a)$$

albo

$$x^k = \varphi[F(x)] = I(x). \quad (56b)$$

Dziedzina odwzorowania (56) jest rzeczywistość, w której występują stan a_x cechy mierzonej x , a przeciwdziedzina jest oś liczbowa liczb rzeczywistych, na której wektorka lub inny element konstrukcyjny SP określa wartość b_x^k wielkości mierzonej x . Odwzorowanie (56) jest równoważne odwzorowaniu (10) i określa skalę wielkości mierzonej daną SP. W ostatnim zapisie (56) warunkiem izomorficznego odwzorowania stosunków między stanami wielkości mierzonej a wartościami tej wielkości odczytanymi za wektorka SP jest:

$$\varphi F = I_0 = f_x, \quad (57)$$

przy czym f_x jest odwzorowaniem (10) lub (50), kreującą skalę wielkości x . Warunek ten jest spełniony, gdy

$$\varphi = f_x F^{-1}. \quad (58)$$

Ogólnie biorąc odwzorowania (49) oraz (56) nazywa się modelem matematycznym SP. Model ten składa się z 3 lub 2 części przedstawionych na rys. 5. Z przyczyn, które przedstawione będą później, warunkowi (53) lub (58) nie można spełnić dokładnie, przez co powstają błędy pomiaru. Skoro obrazem stanu a_x jest wartość b_x^s wg odwzorowania (56), a obrazem postulowanym (poprawnym) jest wartość b_x

$$b_x = I_0(a_x), \quad (59)$$

więc różnica

$$\Delta_b = b_x^s - b_x = I(a_x) - I_0(a_x) \quad (60)$$

jest błędem pomiaru systemem pomiarowym o modelu F i procedurze wzercewania φ wyrażonym w dziedzinie obrazu. Ponieważ wartości b_x^s odpowiada stan a_x^s , wg odwzorowania odwrotnego względem (59)

$$a_x^s = I_0^{-1}(b_x^s), \quad (61)$$

więc błąd pomiaru wyrażony w dziedzinie stanów a_x wielkości mierzonej x wynosi:

$$\Delta_a = a_x^s - a_x. \quad (62)$$

Zgodnie z postulatem (21) skoro zachodzi (59), to dla stanu $a_x + \Delta_a$ jest

$$b_x + \Delta_b = I_0(a_x + \Delta_a) = I_0(a_x) + I_0(\Delta_a). \quad (63)$$

skąd wynika, że

$$\Delta_b = I_0(\Delta_a). \quad (64)$$

Odwzorowanie to zachodzi dla wielkości mierzonych wg skali metrycznej (ilorazowej i interwałowej). Dla tych skal błąd pomiaru można wyrazić w dziedzinie stanów wielkości mierzonej i w dziedzinie obrazów, gdyż są one tożsamościowo równe.

3.2. Fizyczne przyczyny błędów

Pierwszą część modelu matematycznego SP (45) zwana równaniem przetwarzania ma następującą postać:

$$y = F(x_1, \dots, x_{m-1}, x, T, a_1, \dots, a_k, z). \quad (65)$$

Wielkości x_1, \dots, x_m są wielkościami wejściowymi SP, przy czym $x_m = x$ jest wielkością mierzoną, x_1, \dots, x_{m-1} są wielkościami wpływającymi, $T = x_{m+1}$ jest czasem eksploatacji SP^{x)}. Wielkości a_1, \dots, a_k są parametrami konstrukcyjnymi SP. Symbol z reprezentuje niemierzalne i niestereowalne zakłócenia, tzn. zjawiska pominięte w modelu.

Analizę modelu rozpoczniemy od interpretacji parametrów konstrukcyjnych poszukując modelu ogólnego opisującego możliwie dokładnie rzeczywiste właściwości elementów konstrukcyjnych SP. Potencjalnie każdy parametr konstrukcyjny a_j ($j = 1, \dots, k$) można przedstawić jako sumę składników

$$a_j = a_{j0} + \Delta a_j = a_{j0} + \Delta a_{j0} + \Delta a_{jd} + \Delta a_{jn} \quad (66)$$

oznaczających:

- a_{j0} - wartość nominalna parametru ustalona w warunkach odniesienia x_{i0} ($i = 1, \dots, m$) oraz T_0 ; jest to (znana) wartość stała,
- Δa_{j0} - niepewność wartości nominalnej parametru,
- Δa_{jd} - odchyłka wartości parametru od wartości nominalnej spowodowana zmianą warunków od warunków odniesienia,
- Δa_{jn} - niestacłość parametru konstrukcyjnego w czasie pomiaru t i w czasie eksploatacji T .

Niepewność Δa_{j0} wartości nominalnej parametru jest równa realizacji błędu pomiaru wartości nominalnej. Zbiór, do którego Δa_{j0} należy, może być znany jako właściwość metrologiczna SP użytego do pomiaru wartości a_{j0} . Są znane np. $E(\Delta a_{j0})$ zwykle równa zero, $\text{var}(\Delta a_{j0})$ oraz ewentualnie rozkład prawdopodobieństwa. Jest to wartość stała, ale nieznaną.

Potencjalnie każdy parametr konstrukcyjny zmienia się pod wpływem warunków otoczenia charakteryzowanych przez wielkości wpływające, więc $a_j = a_j(x_1, \dots, x_{m-1})$. Stąd

$$\Delta a_{jd} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i0}. \quad (67)$$

^{x)} Oznaczenie $T = x_{m+1}$ będzie używane wyjątkowo dla skrótowego zapisu, by nie zgubić innego sensu fizycznego czasu (np. ograniczona sterowalność). Bieżący czas pomiaru oznaczany będzie symbolem t .

Te fizyczna właściwość elementów konstrukcyjnych jest przyczyną zależności wielkości wyjściowej y SP od wielkości mierzonej x i wielkości wpływających (nie wyłączną przyczyną). Składnik ten można wyznaczyć jako właściwość elementu zależną od mierzalnych wielkości x_1, \dots, x_n . Szereg wielkości fizycznych, jak: temperatura warstwy przyziemnej, wilgotność powietrza, ciśnienie atmosferyczne, napięcie w sieci energetycznej modeluje się niestacjonarnym procesem losowym. W czasie, w okresie obserwacji ulegają zmianie wartości oczekiwane i wariancje (niekiedy i momenty wyższego rzędu [18]).

Niestacłość parametrów konstrukcyjnych w czasie spowodowana jest zjawiskami molekularnymi, niezauważalnymi wpływami otoczenia oraz starzeniem i zużywaniem się elementów SP. Oto niektóre przykłady.

1. Uderzenie cząstek gazu w nić wagi torcyjnej lub galwanometru powodują fluktuacja organu ruchomego o wychyleniu $\Delta\varphi$, przy czym średniokwadratowe odchylenie wynosi:

$$\Delta\varphi_{sk} = \frac{kT}{a}, \quad (68)$$

gdzie:

$$a = \frac{2r^4G}{2l},$$

- G - moduł sprężystości postaciowej materiału nici,
- r, l - wymiary nici, promień przekroju i długość,
- k - stała Boltzmana (uniwersalna stała gazowa),
- T - temperatura bezwzględna.

2. Szum ciepły w opornikach opisuje wzór Nyquiste:

$$\Delta E_{sk} = \sqrt{4k T R \Delta f}, \quad (69)$$

przy czym:

- ΔE_{sk} - wartość średniokwadratowa siły elektromotorycznej szumów na pasmo częstotliwości Δf ,
- R - oporność opornika.

3. Szum prądowy wynikający z molekularnej natury elektryczności ujawnia się w czujnikach pomiarowych (obwodach) o małym natężeniu prądu, jak: detektory procieleniania, oporniki cienkwarstwowe, półprzewodniki itp. Wartość średniokwadratową tego szumu określa wzór empiryczny:

$$\Delta V_{sk} = C \cdot R \cdot I \sqrt{\frac{\Delta f}{T}}, \quad (70)$$

gdzie:

- C - stała,
- R - oporność,
- i - natężenie prądu,
- f - częstotliwość.

4. Szum łąrutowy występujący w fotopowielaczach (i lampach elektronowych) będący efektem emisji elektronów z katody charakteryzuje średnio-kwadratowy prąd szkiei:

$$\Delta i_{sk} = \sqrt{2 e i_0 \Delta f} \quad \text{lub} \quad \Delta i_{sk} = \sqrt{\frac{e i_0}{t}}, \quad (71)$$

gdzie:

- i_0 - wartość średnie prądu w okresie czasu t,
- e - ładunek elektronu.

5. Molekularny charakter mają zjawiska wymiany ciepła przez przewodzenie i konwekcję przez gaz, przez promieniowanie, ciśnienie płynu i wiele innych zjawisk.

6. Starzenie się izolacji opisuje prawo Arrheniusa [17]:

$$v = v_{\infty} e^{-\frac{\Delta V}{RT}} = v_{\infty} e^{-\frac{B}{T}}, \quad (72)$$

gdzie:

- v - szybkość reakcji chemicznych,
- R - stała gazowa,
- T - temperatura,
- ΔV - energie aktywacji,
- v_{∞} - stała reakcji.

7. Szybkość parowania materiału z gorącego włókna opisuje się wzorem [17]:

$$\dot{G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} R} p \sqrt{\frac{M}{T}}. \quad (73)$$

gdzie:

- p - ciśnienie,
- M - ciężar molekularny materiału,
- R - stała gazowa,
- T - temperatura.

8. Zanieczyszczanie się powierzchni elementów optycznych, przewodzących prąd, aktywnych w różnym sensie powoduje zmiany monotoniczne, choć trudne do opisu analitycznego.

Szerzenie i zużywania się materiałów jest przyczyną zmiany w czasie eksploatacji SP wartości oczekiwanej parametru a_j , a w niektórych przypadkach zmiany wariancji (np. zanieczyszczenie się chropowatości powierzchni wakat docierania się części ruchomych). Przykłady szumów molekularnych pokazują, że wariancja szumu zależy od temperatury pracy elementu.

Łączne wystąpienie źródeł nieścisłości powoduje, że wartość parametru a_j jest niestacjonarnym procesem losowym. Taka jest natura wielkości fizycznych, które są parametrami konstrukcyjnymi SP. W olbrzymiej większości przypadków zmienność parametrów konstrukcyjnych jest mała i traktuje się je jako wielkości stałe. Przy projektowaniu i budowie SP zjawiska fizyczne modeluje się z dokładnością $10^{-2} - 10^{-8}$ i mała zmienność parametrów może być istotna w ocenie błędów.

Analizowaną część modelu matematycznego SP wyraża równanie przetworzenia (65) opisujące zjawiska fizyczne zachodzące w elementach SP. Ponieważ argumentami funkcji lub operatora F są wielkości będące niestacjonarnymi procesami losowymi, to wielkość wyjściowa γ SP jest niestacjonarnym, wielowymiarowym procesem losowym, a mianowicie

$$\gamma = \left\{ \gamma(x_1, \dots, x_n, T) \right\} = \left\{ F(x_1, \dots, x_n, T) \right\}. \quad (74)$$

Wymiarowość procesu γ określa liczba $m+1$ mierzalnych, niezależnych argumentów, które mogą być sterowalne lub mogą być zmiennymi (lub procesami) losowymi. Wakat losowej nieokreśloności parametrów konstrukcyjnych oraz losowego charakteru zjawisk pominiętych w modelu równanie (74) jest zależnością stochastyczną. Tak przebiega fizyczne przetworzenie wielkości mierzonej x w wielkość wyjściową γ systemu pomiarowego.

Drugą częścią modelu matematycznego SP jest procedura wzorcowania φ . Jest to ogólnie biorąc funkcja lub operator, którego argumentami mogą być: wielkość wyjściowa γ , jej pochodne oraz wielkości wpływające. Współczynnikami są c_1, \dots, c_1 , tak więc

$$x^* = \varphi(\gamma) = \varphi(\gamma, c_1, \dots, c_1) \quad (75a)$$

albo

$$x^* = \varphi(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots), \quad (75b)$$

albo

$$x^* = \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (75c)$$

albo

$$x^* = \varphi(\gamma, x_1, \dots, x_{n-1}, T). \quad (75d)$$

Połączenie odwzorowań I i II części modelu daje wynik pomiaru

$$\{x^*\} = \left\{ \varphi \left[F(x_1, \dots, x_{n-1}, x, T), c_1, \dots, c_1 \right] \right\}, \quad (76)$$

a po skorzystaniu z definicji błędu (62)

$$\{\Delta\} = \{x^*\} - x = \left\{ \varphi \left[F(x_1, \dots, x_{n-1}, x, T) \right] \right\} - x. \quad (77)$$

4. MODEL BŁĘDU I JEGO WŁAŚCIWOŚCI

4.1. Właściwości fizyczne błędu

Właściwości zjawisk fizycznych zachodzących w SP określają charakter wielkości wyjściowej y w systemie pomiarowym oraz edtworzonego na podstawie y obrazu x^* wielkości mierzonej. Taki sam charakter ma również błąd pomiaru Δ . Wielkości to: y , x^* oraz Δ jako funkcja (lub operatory) niestacjonarnych procesów losowych są ogólnie biorąc niestacjonarnymi, wielowymiarowym procesem losowym.

Wielowymiarowość tego procesu jest wynikiem działania $m+k$ niezależnych źródeł losowych. Charakterystyki statystyczne źródeł a_j ($j = 1, \dots, k$) można wyznaczyć doświadczalnie (rzadko teoretycznie) oddzielnie lub łącznie zaatakując je jednym źródłem traktowanym jako wewnętrzne źródło błędów SP. Łączne działania tych źródeł można wyznaczyć analitycznie wg znanych wzorów modelujących działanie SP, gdy znane są charakterystyki pojedynczych źródeł.

W warunkach otoczenia stałych ($x_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, m+1$) parametry konstrukcyjne są wewnętrznym źródłem błędów

$$\{\Delta\} = \hat{f}(a_1, \dots, a_k). \quad (78)$$

Wówczas SP umieszczony jest w określonym punkcie $m+1$ wymiarowej przestrzeni.

W warunkach, gdy wielkości wejściowe x_i ($i = 1, \dots, m+1$) są zmiennymi losowymi, SP jest umieszczony w wielowymiarowym polu losowym o współrzędnych x_1, \dots, x_m, T . Obserwowalny błąd Δ jest sumarycznym efektem wewnętrznych źródeł błędów oraz położenia SP w polu losowym. Elementarnym zdarzeniem jest fakt obserwacji błędu SP, a miarą tego zdarzenia jest podzbiór zbioru wartości błędów. Probabilistyczną miarą określoną na wartościach błędów jest prawdopodobieństwo zrealizowania w danym zdarzeniu określonej wartości błędu z podzbioru właściwego dla danego zdarzenia. W przypadku niestacjonarnego, wielowymiarowego procesu losowego zdarzenie elementarne utożsamia się z realizacją procesu. Realizacją zdarzenia jest dyskretna lub ciągła funkcja losowa określona dla chwili czasu t lub przedziału czasu $\langle t_d, t_g \rangle$, przy czym argumenty procesu (współrzędne przestrzeni) mają stałe, określone wartości x_1, \dots, x_m, T . Realizacja procesu jest więc punktem

$$\Delta_1 = \Delta(x_1, \dots, x_m, T, t_1) \quad (79)$$

zbiorem takich punktów, gdy $t_1 \in \langle t_d, t_g \rangle$ lub funkcję czasu

$$\Delta(t) = \Delta(x_1, \dots, x_m, T, t). \quad (80)$$

Zbiór realizacji procesu błędów $\{\Delta_k\}$, przy czym $k = 1, \dots, N$ jest podstawą oceny właściwości statystycznych procesu.

4.2. Właściwości matematyczne błędu

Do modelowania błędów systemów pomiarowych przyjmuje się pewną klasę niestacjonarnych, wielowymiarowych procesów losowych, mianowicie taką, którą przez przekształcenie funkcyjne można sprowadzić do procesu stacjonarnego. Proces błędów $\{\Delta\}$ można przedstawić za pomocą procesu stacjonarnego $\{\varepsilon\}$ i funkcji $h(x_1, \dots, x_m, T)$, $g(x_1, \dots, x_m, T)$ mierzalnych argumentów, takich że

$$\{\Delta\} = \{\Delta(x_1, \dots, x_m, T)\} = g(x_1, \dots, x_m, T) \{\varepsilon\} + h(x_1, \dots, x_m, T). \quad (81)$$

Proces losowy $\{\varepsilon\}$ ma następujące właściwości:

1) wartość oczekiwaną równą zero, $E\{\varepsilon\} = 0$, (82a)

2) jednostkową wariancję, $E\{[\varepsilon] - E\{\varepsilon\}\}^2 = E\{\varepsilon\}^2 = 1$, (82b)

3) unormowaną funkcję korelacji $\rho(\tau)$,

$$E(\{[\varepsilon_t] - E\{\varepsilon_t}\} \{[\varepsilon_{t+\tau}] - E\{\varepsilon_{t+\tau}\}\}) = E\{\varepsilon_t\} \{\varepsilon_{t+\tau}\} = \rho(\tau). \quad (82c)$$

Wartości oczekiwane oblicze się po zbiorze realizacji. Zachodzi przy tym następujący związek definiujący funkcje $g(\cdot)$ oraz $h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} E\{\Delta_k\} &= E\{g(\cdot) \{\varepsilon_k\} + h(\cdot)\} = g(\cdot) E\{\varepsilon_k\} + h(\cdot) = \\ &= h(x_1, \dots, x_m, T). \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \text{var}\{\Delta_k\} &= E\{[\{\Delta_k\} - E\{\Delta_k\}]^2\} = E\{[g(\cdot) \{\varepsilon_k\}]^2\} = \\ &= g^2(\cdot) E\{\varepsilon_k\}^2 = g^2(x_1, \dots, x_m, T). \end{aligned} \quad (84)$$

Oznacza to, że funkcja h jest wartością oczekiwaną błędów, a g jest odchyleniem standardowym procesu błędów.

Do pełnego scharakteryzowania procesu błędów $\{\Delta\}$ należy jeszcze dodać funkcję korelacji $K_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2)$ procesu niestacjonarnego. Dwie kolejne realizacje błędów mogą być skorelowane, przy czym rozmaitość warunków realizacji jest dość duża i wymienione są tylko niektóre. W każdym przypadku realizacje Δ_1 oraz Δ_2 muszą być odległe w czasie o odstęp $\tau = t_2 - t_1$. Ponadto można je zrealizować dla tych samych wartości współrzędnych przestrzeni lub dla różnych. Przedstawię to w tabelicy 1. Łączna liczba funkcji korelacji wynosi 2^{m+1} . Wzory wyrażające funkcję korelacji dla najprostszycch przypadków Lp. 1, Lp. 2 w tabelicy 1 są podane poniżej, przy czym x jest jedną z $m+1$ współrzędnych, natomiast t oznacza czas pomiaru, w którym następuje realizacja błędów. Realizacje Δ_1, Δ_2 następujące w chwilach t_1, t_2 mogą należeć do jednego i tego samego okresu eksploatacji T_r lub do różnych okresów T_r, T_s odległych o ΔT .

Tabelica 1

Warunki realizacji błędów

Lp.	Warunki dwóch realizacji błędów	Liczba kombinacji
1	Wszystkie współrzędne niezmiennie	$1 = \binom{m+1}{0}$
2	Zmiana jednej współrzędnej, pozostałe niezmiennie	$m + 1 = \binom{m+1}{1}$
3	Równoczesna zmiana dwóch dowolnych współrzędnych, pozostałe niezmiennie	$\frac{(m+1)m}{2} = \binom{m+1}{2}$
4	Równoczesna zmiana trzech współrzędnych, pozostałe niezmiennie	$\frac{(m^2 - 1)m}{6} = \binom{m+1}{3}$
	itd.	
$m+1$	Równoczesna zmiana m współrzędnych, jedna niezmiennie	$m + 1 = \binom{m+1}{m}$
$m+2$	Równoczesna zmiana wszystkich współrzędnych	$1 = \binom{m+1}{m+1}$

Gdy wartości współrzędnych są niezmiennie, to funkcje korelacji

$$\begin{aligned}
 K_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2 / t_1, t_2) &= E \left\{ \left[\Delta(x, t_1) - E\Delta(x, t_1) \right] \left[\Delta(x, t_2) - \right. \right. \\
 &- \left. \left. E\Delta(x, t_2) \right] \right\} = E \left\{ \left[g(x) \left\{ \varepsilon_{t_1} \right\} + h(x) - h(x) \right] \left[g(x) \left\{ \varepsilon_{t_2} \right\} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. h(x) - h(x) \right] \right\} = E \left[g^2(x) \left\{ \varepsilon_{t_1} \right\} \left\{ \varepsilon_{t_2} \right\} \right] = g^2(x) \rho(\tau) \quad (95)
 \end{aligned}$$

charakteryzuje skorelowanie błędów w dwóch kolejnych pomiarach odległych w czasie o odstęp τ . Jak widać, ze wzoru (85) skorelowanie określa wartość unormowanej funkcji korelacji procesu $\{\varepsilon\}$.

Gdy kolejne realizacje błędów są dla dwóch wartości współrzędnej $x: x_1$ oraz x_2 odległych o $\xi = x_2 - x_1$, to

$$\begin{aligned}
 K_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2 | t_1, t_2, x_1, x_2) &= \\
 &= E \left\{ [\Delta(x_1, t_1) - E\Delta(x_1, t_1)] [\Delta(x_2, t_2) - E\Delta(x_2, t_2)] \right\} = \\
 &= E \left\{ [g(x_1) \{\varepsilon_{t_1}\} + h(x_1) - E h(x_1)] [g(x_2) \{\varepsilon_{t_2}\} + h(x_2) - E h(x_2)] \right\} = \\
 &= E \left\{ g(x_1)g(x_2) \{\varepsilon_{t_1}\} \{\varepsilon_{t_2}\} + h(x_1)h(x_2) + \bar{h}_x^2 + \right. \\
 &+ g(x_1)h(x_2) \{\varepsilon_{t_1}\} + g(x_2)h(x_1) \{\varepsilon_{t_2}\} - \bar{h}_x [g(x_1) \{\varepsilon_{t_1}\} + \\
 &+ g(x_2) \{\varepsilon_{t_2}\}] - \bar{h}_x [h(x_1) + h(x_2)] \left. \right\} = \\
 &= E_x [g(x_1)g(x_2)] \rho(\tau) + K_h(x_1, x_2) = \mu_{2g}(x_1, x_2) \rho(\tau) + K_h(x_1, x_2). \quad (86)
 \end{aligned}$$

Oznaczone:

$$\bar{h}_x = E h(x_1) = E h(x_2), \quad (86a)$$

$$K_h(x_1, x_2) = E [h(x_1) h(x_2) - \bar{h}_x^2]. \quad (86b)$$

$$\begin{aligned}
 E [g(x_1) g(x_2) \{\varepsilon_{t_1}\} \{\varepsilon_{t_2}\}] &= E_x E_t [g(x_1) g(x_2) \{\varepsilon_{t_1}\} \{\varepsilon_{t_2}\}] = \\
 &= E_x [g(x_1) g(x_2)] E_t [\{\varepsilon_{t_1}\} \{\varepsilon_{t_2}\}] = \mu_{2g}(x_1, x_2) \rho(\tau). \quad (86c)
 \end{aligned}$$

Jeżeli przyjąć:

$$\xi = x_2 - x_1, \quad (87a)$$

$$K_h(x_1, x_2) = K_h(\xi), \quad (87b)$$

$$\mu_{2g}(x_1, x_2) = \mu_{2g}(\xi), \quad (87c)$$

to

$$K_{\Delta}(\Delta_1, \Delta_2 | t_1, t_2, x_1, x_2) = \mu_{2g}(\xi) \rho(\tau) + K_h(\xi), \quad (88)$$

a gdy $\tau \rightarrow \infty$ i $\rho(\infty) = 0$, to

$$K_{\Delta} = K_h(\xi). \quad (89)$$

Z wartości K_{Δ} można wyznaczyć wariancję błędu średnią w przedziale zmian zmiennej x po wstawieniu $\tau = 0$, $\xi = 0$, mianowicie

$$K_{\Delta}(0) = \mu_{2g}(0) \rho(0) + K_h(0) = \bar{g}^2 + \sigma_h^2. \quad (90)$$

Unormowana funkcja korelacji kolejnych realizacji błędów wynosi:

$$\rho_{\Delta} = \frac{\mu_{2g}(\xi) \rho(\tau) + K_h(\xi)}{\bar{g}^2 + \sigma_h^2}. \quad (91)$$

Interpretacja ostatniej funkcji jest następująca. Kolejne realizacje błędów są skorelowane. Skorelowania staje się mniejsze, gdy błędy realizuje się w odstępach czasu $\tau > \tau_{gr}$, bo wówczas wskutek $\rho \rightarrow 0$ pierwszy składnik licznika wzoru (91) ma wartość zero. Skorelowanie jest tym mniejsze, im mniejszy jest udział wariancji błędu systematycznego w wariancji błędu całkowitego. Dla warunku $\tau > \tau_{gr}$ skorelowanie realizacji błędów jest tym mniejsze, im większe jest odległość tych realizacji na współrzędnej x , przy czym decydują o tym właściwości funkcji $h(x)$. Na przykład funkcja $h(x)$ dana jest w zakresie $Z = x_g - x_d$ wzorem:

$$h(x) = a_0 + a_1 x. \quad (92)$$

Wówczas:

$$K_h(\xi) = \frac{1}{12} a_1^2 Z^2 = \text{const.}, \quad (93)$$

co oznacza $\rho_h(\xi) = 1$.

Gdy $h(x) = \sin x$, to $K_h(\xi) = \cos \xi$. (94)

W przypadku ogólnym $h(x)$ można rozwinąć w szereg Fouriera uznając za okres podstawowej harmonicznej zakres $\langle x_d, x_g \rangle$, tzn. $\omega = \frac{2\pi}{x_g - x_d}$. Szereg ten jest przybliżeniem funkcji $h(x)$, mianowicie:

$$h(x) \approx a_0 + 2 \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x). \quad (95)$$

Funkcje korelacji obliczone dla szeregu (95) wskutek ortogonalnych właściwości wyrazów szeregu ma postać:

$$\kappa_h(\xi) = 4 \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \cos(n\omega\xi). \quad (96)$$

Funkcja ma tę właściwość, że

$$\kappa_h(\xi) \leq \kappa_h(0) = G_h^2. \quad (97)$$

W interpretacji właściwości błędów za pomocą unormowanej funkcji korelacji (91) należy pamiętać, że błąd o wartości stałej, $h(x) = \text{const.}$ nie wpływa na wartość funkcji ρ_{Δ} .

4.3. Metrologiczne właściwości błędu

Metrologiczne właściwości błędu systemu pomiarowego są następujące. Wartość oczekiwana (83) jest błędem systematycznym

$$\Delta_s = E \left\{ \Delta_k \right\} = h(x_1, \dots, x_m, T), \quad (98)$$

a reszta jest błędem przypadkowym

$$\left\{ \Delta_p \right\} = \left\{ \Delta \right\} - \Delta_s = g(x_1, \dots, x_m, T) \left\{ \epsilon \right\}. \quad (99)$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe definicje implikują właściwości:

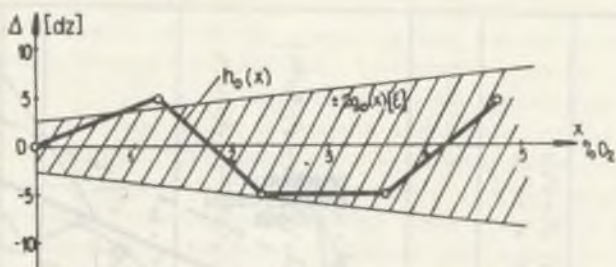
- a) wartość oczekiwany błędu przypadkowego jest równa zero,
- b) odchylenie standardowe błędu przypadkowego wynosi $g(x_1, \dots, x_m, T)$.

W przypadku $h(\cdot) = \text{const.}$, $g(\cdot) = \text{const.}$ błąd jest procesem stacjonarnym. W ogólnym przypadku $h \neq \text{const.}$ lub $g \neq \text{const.}$ oraz $h \neq \text{const.}$, $g \neq \text{const.}$ błąd jest procesem niestacjonarnym.

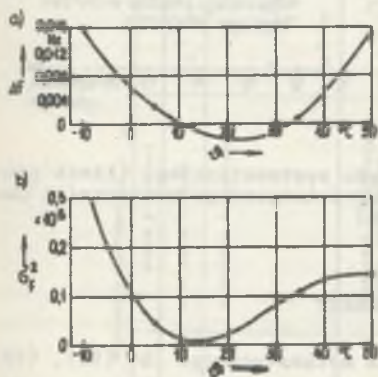
Weryfikacja tezy, że modelowanie błędu niestacjonarnym, wielowymiarowym procesem losowym daje zgodne z rzeczywistością wyniki, jest łatwa przez odwołania się do powszechnie znanych właściwości metrologicznych systemów pomiarowych. I tak:

1) rozkład podatekowego błędu systematycznego przedstawiono na rys. 6. Zachodzi $h(x) \neq \text{const.}$,

2) w przyrządzie pomiarowym o nierównomiernej podziałce, gdy jedynym źródłem błędu jest błąd odczytu o stałym odchyleniu standardowym wielkości wyjściowej y , to odchylenie standardowe błędu odczytu wyrażone w od-



Rys. 6. Rozkład błędów: systematycznego $h_0(x)$ i przypadkowego $g_0(x)$ w warunkach odniesienia analizatora tlenu KTM-7



Rys. 7. Rozkład dodatkowych błędów temperaturowych przetwornika telemetrycznego PT

a) błąd systematyczny, b) wariancja błędu temperaturowego [32]

dodatkowy w układzie liniowym jest proporcjonalny do odchyłki napięcia zasilania od wartości odniesienia, $\Delta_U = k_U(U - U_0) = k_1(x_1 - x_{10}) \neq \text{const}$,

6) zmianę błędów systematycznego i przypadkowego w czasie pokazano na rys. 8.

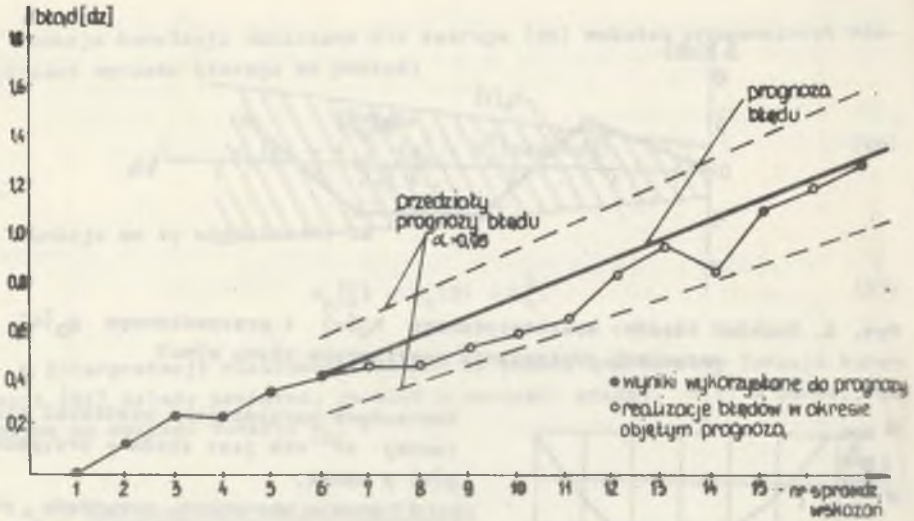
Jako przykłady wymieniono procesy jednowymiarowe. Nie ma wątpliwości, że wymienione rodzaje błędów występują lub mogą występować w danym SP równocześnie. Stanowi to pełne potwierdzenie przyjętego modelu błędów, choć mniejsze intensywne niektórych zjawisk w szczególnych przypadkach może prowadzić do bardziej prostego modelu. Proponowany model łatwo adaptuje się w sposób naturalny do prostych przypadków, a wyrazem prostoty jest postać funkcji $g(x_1, \dots, x_m, T)$ oraz $h(x_1, \dots, x_m, T)$.

tworzonych wartościach wielkości mierzonej x^* nie jest stała - przypadek $g(x) \neq \text{const}$,

3) prawie wszystkie przyrządy pomiarowe są obciążone systematycznymi błędami dodatkowymi. Opiekuje je $\Delta_i = h(x_i)$ lub $\Delta_d = h(x_1, \dots, x_{m-1}) \neq \text{const}$. Na rys. 7 przedstawiono przykładowo dodatkowy błąd temperaturowy przetwornika telemetrycznego typu PT,

4) błąd przypadkowy wywołany zjawiskami molekularnymi zależy od temperatury, jak podają wzory (68), (69),

5) w układzie mostkowym niezrównoważonym do pomiaru wielkości nieelektrycznych ze pomocą przetworników peremetrycznych wielkością wpływającą jest napięcie zasilania. Napięciowy błąd



Rys. 8. Realizacja błędów oraz prognoza błędu systematycznego (linie grube) i przypadkowego (linie przerywane) elektrochemicznego przetwornika tlenu w wodzie [26]

4.4. Modyfikacje niektórych definicji błędów

Konsekwencją przyjętego wcześniej modelu matematycznego SP (56), (76) jest zmiana definicji błędów na taką, które wyraźnie i jednorodnie wskazuje przyczyny rozmaitych błędów. Jest to związane pojęciowo nie naruszając istotnie dotychczasowych sposobów wyznaczania błędów. Zmianie się określiło odjemnej i odjemnika w definicji błędów. Mianowicie:

Błąd pomiaru jest to różnica między wynikiem pomiaru a wartością poprawną tego wyniku. Wynik pomiaru jest zbiorem wartości odtworzonych $\{x^k\}$ za pomocą procedury wzorcowania φ_0 , gdy dzielenie rzeczywistego SP opisuje model F . Wartością poprawną wyniku pomiaru jest wartość odtworzona x za pomocą procedury naturalnej φ takiej, że $\varphi = F^{-1}$, gdy F opisuje dzielenie rzeczywistego SP. Oznacze to

$$\Delta = \varphi_0[F(x)] - \varphi[F(x)] = \varphi_0[F(x)] - x. \quad (100)$$

Jeżeli F jest zależnością stochastyczną (74), to nie istnieje procedura wzorcowania $\varphi = F^{-1}$ i nie istnieje SP, dla którego $\Delta \equiv 0$. Istnieją procedury naturalne dla przybliżonych modeli SP takich, w których procesy losowe $\{s_1\}, \dots, \{s_k\}$ zastępuje się wartościami stałymi s_{10}, \dots, s_{k0} oraz zakłada się $z \equiv 0$. Elementarne modele oraz odpowiadające im procedury naturalne $\varphi = F^{-1}$ zestawiono w tabelicy 2. W pozycji Lp. 6 poda-

Procedury wżercowania

Lp.	Model SP	Procedura wżercowania	Nazwa procedury	Przykłd i warunki
1	$y = k(x - x_0)$	$x^w = c_0 + c_1 y$	statyczne liniowe	$c_0 = x_0, \quad c_1 = \frac{1}{k}$
2	$y = f(x)$	$x^w = \varphi(y)$	statyczne nieliniowe	$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ $x^w = \frac{2}{b_2} \left[\sqrt{c_2 y + b_1^2 - c_0 c_2} - c_1 \right]$ $c_0 = b_0, \quad c_1 = b_1, \quad c_2 = 4b_2$
3	$y = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$	$x^w = \varphi(y, x_1, \dots, x_{n-1})$	statyczne z korekcją błędów dodatkowych	$y = k_0 \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{\delta_1} \left(\frac{x_2}{x_{20}} \right)^{\delta_2} x + A_1 (x_1 - x_{10}) + A_2 (x_2 - x_{20})$ $x^w = c \left(\frac{x_1}{x_{10}} \right)^{\beta_1} \left(\frac{x_2}{x_{20}} \right)^{\beta_2} \left[y + B_1 (x_1 - x_{10}) + B_2 (x_2 - x_{20}) \right]$ $c = \frac{1}{k_0}, \quad B_1 = -A_1, \quad B_2 = -A_2$ $\beta_1 = -\delta_1, \quad \beta_2 = -\delta_2$
4	$y(t) = \int_0^t k(t, \tau) x(\tau) d\tau$	$x^w(t) = \int_0^t h(t, \tau) y(\tau) d\tau$	dynamiczne liniowe	$\int_0^t h(t, \tau) k(\tau) d\tau = \delta(t)$
5	$y = f(x, T)$	$x^w = \varphi(y, T)$	statyczne z korekcją modelu w czasie	np. jak w Lp. 2 $b_0 = b_0(T), \quad b_1 = b_1(T), \quad b_2 = b_2(T)$ $c_0 = c_0(T), \quad c_1 = c_1(T), \quad c_2 = c_2(T)$
6	$y = f(x, x)$ $y = f(x)_{x=0}$	$x^w = E[\varphi(y)]$ $\varphi = f^{-1}$	statyczne z uśrednieniem	

no procedurę odtwarzania x^z dla modelu stochastycznego. Ograniczenia lo-
 oowości modelu osiąga się za pomocą operatora E wyznaczania wartości
 oczekiwanej. Oprócz operatora E stosuje się rozmaite operacje filtrowa-
 nia, które ograniczają błędy przypadkowe.

Różnice między zastosowaną procedurą φ_0 a procedurą naturalną φ mo-
 gą być natury jakościowej oraz ilościowej. Gdy właściwości SP zależą od
 wielkości wpływających - model Lp. 3, a zastosowano procedurę wg Lp. 2,
 to powstają błędy dodatkowe. Podobnie zastosowanie procedury statycznej
 Lp. 1, gdy naturalną jest procedura dynamiczna, powoduje powstanie błędów
 dynamicznych. Oprócz jakościowej zgodności niezbędny jest dobór postaci
 procedury oraz jej współczynników. Przykłady podane w tabelicy 2 ilustrują
 ten dobór.

Zmiana definicji błędu przenosi punkt ciężkości przyczyn błędu na ce-
 lowy wybór procedury wzorcowania. Wcześniej takie określanie przyczyny by-
 ło mało istotne, gdyż powszechnie stosowano statyczną procedurę wzorcowania
 oraz baz algorytmicznej korekcji błędów dodatkowych. Obecnie technika
 cyfrowa umożliwia zrealizowanie bardzo złożonych procedur wzorcowania, a
 zaleta definicji błędów to możliwości sankcjonuje.

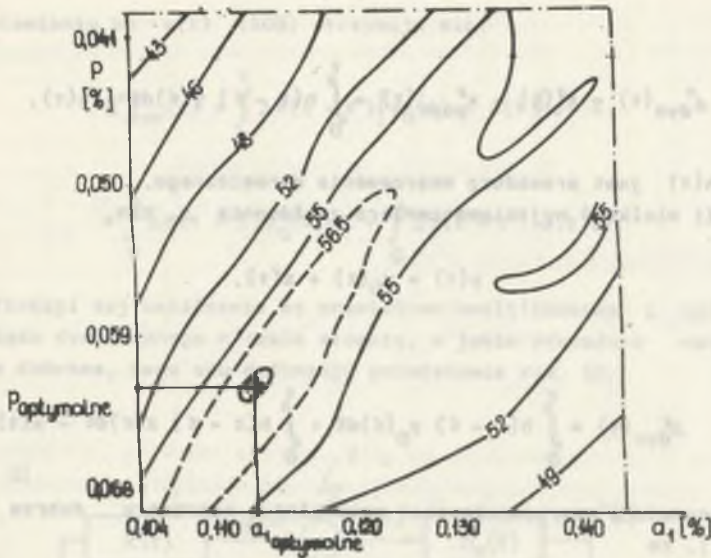
Istnieją przypadki, gdy teoretyczne zalecenie wyboru procedury wzorco-
 wania (58) przestaje odgrywać istotną rolę. Ma to miejsce wówczas, gdy mo-
 del F jest niezmienny oraz gdy z różnych przyczyn nie ma strukturalnej
 odpowiedniości φ z F. Procedurę wzorcowania można wybrać dowolnie mini-
 malizując błąd wg określonego kryterium. Miarę błędów może być miara Lebes-
 gué'a zbioru $\mu(\Delta)$, wskaźnik jakości osiągnięcia celu określony na zbiorze
 błędów $J(\Delta)$ lub inna miara.

Minimum osiąga się przez wybór procedury ze zbioru procedur, przez do-
 bór współczynników procedury - w algorytmicznych sposobach utrwalania pro-
 cedury wzorcowania albo przez dobór nastaw regulowanych parametrów kon-
 strukcyjnych r_1, \dots, r_1 systemu pomiarowego w konstrukcyjnym utrwaleniu
 procedury wzorcowania (modyfikuje się wówczas model $F(r_1, \dots, r_1)$, a pro-
 cedurę utrwała się wcześniej i jest one sztywna). Możliwy i stosowany jest
 sposób mieszany. Gdy miarę błędów jest wskaźnik jakości, to żąda się

$$\min_{c_1, \dots, c_1} J(\Delta) = \min_{c_1, \dots, c_1} J \left\{ \varphi_0 \left[F(x_1, \dots, x_m, T, z), c_1, \dots, c_1 \right] - x \right\}. \quad (101)$$

Oczywiście założyć należy obzer wielkości wejściowych $\langle x_{1d}, x_{1g} \rangle$,
 $i = 1, \dots, m+1$, charakterystyki statyczne i dynamiczne wielkości wejści-
 wych oraz zakłóceń z. Minimum poszukuje się metodą prób sterując odpo-
 wiednio zmiennymi wejściowymi i obserwując zbiór błędów. Przykład zasto-
 sowania tej metody podano na rys. 9 [19].

Jako przykład zastosowania podanej powyżej definicji błędów zbadajmy
 błąd dynamiczny. Klasyczna definicja określa, że błąd dynamiczny, to błąd
 spowodowany odmiennymi od idealnych własnościami dynamicznymi SP [20],



Rys. 9. Dobór metodą prób wartości współczynników modelu SP do pomiaru zawartości węgla w kąpieli konwertora [19]. Minimalny błąd uzyskuje się tutaj dla maksymalnej wartości wskaźnika jakości

[21]. Wielkość wyjściowa $y(t)$ rzeczywistego SP o odpowiedzi na pobudzenie impulsowe $k(t)$, gdy wielkość wejściowa jest $x(t)$, ma przebieg czasowy

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (102)$$

Ponieważ własności dynamiczne idealnego SP są

$$k(t - \tau) = \delta(t - \tau), \quad (103)$$

więc

$$y_{\text{popr}}(t) = \int_0^t \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau = x(t). \quad (104)$$

Stąd błąd dynamiczny

$$\Delta_{\text{dyn}}(t) = y(t) - y_{\text{popr}}(t) = \int_0^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau - x(t) \quad (105a)$$

no procedurę odtworzenia x^* dla modelu stochastycznego. Ograniczenie losowości modelu osiąga się ze pomocą operatora E wyznaczenia wartości oczekiwanej. Oprócz operatora E stosuje się rozmaite operacje filtrowania, które ograniczają błędy przypadkowe.

Różnice między zastosowaną procedurą φ_0 a procedurą naturalną φ mogą być natury jakościowej oraz ilościowej. Gdy właściwości SP zależą od wielkości wpływających - model Lp. 3, a zastosowano procedurę wg Lp. 2, to powstają błędy dodatkowe. Podobnie zastosowanie procedury statycznej Lp. 1, gdy naturalną jest procedura dynamiczna, powoduje powstanie błędów dynamicznych. Oprócz jakościowej zgodności niezbędny jest dobór postaci procedury oraz jej współczynników. Przykłady podane w tabelicy 2 ilustrują ten dobór.

Zmiana definicji błędu przenosi punkt ciężkości przyczyn błędu na celowy wybór procedury wzorcowania. Wcześniej takie określenie przyczyny było mało istotne, gdyż powszechnie stosowano statyczną procedurę wzorcowania oraz bez algorytmicznej korekcji błędów dodatkowych. Obecnie technika cyfrowa umożliwia zrealizowanie bardzo złożonych procedur wzorcowania, a zmiana definicji błędów te możliwości sankcjonuje.

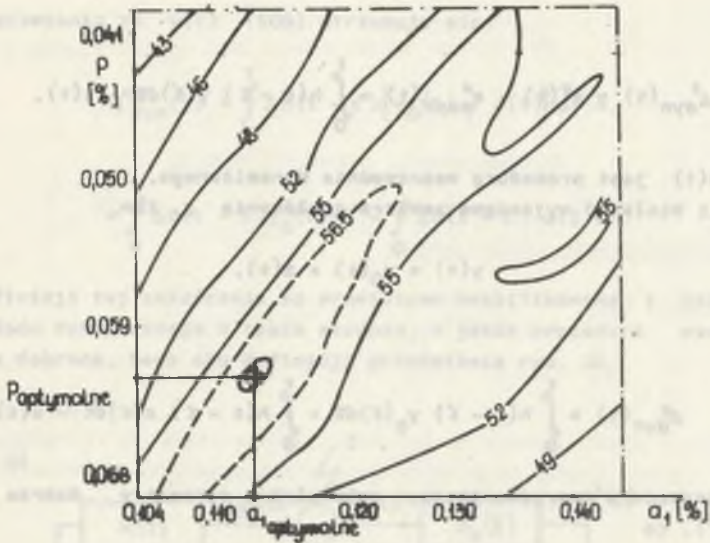
Istnieją przypadki, gdy teoretyczne zalecenia wyboru procedury wzorcowania (58) przejmują odgrywać istotną rolę. Me to siejące wówczas, gdy model F jest nieznanym oraz gdy z różnych przyczyn nie ma strukturalnej odpowiedności φ z F. Procedurę wzorcowania można wybrać dowolnie minimalizując błąd wg określonego kryterium. Miarę błędów może być miara Lebesgue'a zbioru $\mu(\Delta)$, wskaźnik jakości osiągnięcia celu określony na zbiorze błędów $J(\Delta)$ lub inna miara.

Minimum osiąga się przez wybór procedury ze zbioru procedur, przez dobór współczynników procedury - w algorytmicznych sposobach utrwalania procedury wzorcowania albo przez dobór nastaw regulowanych parametrów konstrukcyjnych r_1, \dots, r_l systemu pomiarowego w konstrukcyjnym utrwaleniu procedury wzorcowania (modyfikuje się wówczas model $F(r_1, \dots, r_l)$, a procedurę utrwała się wcześniej i jest one sztywna). Możliwy i stosowany jest sposób mieszany. Gdy miarę błędów jest wskaźnik jakości, to żąda się

$$\min_{c_1, \dots, c_l} J(\Delta) = \min_{c_1, \dots, c_l} J \left\{ \varphi_0 [F(x_1, \dots, x_n, T, z), c_1, \dots, c_l] - x \right\}. \quad (101)$$

Oczywiście założyć należy obszar wielkości wejściowych $\langle x_{1g}, x_{2g} \rangle$, $i = 1, \dots, m+1$, charakterystyki statyczne i dynamiczne wielkości wejściowych oraz zakłóceń z. Minimum poszukuje się metodą prób sterując odpowiednio zmiennymi wejściowymi i obserwując zbiór błędów. Przykład zastosowania tej metody podano na rys. 9 [19].

Jako przykład zastosowania podanej powyżej definicji błędów zbadajmy błąd dynamiczny. Klasykzna definicja określa, że błąd dynamiczny, to błąd spowodowany odmiennymi od idealnych własnościami dynamicznymi SP [20],



Rys. 9. Dobór metodę prób wartości współczynników modelu SP do pomiaru zawartości węgla w kąpieli konwertora [19]. Minimalny błąd uzyskuje się tutaj dla maksymalnej wartości wskaźnika jakości

[21]. Wielkość wyjściowa $y(t)$ rzeczywistego SP o odpowiedzi na pobudzenie impulsowe $k(t)$, gdy wielkość wejściowa jest $x(t)$, ma przebieg czasowy

$$y(t) = \int_0^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (102)$$

Ponieważ własności dynamiczne idealnego SP są

$$k(t - \tau) = \delta(t - \tau), \quad (103)$$

więc

$$y_{\text{popr}}(t) = \int_0^t \delta(t - \tau) x(\tau) d\tau = x(t). \quad (104)$$

Stąd błąd dynamiczny

$$\Delta_{\text{dyn}}(t) = y(t) - y_{\text{popr}}(t) = \int_0^t k(t - \tau) x(\tau) d\tau - x(t) \quad (105a)$$

albo

$$\Delta_{dyn}^x(t) = x^x(t) - x_{popr}^x(t) = \int_0^t h(t-\tau) y(\tau) d\tau - x(t), \quad (105b)$$

gdzie $h(t)$ jest procedurę wzorcowania dynamicznego.

Jeżeli wielkość wyjściowa zawiera zakłócenia z , tzn.

$$y(t) = y_0(t) + z(t), \quad (106)$$

to

$$\Delta_{dyn}^x(t) = \int_0^t h(t-\tau) y_0(\tau) d\tau + \int_0^t h(t-\tau) z(\tau) d\tau - x(t). \quad (107)$$

Gdy procedura wzorcowania jest naturalna i parametry dobrze dobrane ($h = k^{-1}$), to

$$\Delta_{dyn}^x(t) = x(t) + \int_0^t h(t-\tau) z(\tau) d\tau - x(t) = \int_0^t h(t-\tau) z(\tau) d\tau. \quad (108)$$

Oznacza to, że zakłócenia zaliczane są do błędów dynamicznych. Nieprzezwidywalności tej unika się dodając do definicji błędu dynamicznego warunek, że nie bierze się pod uwagę błędów statycznych [20], [21]. Pozostaje wątpliwość, czy $z(t)$ to błąd statyczny, czy jako sygnał zmienny w czasie - dynamiczny. Podobnie jest, gdy dobrane procedurę wzorcowania różniącą się od naturalnej o $\Delta h = h_0 - h$, wówczas

$$\Delta_{dyn}^x(t) = \int_0^t \Delta h(t-\tau) y_0(\tau) d\tau + \int_0^t h_0(t-\tau) z(\tau) d\tau. \quad (109)$$

Według proponowanej definicji odjemna i odjemnik są następujące:

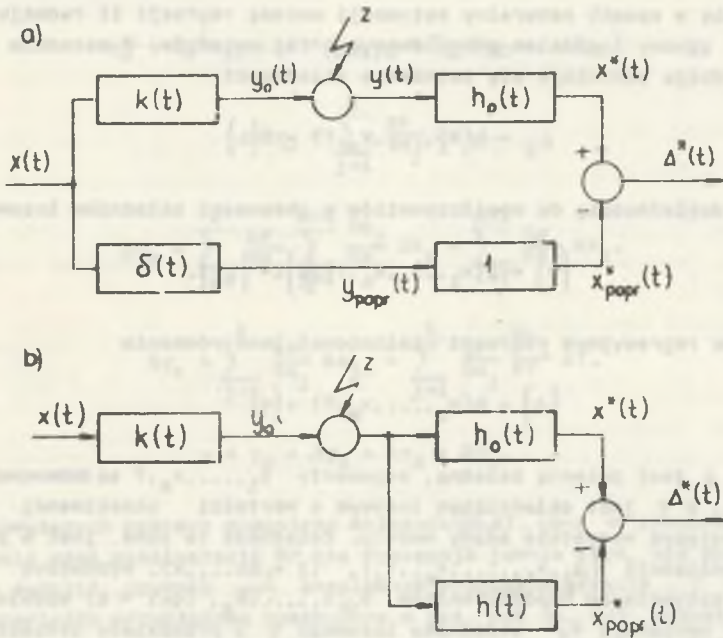
$$x^x(t) = \int_0^t h_0(t-\tau) y(\tau) d\tau, \quad (110)$$

$$x_{popr}^x(t) = \int_0^t h(t-\tau) y(\tau) d\tau. \quad (111)$$

Po wstawieniu za $y(t)$ (106) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \Delta^*_{\text{dyn}}(t) &= \int_0^t \Delta h(t - \tau) [y_0(\tau) + z(\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^t \Delta h(t - \tau) y_0(\tau) d\tau + \int_0^t \Delta h(t - \tau) z(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (112)$$

W definicji tej zakłócenia są prawidłowo kwalifikowane i zalicza się je do błędu dynamicznego w takim stopniu, w jakim procedura wzorcowania jest źle dobrana. Sens obu definicji przedstawia rys. 10.



Rys. 10. Interpretacja błędu dynamicznego

a) wg klasycznej definicji. b) wg definicji proponowanej w pracy

5. ZAGADNIENIA ESTYMACJI BŁĘDÓW

5.1. Wyznaczalność modelu błędów

Model błędu (81)

$$\{\Delta\} = g(x_1, \dots, x_m, T) \{\varepsilon\} + h(x_1, \dots, x_m, T) \quad (113)$$

poddaje się w sposób naturalny estymacji metodą regresji II rodzaju [22], gdyż jest zgodny z modelem postulowanym w tej metodzie. W metodzie regresji II rodzaju postuluje się istnienie zależności

$$\Delta_{\theta} = h(x_1, \dots, x_m, T) = E\{\Delta\} \quad (114)$$

znanej z dokładnością do współczynników w obecności składnika losowego

$$\{\eta\} = g(x_1, \dots, x_m, T) \{\varepsilon\} = \{\Delta_p\}. \quad (115)$$

Modelem regresyjnym regresji nieliniowej jest równanie

$$\{\Delta\} = h(x_1, \dots, x_m, T) + \{\eta\} \quad (116)$$

w którym Δ jest zmienną zależną, argumenty x_1, \dots, x_m, T są zmiennymi niezależnymi, a η jest składnikiem losowym o wartości oczekiwanej równej zero opisującym wszystkie błędy modelu. Zależność ta dana jest w postaci zbioru realizacji $\{\Delta_j, x_{1j}, \dots, x_{mj}, T_j\}$, ($j = 1, \dots, k$). Wyznaczyć należy wartości estymatorów współczynników b_0, b_1, \dots, b_q , ($q+1 < k$) modelu (114), estymator wariancji σ_{η}^2 składnika losowego η i przedziały ufności $\Delta h(x_1, \dots, x_m, T)$ funkcji regresji $h(x_1, \dots, x_m, T)$ z zadaną poziomą ufności α .

Model regresji błędów można wyznaczyć z równania przetworzenia (65) wstawiając weń parametry konstrukcyjne SP (66). Po rozwinięciu równania przetworzenia

$$y = F(x_1, \dots, x_{m-1}, x, T, a_1, \dots, a_k, z) \quad (117)$$

w szereg Taylora w punkcie $(x_{10}, \dots, x_{(n-1)0}, T_0, a_{10}, \dots, a_{k0})$ i pominięciu wyrazów wyższych rzędów oraz zastosowaniu wzorów (66), (67) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 y &= F_0(x_{10}, \dots, x_{(n-1)0}, T_0, a_{10}, \dots, a_{k0}) + \\
 &+ \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \Delta a_{j0} + \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right] + \\
 &+ \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \frac{\partial a_i}{\partial T} \Delta T + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \Delta a_{jn} \right] \quad (118)
 \end{aligned}$$

lub po oznaczeniach

$$y_0 = F_0(x_{10}, \dots, x_{(n-1)0}, T_0, a_{10}, \dots, a_{k0}), \quad (118a)$$

$$\Delta y_0 = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \Delta a_{j0}. \quad (118b)$$

$$\Delta y_d = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad (118c)$$

$$\Delta y_n = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \Delta a_{jn} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial a_j} \frac{\partial a_i}{\partial T} \Delta T, \quad (118d)$$

$$y = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_d + \Delta y_n. \quad (119)$$

W powyższych wzorach pominięto składnik $\left| \frac{\partial F}{\partial T} \Delta T \right|$, gdyż w równaniach przetwarzania czas eksploatacji SP nie występuje jawnie (tzn. nie spotyka się takich modeli). Czynniki $\frac{\partial a_i}{\partial T}$ uwzględnia procesy starzenia i zużycia się materiałów przykładowo wymienione w pkt. 6-8 (s. 24) rozumiane jako szybkość zmiany wartości oczekiwanej parametru w czasie eksploatacji SP. Ostatni składnik wzoru (118d) uwzględnia krótkotrwałe zmiany parametrów konstrukcyjnych w czasie pomiarów spowodowane zjawiskami molekularnymi, niezauważalnymi zmianami wielkości wpływających itd. i opisywane procesami losowymi o wartości oczekiwanej równej zero (wariancja może zależeć od wielkości wpływających).

Według klasycznej interpretacji błędów stosuje się procedurę wzorcowania $\varphi_0 = F_0^{-1}$, przez co wzory

$$x^* = \varphi_0(y_0) = x. \quad (120)$$

$$x^* = \varphi_0(y_0 + \Delta y_0) = x + \Delta_w \quad (121a)$$

$$x^* = \varphi_0(y_0 + \Delta y_0 + \Delta x_d) = x + \Delta_w + \Delta_d \quad (121b)$$

$$x^* = \varphi_0(y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_n) = x + \Delta_w + \Delta_n \quad (121c)$$

definiują kolejno: wartość poprawną wielkości mierzonej, błąd wzorcowania, błąd dodatkowy, błąd niestałości. Jeżeli procedura φ_0 jest funkcją różniczkowalną, to definicje błędów można zastąpić wzorami przybliżonymi:

$$\Delta_w = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Delta y_0 = h_0(x), \quad (122a)$$

$$\Delta_d = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Delta y_d = h(x_1, \dots, x_{m-1}, x), \quad (122b)$$

$$\Delta_n = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \Delta y_n = h(x, T) + g(x_1, \dots, x_m) \{ \varepsilon \} \quad (122c)$$

Według zaleceń pkt. 4.4 należy zastosować procedurę φ , która eliminuje błędy wzorcowania i dodatkowe oraz systematyczną składową błędu niestałości^{x)}.

Procedura taka daje wynik

$$x^* = \varphi(y) = \varphi(y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_d + \Delta y_n) = x + g(x_1, \dots, x_m, T) \{ \varepsilon \} \quad (123)$$

Praktycznie z różnych względów stosuje się uproszczoną procedurę wzorcowania φ_1 taką, że

$$x^* = \varphi_1(y) = x + h(x_1, \dots, x_m, T) + g(x_1, \dots, x_m, T) \{ \varepsilon \} \quad (124)$$

Ze wzorów (124), (123) można teoretycznie wyznaczyć błąd systematyczny $h(x_1, \dots, x_m, T)$, gdy procedury wzorcowania φ , φ_1 są znane oraz model (117) dostatecznie dokładnie opisuje właściwości SP.

Z przedstawionych wzorów wynika, że istnieje poszukiwany model błędu systematycznego oraz że model ma charakter zależności stochastycznej wrażeń błędów przypadkowych. Złożoność modeli błędów i trudności jego usta-

^{x)} Stosuje się także procedury $\varphi_1 = \varepsilon[\varphi(y)]$ lub $\varphi_2 = \varphi[\varepsilon(y)]$ zawierające wariancję g^2 składnika losowego. Symbolem ε oznaczono operator uśredniania (N realizacji lub w czasie Δt).

lenia prowadzą dość często do arbitralnego ustalenia modelu. Założenie znajomości modelu z dokładnością do współczynników są w metodzie regresji znaczenie formalne. Defekt strukturalny modelu powoduje kwalifikację tego defektu do błędu przypadkowego, podczas gdy jest on z natury błędem systematycznym. Ponadto założenie modelu określa liczbę więzów niezbędnych do wyznaczenia wartości współczynników i niedziar stopni swobody, które można wykorzystać do wyznaczenia wariancji składnika losowego i przedziałów ufności.

5.2. Skorelowanie współczynników modelu błędów

W metrologii zwykle model błędu upraszcza się do procesu jednowymiarowego $\{\Delta\} = \{\Delta(x)\}$ przyjmując stałe wartości pozostałych współrzędnych. W ten sposób modeluje się:

- błąd podetawowy, x jest wielkością mierzoną,
- błędy dodatkowe, x jest jedną z wielkości wpływających $x_1, (i = 1, \dots, m-1)$,
- błąd niestałości, x jest czasem eksploatacji T systemu pomiarowego.

Do modelowania najczęściej stosuje się wielomiany algebraiczne lub ortogonalne. Gdy modelem jest wielomian

$$W_q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_qx^q, \quad (125)$$

to w przypadku błędu wzorcowania stopień wielomianu $q > 2$, a dla pozostałych błędów $q = 1$ lub 2 .

W estymacji błędów strona obliczeniowa, właściwości estymatorów i interpretacje wyników z punktu widzenia statystyki matematycznej są dobrze znane [23], [24]. Nie ma potrzeby powtarzać zasad i właściwości metody regresji. Aplikacyjna strona zdaniem autora jest bardziej złożona niż można było oczekiwać, przez co zastosowane metody analizy błędów nie są stosowane powszechnie. Brak publikacji może świadczyć o tym, że złożoności te nie są w pełni uświadomiane. Przyczynami złożoności są: nieetecjenarność błędów i skorelowanie współczynników modelu. Zagadnienia to będą przedstawione dla błędu podetawowego, ce nie zmieniają ogólności wyników.

W warunkach odniesienia charakterystyka SP $y_0 = F_0(x)$ (118a) jest liniowa lub bardziej złożona, ogólnie

$$y_0 = \phi_0(a_1, \dots, a_k) + \phi_1(a_1, \dots, a_k)x + \dots + \phi_q(a_1, \dots, a_k)x^q, \quad (126)$$

przy czym przynajmniej jeden ze współczynników ϕ_r ($r = 1, 2, \dots, q$) musi być różny od zera.

Różniczka zupełna wielkości y_0 wynosi:

$$\Delta y_0 = \sum_{r=0}^q x^r \sum_{j=1}^k \frac{\partial \phi_r}{\partial a_j} \Delta a_j. \quad (127)$$

Z procedury wzorcowania np. Lp. 1 w tabelicy 2 wynika, że

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial y_0} = c_1 \quad (128)$$

lub dla Lp. 2 jest to bardziej złożone funkcje. Dla najprostszej procedury zamiast (127), podobnie jak (122a), można napisać:

$$\Delta_0(x) = c_1 \sum_{r=0}^q \sum_{j=1}^k x^r \frac{\partial \phi_r}{\partial a_j} \Delta a_j. \quad (129)$$

Po podstawieniu

$$b_{rj} = c_1 a_{j0} \frac{\partial \phi_r}{\partial a_j}, \quad (130a)$$

$$u_j = \frac{\Delta a_j}{a_{j0}}, \quad (130b)$$

$$b_r = \sum_{j=1}^k b_{rj} u_j \quad (130c)$$

otrzymuje się:

$$\Delta_0(x) = \sum_{r=0}^q x^r \sum_{j=1}^k b_{rj} u_j = \sum_{r=0}^q b_r x^r. \quad (131)$$

Współczynniki modelu błędów b_r , ($r = 0, 1, \dots, q$) są zmiennymi losowymi, przy czym zmienne b_r , b_s , ($r, s = 0, 1, \dots, q$) są skorelowane. Dowód tego stwierdzenia jest następujący. Niektóre ze współczynników b_{rj} , b_{sj} przyjmują wartości zero, przez co zmienne b_r ma $k_r \leq k$ składowych, a zmienne b_s składowych $k_s \leq k$, n spośród k zmiennych u_j występuje w b_r i b_s i oznacza się je z_j . Pozostałe zmienne u_j od $n+1$ do k_r oznacza się v_j , a od $n+1$ do k_s oznacza się w_j . Wprowadzając te oznaczenie składowe współczynników modelu b_r , b_s można zapisać następująco:

$$b_r = \sum_{j=1}^n b_{rj} z_j + \sum_{j=n+1}^{k_r} b_{rj} v_j \quad (132a)$$

$$b_s = \sum_{j=1}^n b_{sj} z_j + \sum_{j=n+1}^{k_s} b_{sj} w_j \quad (132b)$$

Gdy poszczególne zmienne mają wartości przeciętne równe zero, zmienne z_j, v_j, w_j nie są między sobą skorelowane, to współczynnik korelacji współczynników b_r, b_s jest równy:

$$\rho_{rs} = \frac{E(b_r b_s)}{\sigma_r \sigma_s} = \frac{\sum_{j=1}^n b_{rj} b_{sj} z_j^2}{\sqrt{\left[\sum_{j=1}^n b_{rj}^2 z_j^2 + \sum_{j=n+1}^{k_r} b_{rj}^2 v_j^2 \right] \left[\sum_{j=1}^n b_{sj}^2 z_j^2 + \sum_{j=n+1}^{k_s} b_{sj}^2 w_j^2 \right]}} \quad (133)$$

Wartość ρ_{rs} zależy od konkretnych danych. Dla zilustrowania związku b_r, b_s można przyjąć jednakowe wartości współczynników b_{rj}, b_{sj} oraz jednakowe wariancje zmiennych z_j, v_j, w_j , a wówczas [25]

$$\rho_{rs} = \frac{n}{\sqrt{k_r k_s}} \quad (134)$$

Jako przykład przedstewione będą uproszczone modele analizatorów gazu: termokonduktometrycznego i termomagnetycznego. W analizatorze termokonduktometrycznym równanie bilansu ciepła opisujące drugi stopień przetwarzania wg ryc. 11 ma postać:

$$Q_{\text{dost}} = Q_p + Q_R = Q, \quad (135)$$

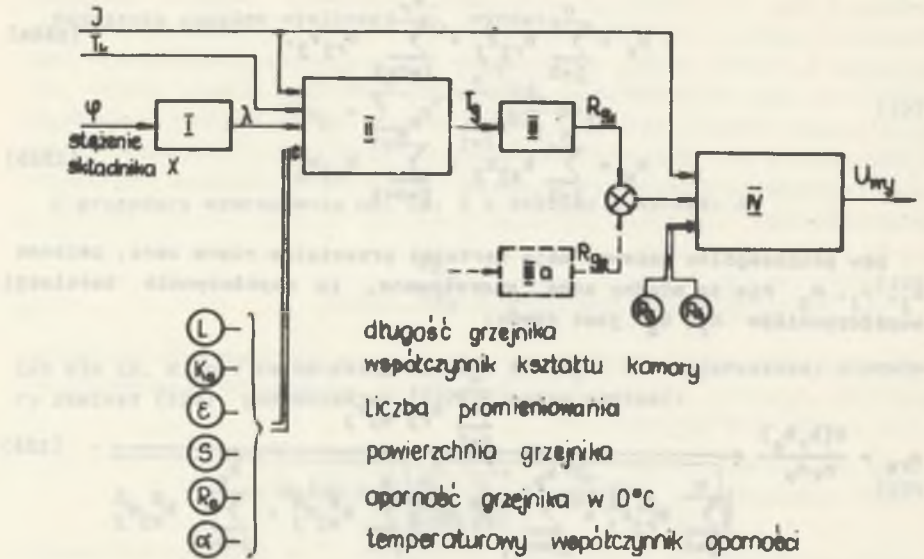
gdzie poszczególne składniki oznaczają:

- moc dostarczana do grzejnika

$$Q_{\text{dost}} = I^2 R_0 (1 + \alpha T_g) \quad (135a)$$

- straty ciepła przez przewodzenie

$$Q_p = L K_0 \lambda (T_g - T_k) \quad (135b)$$



Rys. 11. Schemat strukturalny analizatora termokonduktometrycznego i oznaczenia parametrów konstrukcyjnych stopnia II

- straty ciepła przez promieniowanie

$$Q_R = 4\epsilon S \left[\left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_k}{100} \right)^4 \right]. \quad (135c)$$

Wielkościami wpływającymi są: prąd grzejnika I oraz temperatura komory T_k . Wielkością wyjściową tego stopnia przetwarzania jest temperatura grzejnika T_g . λ jest wielkością mierzoną. Pozostałe wielkości są parametrami konstrukcyjnymi (σ - stała Boltzmanna) ponumerowanymi w tablicy 3 i objaśnionymi na rys. 11. Pomijając stopnie przetwarzania I, III, IV^{x)} zmiany punktu zerowego można wyrazić następująco:

$$dT_g = M \left[\frac{dL}{L} + \frac{Q_p}{Q} \frac{dK_0}{K_0} + \frac{Q_R}{Q} \left(\frac{d\epsilon}{\epsilon} + \frac{dS}{S} \right) - \frac{dR_0}{R_0} - \frac{\alpha T_g}{1 + \alpha T_g} \frac{d\alpha}{\alpha} \right]. \quad (136)$$

^{x)} Powodują to pominięcie niektórych parametrów konstrukcyjnych, np. oporników stałych układu mostkowego.

Odpowiednio zmiany czułości II stopnia wyraża wzór

$$d\left(\frac{dT_g}{dT_g}\right) = M \frac{Q_p}{Q} \left[\frac{dL}{L} + \frac{dK_0}{K_0} \right]. \quad (137)$$

Po uwzględnieniu danych liczbowych z tabelicy 3 obliczona wg wzoru (133) wartość współczynnika korelacji wynosi $\rho_{01} \approx 0,8$.

Tabelica 3

Oznaczenie parametrów konstrukcyjnych i wartości czułości na zmianę tych parametrów

j	1	2	3	4	5	6
u_j	$\frac{dL}{L}$	$\frac{dK_0}{K_0}$	$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$	$\frac{dS}{S}$	$\frac{dR_0}{R_0}$	$\frac{d\alpha}{\alpha}$
b_{0j}	1	$\frac{Q_p}{Q}$	$\frac{Q_R}{Q}$	$\frac{Q_R}{Q}$	-1	$-\frac{\alpha T_g}{1 + \alpha T_g}$
	1	0,9	0,1	0,1	-1	-0,5
b_{1j}	$\frac{Q_p}{Q}$	$\frac{Q_p}{Q}$	0	0	0	0
	0,9	0,9	0	0	0	0

W analizatorach termomagnetycznych równanie bilansu ciepła ma postać:

$$Q_{dost} = Q_R + Q_P + Q_T + Q_M = Q. \quad (138)$$

gdzie oprócz składników (135a-c) występują:

- straty ciepła przez konwekcję termiczną

$$Q_T = LK\lambda(T_g - T_k)(GrPr)^a. \quad (138a)$$

- straty ciepła przez konwekcję termomagnetyczną

$$Q_M = LB\lambda(T_g - T_k)(H \text{ grad } H)^b \frac{(T_g + T_k)}{\rho_0 T_k^2} \varphi c(GrPr)^b. \quad (138b)$$

Wielkości a, b, c są stałymi współczynnikami. Wielkości λ , ρ_0 , Gr, Pr oznaczają odpowiednio przewodność cieplną gazu, gęstość, liczby Grashofa i Prandtla traktowane jako wielkości wpływające; φ jest stężeniem tlenu (wielkość mierzona), H - natężeniem pola magnetycznego i grad H je-

Tablica 4

Oznaczenie parametrów konstrukcyjnych termomagnetycznego analizatora tlenu i czułości na te parametry

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_j	$\frac{dL}{L}$	$\frac{dK_0}{K_0}$	$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$	$\frac{dS}{S}$	$\frac{dR_0}{R_0}$	$\frac{d\alpha}{\alpha}$	$\frac{dK}{K}$	$\frac{dB}{B}$	$\frac{dH}{H}$	$\frac{d \text{ grad H}}{\text{grad H}}$
b_{0j}	1	$\frac{Q_p}{Q}$	$\frac{Q_R}{Q}$	$\frac{\theta_R}{Q}$	-1	$\frac{-\alpha T}{1 + \alpha \frac{1}{g}}$	$\frac{Q_T}{Q}$	$\frac{Q_M}{Q}$	$\frac{Q_M}{Q}$	$\frac{Q_M}{Q}$
	1	0,75	0,15	0,15	-1	-0,6	0,07	0,03	0,03	0,03
b_{1j}	$\frac{Q_M}{Q}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{Q_M}{Q}$	$\frac{Q_M}{Q}$	$\frac{Q_M}{Q}$
	0,03	0	0	0	0	0	0	0,03	0,03	0,03

go gradientem. Po oznaczeniu wielkości jak w tablicy 4 i podobnym przeliczeniu wg wzoru (133) współczynnik korelacji między punktem zerowym a czułością wynosi $\rho_{01} \approx 0,3$.

W powyższych obliczeniach uwzględniono potencjalnie możliwe źródła błędów bez weryfikacji, czy są nimi w rzeczywistości oraz założono, że odchylenie standardowe zmiennych losowych Δa_j ($j = 1, \dots, k$) jest dla wszystkich jednakowe, np. 1%. Stąd obliczenia mają charakter teoretyczny i służą wykazaniu, że składniki błędów mogą być skorelowane i to w różnym stopniu. Aby obliczenia były ścisłe, należy w sposób doświadczalny ustalić rzeczywiste źródła błędów niestałości oraz ich charakterystyki statystyczne, tzn. co najmniej wariancję. Czułości wielkości wyjściowej na poszczególne źródła błędów i współczynniki korelacji wynikają z modelu matematycznego wyprowadzonego teoretycznie lub wyznaczonego doświadczalnie.

5.3. Estymacja błędów w warunkach skorelowania współczynników modelu

Konsekwencje skorelowania współczynników modelu są różne odnośnie do składników błędu. Ponieważ wg wzoru (66) Δa_j w warunkach odniesienia są dwa składniki (składnik $\Delta a_{jd} = 0$)

$$\Delta a_j = \Delta a_{j0} + \Delta a_{jn}, \quad (139)$$

więc podstawiając (139) do wzoru (129) po oznaczeniach

$$g_{rj} = c_{1j} \frac{\partial \hat{y}}{\partial a_j}, \quad (140a)$$

$$G_j^2 = \text{var} \Delta e_{jn} \quad (140b)$$

$$\xi_j = \frac{\Delta e_{jn}}{G_j} \quad (140c)$$

i zastosowaniu oznaczeń (130) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta_0(x) \right\} &= \Delta_w(x) + \left\{ \Delta_n(x) \right\} = \\ &= b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q + g_0 \left\{ \xi_0 \right\} + g_1 x \left\{ \xi_1 \right\} + \dots + g_q x^q \left\{ \xi_q \right\} = \\ &= h(x) + g(x) \left\{ \xi \right\}. \end{aligned} \quad (141)$$

Obliczenie $g(x)$ jest bardziej złożone wobec skorelowania współczynników, mianowicie jest

$$g_r \left\{ \xi_r \right\} = \sum_{j=1}^k g_{rj} \left\{ \xi_j \right\}. \quad (142a)$$

$$g_r^2 = \sum_{j=1}^k g_{rj}^2. \quad (142b)$$

Gdy $q = 1$, to

$$g^2(x) = g_0^2 + 2g_0g_1x\rho_{01} + g_1^2x^2. \quad (143)$$

a gdy $q = 2$

$$g^2(x) = g_0^2 + g_1^2x^2 + g_2^2x^4 + 2g_0g_1x\rho_{01} + 2g_0g_2x^2\rho_{02} + 2g_1g_2x^3\rho_{12} \quad (144)$$

itd.

Współczynniki korelacji ρ_{rs} wyrażają skorelowanie zmiennych losowych ξ_r, ξ_s wyrażonych wzorem (142a), tzn. skorelowanie wynikające z zależności ϕ_r, ϕ_s (126) od parametrów konstrukcyjnych.

Wzór (141) wyrażający błąd podstawowy wyraźnie wskazuje niestacjonarność błędu, gdy choć jeden ze współczynników b_r, g_r ($r = 1, \dots, q$) jest różny od zera. Niestacjonarność procesu błędu spowodowana zależnością wartości oczekiwanej błędu od wartości argumentu x (tzn. $h(x)$) nie jest komplikacją, gdyż właściwość taka tkwi w założeniach metody regresji. Zależność wariancji błędu przypadkowego $g^2(x)$ od argumentu x jest również oznaką niestacjonarności. Właściwość ta poważnie komplikuje stosowanie metody regresji do wyznaczenia błędu systematycznego $h(x)$. Jednym z

założeń metody regresji jest stała wariancja składnika losowego. Zełożenie to można ominąć przekształcając model błędów do postaci

$$\left\{ \mu(x) \right\} = u(x) + \left\{ \eta \right\} \quad (145)$$

przez przekształcenie

$$\mu(x) = \frac{\Delta_0(x)}{g(x)}, \quad (146a)$$

$$u(x) = \frac{h(x)}{g(x)}, \quad (146b)$$

$$\left\{ \eta \right\} = \left\{ \varepsilon \right\} \quad (146c)$$

Warunkiem przekształcenia (146) jest znajomość $g(x)$. Wskutek skorelowania współczynników g_r opisujących zależność $g(x)$ między sobą wyznaczenie $g(x)$ jest pracochłonne. Jako przykład przyjmuje się $q = 1$, przez co model błędu ma postać:

$$h(x) = b_0 + b_1 x, \quad (147a)$$

$$g(x) \left\{ \varepsilon \right\} = g_0 \left\{ \varepsilon_0 \right\} + g_1 x \left\{ \varepsilon_1 \right\}. \quad (147b)$$

Model powyższy ma 2 stopnie swobody, przez co niezbędne są co najmniej 2 punkty x : x_a , x_b do wyznaczenia współczynników. Wyniki liczbowe badań można opisać analitycznie modelem

$$\left\{ \Delta(x_a) \right\} = h_a + g_a \left\{ \varepsilon_a \right\} \quad (148a)$$

$$\left\{ \Delta(x_b) \right\} = h_b + g_b \left\{ \varepsilon_b \right\}. \quad (148b)$$

Ponieważ

$$E \left\{ \Delta(x_a) \right\} = \hat{h}_a; \quad E \left\{ \Delta(x_b) \right\} = \hat{h}_b \quad (149)$$

oraz z modelu (141) wynika

$$E \left\{ \Delta(x_a) \right\} = b_0 + b_1 x_a; \quad E \left\{ \Delta(x_b) \right\} = b_0 + b_1 x_b. \quad (150)$$

więc porównanie powyższych wzorów jest następujące:

$$\hat{h}_a = b_0 + b_1 x_a. \quad (151a)$$

$$\hat{h}_b = b_0 + b_1 x_b \quad (151b)$$

i prowadzi do wyniku

$$\hat{b}_0 = \frac{x_b \hat{h}_a - x_a \hat{h}_b}{x_b - x_a}, \quad (152a)$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{h}_b - \hat{h}_a}{x_b - x_a}. \quad (152b)$$

Podobnie można przedstawić składowe losowe błędów

$$g_a \{ \varepsilon_a \} = \{ \Delta(x_a) \} - \hat{h}_a, \quad (153a)$$

$$g_b \{ \varepsilon_b \} = \{ \Delta(x_b) \} - \hat{h}_b. \quad (153b)$$

Funkcje korelacji z uwzględnieniem uwarunkowań czasowych realizacji błędów wynoszą:

$$K_a(\tau) = E \left[g_a \{ \varepsilon_{at} \} \cdot g_a \{ \varepsilon_{a(t+\tau)} \} \right] = \hat{g}_a^2 \hat{\rho}_a(\tau), \quad (154a)$$

$$K_b(\tau) = E \left[g_b \{ \varepsilon_{bt} \} g_b \{ \varepsilon_{b(t+\tau)} \} \right] = \hat{g}_b^2 \hat{\rho}_b(\tau), \quad (154b)$$

$$R_{ab}(\tau) = E \left[g_a \{ \varepsilon_{at} \} g_b \{ \varepsilon_{b(t+\tau)} \} \right] = \hat{g}_a \hat{g}_b \hat{\rho}_{ab}(\tau). \quad (154c)$$

Dla modelu (147b) otrzymuje się w punktach x_a, x_b

$$\begin{aligned} K(\tau) &= E \left\{ \left[g_0 \{ \varepsilon_{0t} \} + g_1 x \{ \varepsilon_{1t} \} \right] \left[g_0 \{ \varepsilon_{0(t+\tau)} \} + g_1 x \{ \varepsilon_{1(t+\tau)} \} \right] \right\} = \\ &= g_0^2 \hat{\rho}_0(\tau) + 2g_0 g_1 x \hat{\rho}_{01}(\tau) + g_1^2 x^2 \hat{\rho}_1(\tau). \end{aligned} \quad (155)$$

Porównania wzorów (155) rozpisanych dla x_a, x_b oraz (154) daje układ równań:

$$g_0^2 \hat{\rho}_0(\tau) + 2g_0 g_1 x_a \hat{\rho}_{01}(\tau) + g_1^2 x_a^2 \hat{\rho}_1(\tau) = \hat{g}_a^2 \hat{\rho}_a(\tau), \quad (156a)$$

$$g_0^2 \hat{\rho}_0(\tau) + 2g_0 g_1 x_b \hat{\rho}_{01}(\tau) + g_1^2 x_b^2 \hat{\rho}_1(\tau) = \hat{g}_b^2 \hat{\rho}_b(\tau), \quad (156b)$$

$$g_0^2 \hat{\rho}_0(\tau) + g_0 g_1 (x_a + x_b) \hat{\rho}_{01}(\tau) + g_1^2 x_a x_b \hat{\rho}_1(\tau) = \hat{g}_a \hat{g}_b \hat{\rho}_{ab}(\tau). \quad (156c)$$

którego rozwiązaniem jest

$$\hat{g}_{00}^2(\tau) = \frac{x_a \hat{g}_b^2(\tau) - 2x_a x_b \hat{g}_a \hat{g}_b(\tau) + x_b \hat{g}_a^2(\tau)}{(x_b - x_a)^2}, \quad (157a)$$

$$\hat{g}_{11}^2(\tau) = \frac{\hat{g}_a^2(\tau) - 2\hat{g}_a \hat{g}_b(\tau) + \hat{g}_b^2(\tau)}{(x_b - x_a)^2}, \quad (157b)$$

$$\hat{g}_{01}^2(\tau) = - \frac{x_a \hat{g}_b^2(\tau) - (x_a + x_b) \hat{g}_a \hat{g}_b(\tau) + x_b \hat{g}_a^2(\tau)}{(x_b - x_a)^2}. \quad (157c)$$

Powyższe wzory znacznie się upraszczają, gdy $x_a = 0$. Wówczas otrzymuje się:

$$\hat{b}_0 = \hat{h}_a, \quad (158a)$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{h}_b - \hat{h}_a}{x_b} \quad (158b)$$

oraz

$$\hat{g}_{00}^2(\tau) = \hat{g}_a^2(\tau), \quad (159a)$$

$$\hat{g}_{11}^2(\tau) = \frac{\hat{g}_b^2(\tau) - 2\hat{g}_a \hat{g}_b(\tau) + \hat{g}_a^2(\tau)}{x_b^2}, \quad (159b)$$

$$\hat{g}_{01}^2(\tau) = \frac{\hat{g}_a \hat{g}_b(\tau) - \hat{g}_a^2(\tau)}{x_b}. \quad (159c)$$

Wariancje i statyczny współczynnik korelacji wyznaczą się dla warunku $\tau = 0$, mianowicie:

$$\hat{g}_0^2 = \hat{g}_a^2, \quad (160a)$$

$$x_b^2 \hat{g}_1^2 = \hat{g}_b^2 - 2\hat{g}_a \hat{g}_b + \hat{g}_a^2, \quad (160b)$$

$$x_b \hat{g}_{01} = \hat{g}_a \hat{g}_b - \hat{g}_a^2. \quad (160c)$$

Należy tutaj zwrócić uwagę, że brak korelacji między procesami $\{\varepsilon_0\}$ i $\{\varepsilon_1\}$ implikuje warunek

$$\rho_{ab} = \frac{g_a}{g_b} \quad (161)$$

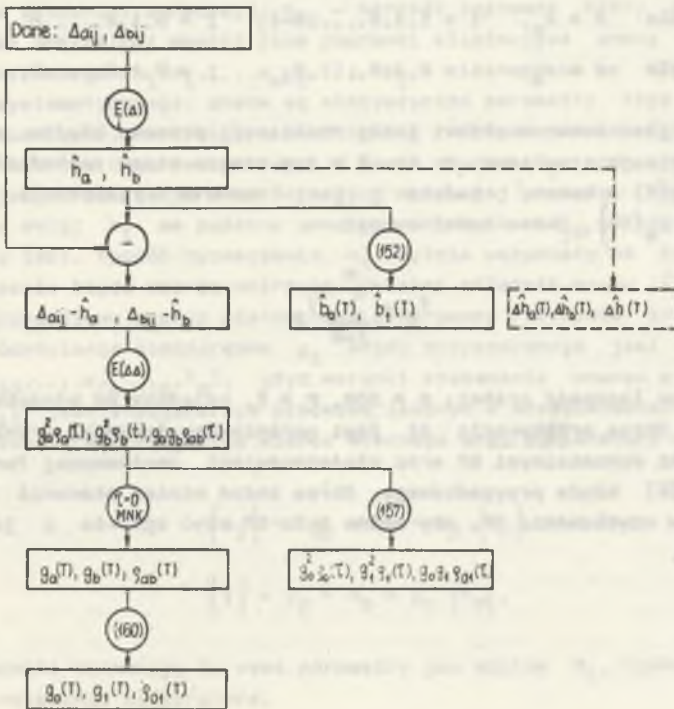
który równanie (160b) zmienia na

$$x_b^2 \hat{\theta}_1^2 = \hat{\theta}_b^2 - \hat{\theta}_a^2 \quad (162)$$

W przypadku silnego skorelowania tych procesów, gdy $\rho_{01} = 1$, to zamiast (160b) obowiązuje

$$x_b \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_b - \hat{\theta}_a \quad (163)$$

Schemat obliczenia charakterystyk błędu wg wyprowadzonych powyżej wzorów podano na rys. 12.



Rys. 12. Schemat obliczenia charakterystyk błędu o dwóch skorelowanych źródłach

Powyższe wzory szerzej interpretując zagadnienie skorelowanie współczynników modelu (141), gdyż zawierają uwarunkowania czasowe dla metodyki ich wyznaczenia. Wiadomo, że nie można równocześnie zmierzyć błędów dla dwóch wartości wielkości mierzonej. W niektórych SP ze względu na własności dynamiczne odstęp czasu między kolejnymi realizacjami błędów jest znaczny. Przedstawione wzory pozwalają te uwarunkowania uwzględnić.

W celu zbadania stacjonarności błędów w czasie eksploatacji błędy winno wyznaczyć się dla kilku realizacji czasu T_0, T_1, \dots, T_M . Znając estymatory $b_0, \dots, b_q, g_0, \dots, g_r, p_{r0}$ w okresach T_0, T_1, \dots, T_M można wyznaczyć funkcje $b_r(T), g_r(T), (r = 0, 1, \dots, q)$, ich przedziały ufności oraz można prognozować ich dalszy przebieg. Dane te są podstawą procedur wzorcowania z korekcją zmian właściwości SP w czasie eksploatacji (np. Lp. 5 tabl. 2). Zagadnienie to przedstawione jest w pracy Olaszowskiej [26], przy czym Olaszowska do modelowania błędów zastosowała szereg czasowy [27].

Program badań błędów mierzący do wyznaczenia modelu (141) winien być następujący. Dla stałych wartości x_a, x_b w warunkach odliczenia sierzy się błąd z okresem próbkowania Δt . Wynikiem jest następujący ciąg realizacji błędów:

$$\Delta_{a1j} \quad \text{dla} \quad x = x_a, \quad i = 1, 3, 5, \dots, M-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots, M,$$

$$\Delta_{b1j} \quad \text{dla} \quad x = x_b, \quad i = 2, 4, 6, \dots, N; \quad j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Indeks i jest numerem próbki j -tej realizacji procesu błędów, przy czym jedna realizacja trwa czas $M \Delta t$ i w tym czasie winno zachodzić $g(T) = \text{const}, h(T) = \text{const}$. Indeks j jest numerem realizacji procesów $\{\Delta_a(T)\}, \{\Delta_b(T)\}$. Okres badań wynosi

$$T_B = \sum_{j=0}^M T_j.$$

Minimalna liczność próbek: $N \geq 200, M \geq 5$, zależnie od właściwości badanego SP. Okres próbkowania Δt jest ograniczony techniką przełączenia, własnościami dynamicznymi SP oraz właściwościami unormowanej funkcji korelacji $\rho(\tau)$ błędów przypadkowych. Okres badań winien stanowić rozsądną część czasu użytkowania SP, aby można była SP użyć zgodnie z jego przeznaczeniem.

6. ZASTOSOWANIA MODELU BŁĘDÓW

6.1. Ocena błędów przy propagacji wzorców

Przeniesienie miary wzorca pierwotnego na wzorzec wtórny, a także miary wzorców na przyrządy pomiarowe obarczone jest błędem. Proponowany powyżej model błędu w postaci wielowymiarowego, niestacjonarnego procesu losowego pozwala w prosty sposób określić błąd wzorca wtórnego, gdy znane są błędy wzorca pierwotnego, błędy komparatora oraz procedura dokonywania porównań. Niech własności metrologiczne wzorca pierwotnego opisuje model

$$\{w_1\} = w_{10} + h_1 + g_1 \{\varepsilon_1\}, \quad (164)$$

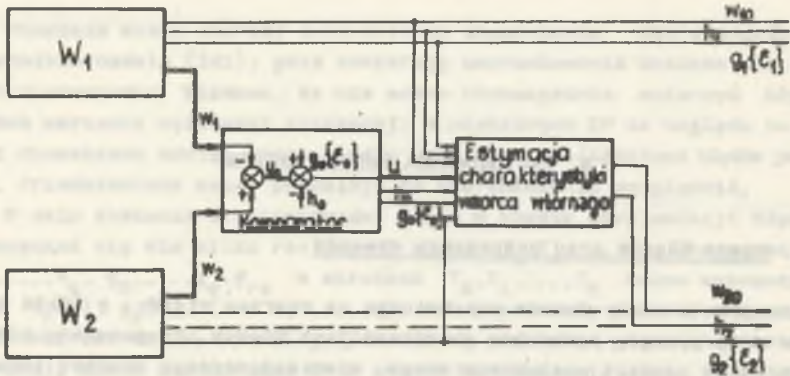
którego składniki oznaczają: w_{10} - wartość poprawna miary wzorca równa wartości nominalnej wzorca plus poprawki eliminujące znaną część błędu systematycznego $h_1(x_1, \dots, x_{m-1}, T)$; h_1 - nieznaną co do wartości część błędu systematycznego; znane są statystyczne parametry tego błędu: wartość oczekiwana, wariancja i ewentualnie rozkład prawdopodobieństwa dla zbioru wzorców tego samego typu. W danym wzorcu w_1 urzeczywistniona została jedna realizacja o stałej, lecz nieznannej wartości błędu h_1 . Fizycznie tutaj h_1 ma podobny sens jak składnik Δ_{j0} parametru konstrukcyjnego (66). Sposób wyznaczenia h_1 będzie oczywisty na końcu wywodu o wyznaczeniu błędu wzorca-wtórnego. Ostatni składnik wzoru (164) oznacza błąd przypadkowy wzorca pierwotnego generowany fizycznie przez ten wzorzec. Odchylenie standardowe g_1 błędu przypadkowego jest stałe $g_1 = g_1(x_{10}, \dots, x_{(m-1)0}, T_0)$, gdyż warunki stosowania wzorca winny być stałe. $\{\varepsilon_1\}$ jest stacjonarnym procesem losowym o właściwościach (82).

Własności metrologiczne wzorca wtórnego oraz komparatora wyrażają wzory:

$$\{w_2\} = w_{20} + h_2 + g_2 \{\varepsilon_2\}, \quad (165)$$

$$\{y\} = y_0 + h_0 + g_0 \{\varepsilon_0\}, \quad (166)$$

a składniki oznaczają te same parametry jak wzorca w_1 . Symbolem y oznaczone wskazanie komparatora.



Rys. 13. Schemat propagacji miary i błędów wzorca pierwotnego na wzorec wtórny

Dla układu komparacji jak na rys. 13 równanie pomiaru ma postać przybliżoną

$$\{w_2\} = \{w_1\} + \{y\}, \quad (167)$$

a po uwzględnieniu błędów

$$w_{20} + h_2 + g_2\{\epsilon_2\} = w_{10} + h_1 + g_1\{\epsilon_1\} + y_0 + h_0 + g_0\{\epsilon_0\}. \quad (168)$$

Wartość nominalna miary wzorca wtórnego określone jest przez równanie

$$w_{20} = w_{10} + y = w_{10} + y_0 + h_0 + g_0\epsilon_0. \quad (169)$$

co oznacza, że miara wzorca wtórnego obliczona jest błędem komparatora. Wartość poprawną miary wzorca wtórnego określa równanie:

$$w_{20} \text{ popr} = w_{10} + y_0. \quad (170)$$

W równaniu (168) chcemy wyznaczyć $w_{20} = w_{20} \text{ popr}$, ale jest to niemożliwe wskutek nieznaności $h_0, g_0\epsilon_0$. Dlatego różnicę $w_{20} - w_{20} \text{ popr}$ charakteryzuje niepewność h_2 miary wzorca wtórnego, którą należy wyznaczyć.

Błąd przypadkowy wzorca wtórnego wyznacze się oddzielnie, w inny sposób [28], dlatego tutaj można założyć, że odchylenie standardowe g_2 jest znane. Niepewność miary wzorca wtórnego można wyznaczyć po odjęciu równań (168) i (170), mianowicie:

$$h_2 = h_1 + h_0 + g_1\{\epsilon_1\} + g_0\{\epsilon_0\} - g_2\{\epsilon_2\}. \quad (171)$$

Równanie (171) przybiera różną postać dla różnych procedur porównania. Gdy porównuje się wzorce o zbliżonych miarach w_1 i w_2 i komparacje jest jednorazowe, to w równaniu (171) wystąpią jednorazowe realizacje procesów losowych $\{\xi_1\}$, $i = 0, 1, 2$ i równania to wyrażające błąd h_2 ma postać:

$$h_2 = h_1 + h_0 + g_1 \xi_1 + g_0 \xi_0 - g_2 \xi_2. \quad (172)$$

Niepewność miary wzorce wtórnego charakteryzują: wartość oczekiwana

$$\bar{h}_2 = E(h_2) = E(h_1 + h_0 + g_1 \xi_1 + g_0 \xi_0 - g_2 \xi_2) = \bar{h}_1 + \bar{h}_0 \quad (173)$$

i wariancja

$$\text{var}(h_2) = E[h_2 - E(h_2)]^2 = \text{var} h_1 + \text{var} h_0 + g_1^2 + g_0^2 + g_2^2. \quad (174)$$

Składniki błędów \bar{h}_1 , \bar{h}_0 , $\text{var} h_1$, $\text{var} h_0$ charakteryzują zbiór wzorców w_1 i komparatorów, natomiast wariancje g_1^2 , g_2^2 , g_0^2 podzbiory realizacji błędów przypadkowych odpowiednio wzorców w_1 , w_2 i komparatora lub zbiory wzorców i komparatorów zależnie od interpretacji wyników. Ponieważ zachodzi:

$$\{\Delta_2\} = h_2 + g_2 \{\xi_2\}, \quad (175)$$

więc

$$\bar{\Delta}_2 = \bar{h}_2 \quad (176)$$

oraz

$$\text{var} \Delta_2 = \text{var} h_2 + g_2^2 = \text{var} \Delta_1 + \text{var} \Delta_0 + 2g_2^2. \quad (177)$$

Wynik ten jest zgodny z interpretacją fizyczną. Składnik $2g_2^2$ jest skutkiem dwukrotnej realizacji błędu przypadkowego wzorca w_2 - pierwszy raz przy komparacji wzorców, drugi raz przy użytkowaniu wzorca w_2 .

Wielokrotne porównanie tych samych wzorców opisuje n równań (172) o realizacjach ξ_{ij} ($i = 0, 1, 2$; $j = 1, \dots, n$), z których po zsumowaniu i podzieleniu przez n otrzymuje się:

$$h_2 = h_1 + h_0 + \frac{1}{n} \left[g_1 \sum_{j=1}^n \xi_{1j} + g_0 \sum_{j=1}^n \xi_{0j} - g_2 \sum_{j=1}^n \xi_{2j} \right] \quad (178)$$

Charakterystyki niepewności wzorca wtórnego [29]

Lp.	Procedura porównania	Wartość oczekiwana niepewności $E(h_2)$	Wariancja niepewności $\text{var}(h_2)$	Oznaczenia
1	Miary wzorców pierwotnego i wtórnego jednakowe			
a)	Porównanie jednorazowe	$\bar{h}_1 + \bar{h}_0$	$\text{var } h_1 + \text{var } h_0 + g_1^2 + g_0^2 + g_2^2$	$\bar{h}_1 = E(h_1)$ $\bar{h}_0 = E(h_0)$
b)	Porównanie n-krotnie z tym samym wzorcem pierwotnym	$\bar{h}_1 + \bar{h}_0$	$\text{var } h_1 + \text{var } h_0 + \frac{1}{n}(g_1^2 + g_0^2 + g_2^2)$	
c)	Porównanie m-krotnie z różnymi wzorcami pierwotnymi	$E(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_{1j} + h_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{h}_{1j} + \bar{h}_0$ [1]	$\frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m \text{var } h_{1j} + \text{var } h_0 + \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^m g_{1j}^2 + \frac{1}{m}(g_0^2 + g_2^2)$	E - operacje po zbiorze elementów
d)	Porównanie n-krotnie z m różnymi wzorcami pierwotnymi	$E(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m h_{1j} + \bar{h}_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{h}_{1j} + \bar{h}_0$	$\frac{1}{m} \text{var } h_1 + \text{var } h_0 + \frac{1}{mn}(g_1^2 + g_0^2 + g_2^2)$	$h_{1j} = h_1; g_{1j} = g_1$
2	Wzorec wtórny ze siarę większą m-krotnie Porównanie jednorazowe	$E(\sum_{j=1}^m h_{1j}) + \bar{h}_0 = m\bar{h}_1 + \bar{h}_0$	$\frac{1}{m}(\text{var } h_1 + g_1^2) + \text{var } h_0 + g_0^2 + g_2^2$	$mh_1 = h_1'; g_1 = g_1'$
3	Wzorec wtórny ze siarę m-krotnie mniejszą Porównanie jednorazowe oraz s-1 porównań wzorce w_{21} z pozostałymi w_{2j}	$\frac{1}{m} \bar{h}_1 + \frac{1}{m} \bar{h}_{01} + \frac{s-1}{m} \bar{h}_0$	$\frac{1}{m^2} [\text{var } h_1 + \text{var } h_{01} + (s-1)\text{var } h_0 + (s-1)^2 g_0^2 + g_{01}^2 + g_1^2 + (3s-2)g_2^2]$	dla wzorce w_{21} dla wzorców w_{2j} nieco inaczej
4	Przeniesienie miary na przyrząd pomiarowy m k punktach z użyciem s ≥ k wzorców		$\sum_0^T M^{-1} \sum_0 (\frac{1}{m} \text{var } h_1 + \frac{1}{k} g_1^2 + \frac{1}{k} g_2^2)$	$h_0 = 0, g_0 = 0$ M - uśredniona macierz informacyjna \sum_0 - macierz współrzędnych

a stąd

$$\text{var } h_2 = \text{var } h_1 + \text{var } h_0 + \frac{1}{n}(g_1^2 + g_0^2 + g_2^2). \quad (179)$$

Równania (179) pokazują efekt zmniejszenia błędów przypadkowych przez wielokrotną komparację.

Za pomocą równania (172) można zapisać wyniki jednorzędowej komparacji wzorca wtórnego W_2 z m różnymi wzorcami pierwotnymi W_{1j} , $j = 1, \dots, m$. Wynikiem jest m -krotne zmniejszenie wariancji błędu systematycznego i przypadkowego. Wyniki obliczeń błędów przedstawiono w tabelicy 5.

Postępując podobnie można wyznaczyć niepewność miary wzorca wtórnego dla porównań jednorzędowych i wielokrotnych o różnych procedurach, w przypadkach gdy wzorec wtórny ma miarę m -krotnie większą lub m -krotnie mniejszą. Szczegółowe wyniki przedstawiono w publikacji [29], a zestawienie wyników zawiera tabela 5.

Przy przeniesieniu miary wzorców na przyrządy pomiarowe, gdy własności metrologiczne wzorców (pierwotnych) określają parametry w_{01j} , h_{1j} , g_{1j} , $j = 1, 2, \dots, m$ wg modelu (164), to w każdym punkcie wzorcowania wariancja składnika losowego obliczona z równania (172), po pominięciu błędów komparatora, wynosi:

$$s_{qj}^2 = \text{var } h_{1j} + g_{1j}^2 + g_{2j}^2, \quad (180)$$

przy czym g_2^2 jest wariancją błędu przypadkowego wzorcowanego SP w punkcie $x_j = w_{01j}$. Gdy wzorce w_{1j} mają różne niedokładności miary, gdy wzorcowanie w niektórych punktach jest powtarzane lub gdy $g_2 = g_2(x)$, to wariancja s_{qj}^2 nie jest stała. Doleża złożoność oceny błędów wynika z więzów modelu błędów.

Ocenę błędów przy wzorcowaniu SP proponuje się przeprowadzić procedurę dwuetapową [29]. Najpierw metodą najmniejszych kwadratów należy wyznaczyć charakterystykę $F_0(x)$ (126).

Po wyznaczeniu błędów $\Delta_{2j} = y_j - \hat{F}_0(x_j)$ należy w II etapie wyznaczyć $h_2(x)$ oraz $g_2(x)$. Zaleca się stosować metodę regresji II rodzaju [23] po przekształcaniu modelu $h_2(x)$ wg wzorów (146).

Zagadnienie estymacji błędów jest w tym przypadku dość złożone, gdy uwzględni się dobór rozmieszczenia punktów wzorcowania lub inne kryteria, np. na dopuszczalny rozkład błędu. Bardziej szczegółową analizę błędów wzorcowania przyrządów zawiera publikacje [29], [30].

Należy zwrócić uwagę na fakt, że powszechnie przyjmuje się błędy wzorców za pomijalnie małe. W analizie uwzględniającej błąd wzorca [31] dokonano punktowej oceny błędów wzorcowania, tzn. nie uwzględniono więzów modelu, które powodują zmniejszenie błędu oraz doboru rozmieszczenia punktów.

6.2. Algorytm 1 błędy adiuatacji SP

Adiuatację nazywa się czynnością regulacji SP sprowadzające bład do zadanej wartości, najczęściej do zera. Oznaczmy bład SP w warunkach odniesienia dla danego stanu wielkości mierzonej $x = x_n$ symbolem

$$\{\Delta_0(t)\} = g(t) \{\xi(t)\} + h(t) + r(t), \quad (181)$$

gdzie $g(t)$, $h(t)$, $\xi(t)$ opisują bład podstawowy zgodnie z modelem (81), natomiast

$$r(t) = \sum_{i=1}^N r_i \delta(t - t_i) \quad (182)$$

jest skutkiem adiuatacji SP w chwilach t_i . Symbolem t oznaczono czas realizacji błędów (i pomiarów). Wartości r_i można dobrać wg różnych algorytmów.

Algorytm 1 - adiuatacja SP wg wartości chwilowej błędu

W chwili $t = t_1$ dokonuje się korekcji wskaźników SP tak, aby wartość błędu po korekcji wynosiła zero. Z warunku tego wynika:

$$r_1 = -\Delta_0(t_1) = -g(t_1) \xi(t_1) - h(t_1). \quad (183)$$

W czasie $t > t_1$ przebieg błędu jest następujący:

$$\{\Delta_0(t)\} = g(t) \{\xi(t)\} + h(t) - g(t_1) \xi(t_1) - h(t_1). \quad (184)$$

Wartość oczekiwana błędu po korekcji wynosi:

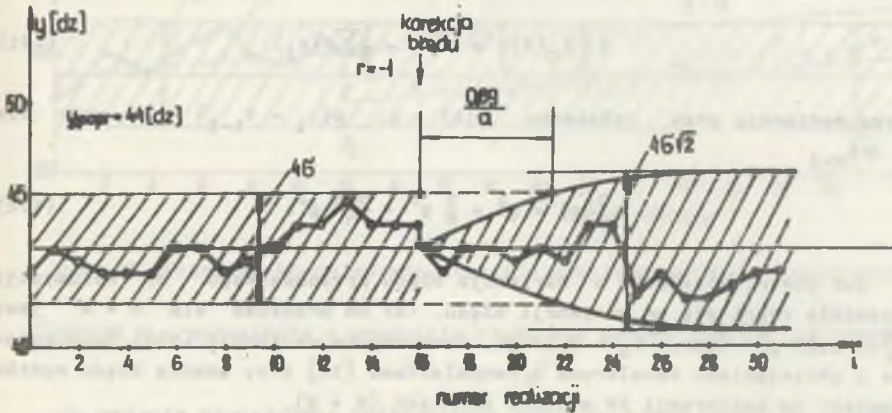
$$E \{\Delta_0(t)\} = h(t) - h(t_1) = h_{r_1}(t). \quad (185)$$

Zmienia się ona wraz ze zmianą błędu systematycznego od chwili adiuatacji. Wariancję błędu przy założeniu $g(t) = g(t_1) = g$ określa wzór

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}^2(t) &= E \left\{ [\Delta_0(t) - E\Delta_0(t)]^2 \right\} = E \left\{ [g\{\xi(t)\} - g\{\xi(t_1)\}]^2 \right\} = \\ &= g^2 - 2g^2\rho(t-t_1) + g^2 = 2g^2[1 - \rho(t-t_1)]. \end{aligned} \quad (186)$$

Wzór (186) określa, że bezpośrednio po adiuatacji, gdy $\rho(t-t_1) \approx 1$, bład przypadkowy SP jest równy zero. W miarę upływu czasu unormowana funkcja korelacji procesu $\{\xi\}$ maleje, a bład przypadkowy zwiększa się. Dla

$t - t_1 > t_{gr}$, gdy $\rho = 0$, wariancja błędu osiąga stałą wartość $2g^2$. Przebieg wariancji przedstawiono na rys. 14. Adiustacja spowodowała zmniejszenie błędu systematycznego, natomiast błąd przypadkowy $g\{\varepsilon(t)\}$ został przesunięty o przypadkową wartość $g\varepsilon(t_1)$, stąd wariancja błędu została podwojona.



Rys. 14. Przedział ufności błędu przypadkowego po adiustacji wg wartości chwilowej błędu

Adiustacja wg wartości chwilowej błędu powoduje zmniejszenie błędu przypadkowego przez okres, dla którego $\rho(t-t_1) > 0,5$. Gdy

$$\rho(t) = e^{-\alpha t}, \quad (187)$$

to okres ten wynosi:

$$T < \frac{1}{\alpha} \ln 2 = \frac{0,69}{\alpha}. \quad (188)$$

Algorytm 2 - adiustacja wg wartości średniej błędu

Przed adiustacją wyznacza się wartości błędu podstawowego w chwilach t_1 , $i = 1, 2, \dots, N$, po czym oblicza się wartość średnią i w chwili t_N dokonuje się adiustacji o wartość

$$r_N = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_0(t_1) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [g(t_1) \varepsilon(t_1) + h(t_1)]. \quad (189)$$

Po wstawieniu r_N do wzoru (181) dla $t > t_N$ widać, że bezpośrednio po adiustacji błąd nie jest równy zero, lecz ma wartość

$$\Delta_0(\tau_N) = \Delta_N + r_N = \frac{N-1}{N}(\Delta_N - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i). \quad (190)$$

(Symbolem Δ_i oznaczono błąd $\Delta_0(\tau_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, N$). Można wyznaczyć wartość oczekiwaną błędu po adiuatacji

$$E \left\{ \Delta_0(\tau) \right\} = h(\tau) - \frac{1}{N} \sum h(\tau_i) \quad (191)$$

oraz wariancję przy założeniu $g(\tau) = g$, $\varphi(\tau_i - \tau_{i-1}) = 0$ oraz dla $\tau > \tau_{N+1}$

$$\sigma_{\Delta}^2(\tau) = g^2 + \frac{1}{N} g^2 = \frac{N+1}{N} g^2. \quad (192)$$

Już dla niewielkich N wariancja błędu przypadkowego po adiuatacji niewiele różni się od wariancji błędu. Tak na przykład dla $N = 4$ jest $\sigma_{\Delta}^2 = 1,25 g^2$ (tzn. $\sigma_{\Delta} = 1,12 g$). Oszacowanie wariancji (192) jest zgodne z obliczeniami Kawalerowa i Mandelejtama [18] przy ocenie błędu wyniku pomiaru po kalibracji SP w dwóch punktach ($N = 2$).

Algorytm 3 - adiuatacja z predykcją błędu

Możliwość prognozowania błędu systematycznego SP pozwala wprowadzić taką korekcję, aby od chwili adiuatacji do pewnego czasu eksploatacji T_E błąd nie przekroczył wartości dopuszczalnej błędu oraz aby czas T_E był największy. Gdy prognozowany przebieg błędu systematycznego $h(\tau)$ jest monotoniczny, to wartość $r(T_0)$ w chwili T_0 tak należy dobrać, by

$$\left| \hat{h}(T_0) \pm \Delta \hat{h}(T_0) + r(T_0) \right| \leq h_{dop}. \quad (193)$$

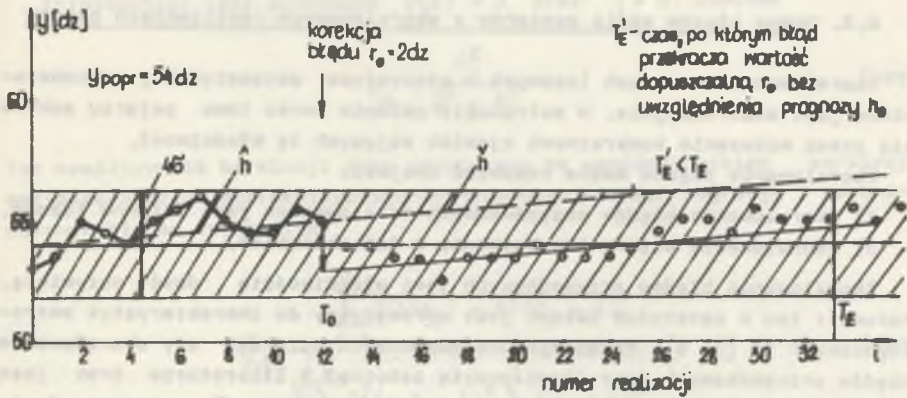
$\Delta \hat{h}(T_0)$ oznacza tutaj przedział ufności estymatora błędu $\hat{h}(T_0)$. Z warunku tego wynika

$$r(T_0) = -\hat{h}(T_0) - \sigma_{\Delta} \frac{d\hat{h}}{dT} \left[h_{dop} - \Delta \hat{h}(T_0) \right]. \quad (194)$$

Z kolei warunek

$$\left| \check{h}(T_E) \pm \Delta \check{h}(T_E) + r(T_0) \right| \leq h_{dop} \quad (195)$$

pozwała wyznaczyć czas T_E . Następna adiuatacja winna być dokonana po czasie T_E , jak pokazuje rys. 15.



Rys. 15. Przebieg błędów po adiuatacji z uwzględnieniem prognozy błędów

Algorytm 4 - adiuatacja z predykcją błędów dla całego zakresu pomiarowego
 $Z \in \langle x_d, x_g \rangle$

Na wstępie niniejszego podrozdziału założono stałą wartość wielkości mierzonej $x = x_0$. Ale błąd podstawowy zależy od x ; jest $\{\Delta_0(x, T)\}$. Zagadnienie predykcji błędów znacznie się komplikuje. Pewnym przybliżeniem jest przyjęcie, że współczynniki $b_2, \dots, b_q, g_2, \dots, g_q$ modelu błędów (141) są równe zero.

Model błędów ma postać:

$$\{\Delta_0(x, T)\} = b_0(T) + b_1(T)x + g_0(T) \{\epsilon_0\} + g_1(T)x \{\epsilon_1\}. \quad (196)$$

Uzasadnieniem takiego uproszczenia jest przyjęcie liniowej charakterystyki SP (126), a wówczas punkt zerowy $\phi_0(a_1, \dots, a_k)$ oraz czułość $\phi_1(a_1, \dots, a_k)$ stanowią źródła błędów. Parametry błędów można wyznaczyć z badań przedstawionych w podrozdziale 5.3. Dla warunku, by w przedziale czasu $\langle T_0, T_E \rangle$ błąd nie przekroczył wartości dopuszczalnej z zadanym poziomem ufności, można wyznaczyć czas T_E oraz wartość korekcji przy adiuatacji w chwili T_0 . Zagadnienie takie rozwiązała Olszewska [26] stosując do modelowania błędów szeregi czasowe. Zdaniem autora zastosowanie modelu (141) znacznie ułatwia rozwiązanie tego zagadnienia w części zawierającej identyfikację modelu błędów. Wzory do identyfikacji współczynników padane w podrozdziale 5.3.

6.3. Ocena błędów serii pomiarów o skorelowanych realizacjach błędów

Skorelowanie zmiennych losowych w statystyce matematycznej przedstawiane jest abstrakcyjnie. W metrologii nadanie sensu temu pojęciu odbywa się przez wskazanie konkretnych zjawisk mających tę właściwość.

Skorelowanie błędów można rozumieć dwojako:

- 1) skorelowanie błędów przypadkowych traktowanych jako zmiennie losowe,
- 2) skorelowanie błędów bez wnikania w ich charakter.

Skorelowanie błędów przypadkowych jest właściwością dość oczywistą. Parametr ten w ostatnich latach jest wprowadzany do charakterystyk metrologicznych SP [5, 6]. Pozostaje bez odpowiedzi pytanie, czy skorelowanie błędów przypadkowych jest właściwością istotną? W literaturze brak jest danych liczbowych. Wyrywkowe badania własne wskazują, że normowaną funkcję korelacji (82c) można modelować funkcją wykładniczą:

$$\rho(\tau) = e^{-a\tau}, \quad (197)$$

przy czym dla analizatora tlenu KTM-7 uzyskano wartość $a = 0,23$ 1/h [26], przetworniki telemetrycznego PT $a =$ kilka 1/s [32], a dla ogniw normalnych Weston $a = 0,21-1,08$ 1/min [33]. Dane te wskazują, że skorelowanie błędów przypadkowych jest istotne.

Zagadnienie skorelowania błędów całkowitych (przypadkowych i systematycznych) nie występuje w statystyce matematycznej. W metrologii też się nie pojawia, choć byłoby ono atrakcyjne ze względu na uproszczenie rachunku błędów. Idea jest następująca. Skoro współczynnik korelacji charakteryzuje zależność dwóch realizacji procesu losowego, to w skutek udziału błędu systematycznego zależność taka dla błędów zawsze istnieje, gdy błąd systematyczny jest różny od zera.

Jako miarę skorelowania błędów proponuje się wprowadzić unormowaną funkcję korelacji (91)

$$\rho_{\Delta} = \frac{\mu_{2g}(\xi) \rho(\tau) + \kappa_h(\xi)}{\sigma^2 + \sigma_h^2}. \quad (198)$$

Miejsce unormowanej funkcji korelacji $\rho(\tau)$ procesu stacjonarnego $\{\xi\}$ w tym wzorze jest odpowiednio i jednoznacznie uwzględnienie skorelowania błędów przypadkowych. Funkcja korelacji $\kappa_h(\xi)$ uwzględnia właściwość błędu systematycznego. Błąd stały $h(x) = \text{const}$ nie jest uwzględniany. Inny rozkład błędu jest charakteryzowany wariancją i kowariancją. Oznacza to, że ρ_{Δ} określa udział wariancji błędu systematycznego w wariancji błędu całkowitego, gdy $\rho(\tau) = 0$.

Interesujący jest przypadek $\rho(\tau) = 0$ oraz $\xi = 0$, wówczas

$$\rho_{\Delta} = \frac{\sigma_h^2}{\sigma^2 + \sigma_h^2}. \quad (199)$$

Ten współczynnik korelacji jest identyczny ze współczynnikiem korelacji estymatora błędu systematycznego wyznaczonego metodą regresji i zaobserwowanym błędem całkowitym

$$R_{\hat{h}\Delta}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k [\hat{h}(x_j) - \bar{h}] (\Delta_j - \bar{\Delta})}{\sqrt{\sum_{j=1}^k (\hat{h}(x_j) - \bar{h})^2 \sum_{j=1}^k (\Delta_j - \bar{\Delta})^2}}. \quad (200)$$

Wskutek więzów wynikających z metody regresji [23] wzór (200) można zastąpić wyrażeniem

$$R_{\hat{h}\Delta}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k [\hat{h}(x_j) - \bar{h}]^2}{\sum_{j=1}^k (\Delta_j - \bar{\Delta})^2} = \frac{\sigma_h^2}{\sigma_{\Delta}^2} = \frac{\sigma_h^2}{\sigma^2 + \sigma_h^2} \quad (201)$$

identyczna jak (199). Z kolei współczynnik korelacji R^2 powiązany jest ze zmienną F stosowaną w teście F - Snedecora do oceny istotności funkcji regresji [23]. Zmienną F można zastąpić współczynnikiem korelacji

$$R^2 = \frac{\frac{q}{k-q-1} F}{\frac{q}{k-q-1} F + 1} \quad (202)$$

i istotność funkcji regresji oceniać na podstawie wartości R^2 z próby. Na tej podstawie można dokonać oceny niezbędnej liczby pomiarów, aby funkcja regresji była istotna z określoną wiarygodnością [34]. Tak więc unoraowana funkcja korelacji błędu w postaci (199) jest parametrem znanym i stosowanym w statystyce matematycznej.

Skorelowanie błędów daje widoczny efekt przy ocenie błędu serii pomiarów. Niech kolejne realizacje błędów będą skorelowane, a współczynnik korelacji kolejnych realizacji wynosi odpowiednio $\rho_0 = 1, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{N-1}$. Estymatorem wartości średniej błędu serii jest:

$$\hat{\Delta}_{sr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i. \quad (203)$$

o wariancji wartości średniej błędu [35]

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \quad (204)$$

gdzie λ_{ij} są elementami macierzy kowariancji błędów $\Delta_1, \dots, \Delta_N$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \quad (205)$$

Macierz kowariancji jest symetryczna i półokreślona dodatnio, a elementy diagonalne są wariancjami poszczególnych realizacji błędów, tzn. $\lambda_{ij} = \sigma_1^2 = \sigma^2$. Współczynniki korelacji błędów Δ_i, Δ_j oznaczone się przez $\rho_{j-1} = \rho_k, k = j-1$ i wówczas macierz kowariancji ma postać:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (206)$$

Dla serii N estymator wariancji wynosi:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{N} \left(1 + 2 \frac{N-1}{N} \rho_1 + 2 \frac{N-2}{N} \rho_2 + \dots + 2 \frac{1}{N} \rho_{N-1} \right) \sigma^2 = \\ &= \frac{1}{N} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{N} \rho_k \right) \sigma^2. \end{aligned} \quad (207)$$

Zależnie od wartości ρ_k estymator wariancji zawarty jest w przedziale

$$\frac{1}{N} \sigma^2 < \hat{\sigma}_N^2 < \sigma^2. \quad (208)$$

Interpretacja wyniku (208) jest prosta. Przy błędach nieskorelowanych wariancja wartości średniej błędu jest N-krotnie mniejsze od wariancji σ^2 błędu, natomiast przy 100% korelacji nie uzyskuje się zmniejszenia błędu wartości średniej.

W przypadku $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{N-1} = \rho$ estymator wariancji jest równy:

$$\hat{\sigma}_N^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{N-1}{N}\rho\right)\sigma^2 \quad (209)$$

i w miarę zwiększenia długości serii dąży do

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_N^2 = \rho\sigma^2. \quad (210)$$

Wynik ten pokazuje, że w serii błędów skorelowanych wariancja błędu serii zmniejsza się do wariancji błędu systematycznego, gdyż ρ osiąga wartość określoną wzorem (199). Jest to znana prawda. Tak więc wzór (199) może być miarą skorelowania błędów całkowitych bez wnikania w ich naturę.

Do zadanych wartości współczynników korelacji ρ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ estymator wariancji można obliczyć ze wzoru (207). Miarą skorelowania kolejnych realizacji błędów odległych w czasie $\tau = t_j - t_1$ oraz w przestrzeni o $\xi = x_j - x_1$ jest unormowana funkcja korelacji (198). ρ_Δ interpretuje się jako właściwość serii błędów, gdy wartość błędu systematycznego w punkcie x jest nieznana, lecz błąd ten pochodzi ze zbioru $\{\Delta_s\}$ o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji σ_h^2 . Argument ξ rozumie się jako mierzalną współrzędną, którą dobiera się w serii pomiarów, np. $\xi = \tau_2 - \tau_1$ lub $\xi = x_{i2} - x_{i1}$, $i = 1, \dots, m$ (x_1 wielkość wpływająca lub wielkość mierzona). W serii pomiarów $x_{i2} - x_{i1}$ są bardzo małe, co pozwala przyjąć $\xi = 0$.

Skorelowanie błędów można objaśnić inaczej. Gdy błąd ma wariancję σ^2 i kolejne realizacje są skorelowane, to zaobserwowana zmienność realizacji będzie mniejsza niż realizacji nieskorelowanych.

Wariancja kolejnych realizacji niech wynosi:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta_i - \Delta_{\bar{r}})^2. \quad (211)$$

Po podstawieniu

$$\Delta_i - \Delta_{\bar{r}} = \Delta_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta_i - \Delta_j) \quad (212)$$

oraz

$$E(\Delta_i \Delta_j) = 2\sigma^2(1 - \rho_k) \quad (213)$$

otrzymuje się

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left[\frac{1}{N} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Delta_i - \Delta_j)^2\right] = \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{N} \rho_k\right). \quad (214)$$

Gdy $\rho_k = 0$, to otrzymuje się wariancję obserwowanych realizacji równą wariancji błędu. Dla przypadku $\rho_k = 1$ wariancja obserwowanych realizacji jest równa zero. Należy zauważyć, że unormowana funkcja korelacji ρ_Δ (199) ma wartość 1, gdy błąd przypadkowy jest pomijalnie mały. Naturalne jest, że błąd systematyczny dla $\xi = 0$ ma jedynkowe realizacje i zerową wariancję.

Dla przypadku $\rho(\tau) = 0$, $\xi = 0$ i znanej wartości współczynników korelacji, np. określonych wzorem (199), oczekiwaną wartość wariancji oblicza się ze wzoru (214). Gdy $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{N-1} = \rho$, to

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2(1 - \rho), \quad (215)$$

a podstawiając (199) otrzymuje się, że

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \left(1 - \frac{\sigma_h^2}{\sigma^2}\right) = \bar{\sigma}^2 \quad (216)$$

oczekiwana wariancja jest równa wariancji błędu przypadkowego.

Powyższe wzory uwzględniają skorelowanie błędów przypadkowych. Gdy realizacje błędu przypadkowego są skorelowane ($\rho(\tau) \neq 0$), to pierwszy składnik ρ_Δ (198) jest niezerowy, dając pokazano powyżej efekty.

7. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono tylko wybrane zagadnienia modelowania błędów eksponując zagadnienia nie występujące w literaturze. Różnorodność i złożoność pojęcia błąd systemu pomiarowego są na tyle duże, że dotychczas brak jest całościowego, szczegółowego modelu błędów. Przedstawiony model w pełni opisuje błędy analogowych i cyfrowych SP przy pomiarach wielkości stałych i zmiennych w czasie [38].

Zaproponowany w pracy model błędów systemów pomiarowych - niestacjonarny, wielowymiarowy proces losowy sprowadzalny do procesu stacjonarnego przez przekształcenia funkcyjne znacznie wzbogaca pojęcia błędu. Uwidacznia się to w tym, że:

1. Model ten w sposób jednorodny opisuje właściwości metrologiczne SP w warunkach odniesienia, w warunkach stosowania, w czasie pomiarów i w czasie eksploatacji SP. Dostosowanie modelu do warunków następuje przez założenie stałych wartości argumentów procesu losowego.

2. Model ten wprowadza w sposób naturalny daleka, nieznanne w metrologii właściwości błędu - skorelowanie realizacji błędów. Właściwość ta ma istotny wpływ na metodykę wykonywania pomiaru. Skorelowanie błędów poprzez parametry konstrukcyjne jest szeroko wykorzystane w metrologii przy okresowym badaniu przyrządów - badania są ograniczone do błędu podstawowego, a wnioski rozciągają się na inne właściwości.

3. W modelu usankcjonowano rzadko stosowane inne określenia błędów: systematycznego i przypadkowego przez włączenie wartości oczekiwanej błędu spowodowanego przyczynami losowymi (błąd przypadkowy wg niektórych określeń) do błędu systematycznego. Zwiększenie w ten sposób błędu systematycznego i zmniejszenie przypadkowego czyni większą część błędu poznawalną i możliwą do wyeliminowania. Zdefiniowanie błędów systematycznych i przypadkowych pojęciami rachunku prawdopodobieństwa ułatwia ich interpretację jako estymatorów procesu losowego i uzależnia ich właściwości od warunków estymacji.

4. W modelu wyraźnie wprowadzono pojęcie czasu - czasu pomiaru jako czasu realizacji procesu losowego i czasu eksploatacji SP. Pozwala to charakteryzować właściwości SP w różnych okresach czasu w sposób jednorodny.

5. W sposób ogólny pokazano, że model błędów wyprowadzony teoretycznie można sprowadzić do modelu proponowanego w pracy. Przykłady przedstawione są w opracowaniu niepublikowanym [37] oraz [38]. Nie można udowodnić, że proponowany model można stosować do modelowania wszystkich systemów pomiarowych i do różnych celów. Proponowany model jest ogólniejszy od in-

nych stosowanych klasycznych modeli, przez co jego przydatność winna być szersza.

W pracy przedstawiono wybrane zagadnienia ogólne niezbędne do przedstawiania błędów. I tak wprowadzono pojęcie skali fizycznej i skąjomat o niejednoznaczności odwzorowania stanu danej cechy w wartość wielkości. Odwzorowanie to jako odwzorowanie punktu w zbiór pozwala odpowiednio interpretować błąd pomiaru i błąd wnoszony przez system pomiarowy w procesie pomiaru. Założenie o takich właściwościach odwzorowania ma zdaniem autora usankcjonować intuicyjną interpretację błędu, nie wyrażaną dotąd jawnie w literaturze. Podobny charakter ma powiązanie miary Lebesgue'a zbioru z pojęciami charakteryzującymi błędy graniczne.

Zagadnieniem przedstawionym w pracy jest pojęcie procedury wzorcowania, właściwej dla SP wychyłowych [38]. Ekaponowanie znaczenie procedury wzorcowania w kształtowaniu skali pomiarowej jest istotne dla klasyfikacji i oceny błędów. W pracy pokazano odwzorowania realizowane fizycznie w SP i realizowane w dziedzinie abstrakcji, ich uwarunkowania oraz wpływ na właściwości metrologiczne SP. Zdaniem autora wprowadzenie do pracy tych zagadnień było niezbędne dla przedstawiania błędów.

LITERATURA

- [1] PUGACZEW W.S.: Teoria funkcji przypadkowych i jej zastosowanie do zagadnień sterowania automatycznego. Wyd. MON, Warszawa 1960.
- [2] SMIRNOW N.W., DUNIN BARKOWSKI I.W.: Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych. PWN, Warszawa 1969.
- [3] BENDAT J.S., PIERSOL A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.
- [4] SWIESZNIKOW A.A.: Podstawowe metody funkcji losowych. PWN, Warszawa 1965.
- [5] MS 53-78 Metrologia. Normirujemyje metrologiczeskije charakteristiki sriedstwa izmierzenij. Berlin 1978. Zalecenia metodyczne RWPG, grupa TOI.
- [6] SP 21/SD1. Sriedstwa izmienienii. Obecze metrologiczeskije charakteristiki podlezeszczije normiowaniju. OIML 1.VI.1983 (III projekt, 1981 r.).
- [7] HELMHOLTZ H.V.: Zahlen und Messen erkonntnis - theoretisch betrachtet - w zbiorze "Philosophische Aufsätze Eduard Zeller gewidmet". Leipzig 1887.
- [8] HÖLDER O.: Die Axiome der Quantität und die Lehre von Mass. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsichen Gesellschaft der Wissenschaften. (Math., phys. Klasse), 53, (1901).
- [9] PFANZAGL J.: Theory of Measurement. N. York, Wiley 1968.
- [10] CAMPBELL N.R., Physics: The Elements. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1920.
- [11] MEASUREMENTS, Definitions and Theories. Pod red. C.W. Churchmana i P. Ratoosh. New York, Wiley 1959.
- [12] AJDUKIEWICZ K.: Logika pragmatyczna. PWN, Warszawa 1974.
- [13] URBAN A.: Podstawy miernictwa. Cz. I. Wyd. PW, Warszawa 1977.
- [14] JAWORSKI J.: Modele matematyczne procedur i systemów pomiarowych. Prace Naukowe Elektryka Nr 46. Wyd. PW, Warszawa 1977.
- [15] JAWORSKI J.: Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979.
- [16] KRANTZ D. i inni: Foundations of measurement. Vol. I. Academic Press, New York - London, 1971.
- [17] SOTSKOW B.S.: Niezawodność elementów i urządzeń automatyki. WNT, Warszawa 1973.
- [18] KAWALEROW G.I., MANDELSZTAM S.M.: Wprowadzenie do teorii pomiarów. PWN, Warszawa 1983.
- [19] ŻELEZIK J.: Model odwęglania procesu tlenowo-konwertorowego do sterowania końcową zawartością węgla w kąpiel. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1979.
- [20] OSTROVSKIJ Ł.A.: Osnovy obeczej teorii elektroizmeritelnych ustrojstw. Energia, Leningrad 1971.
- [21] PIOTROWSKI J.: Podstawy metrologii. PWN, Warszawa 1976.
- [22] MAŃCZAK K.: Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa 1971.

- [23] MAŃCZAK K.: Technika planowania eksperymentu. WNT, Warszawa 1976.
- [24] DRAPER N.R., SMITH H.: Analiza regresji stosowana. PWN, Warszawa 1973.
- [25] PAWŁOWSKI Z.: Wstęp do statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1979, wyd. III.
- [26] OLSZEWSKA D.: Algorytmy sterowania i wzorcowania przyrządu pomiarowego wykorzystujące modele matematyczne błędów niestałości. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1980.
- [27] BOX G.E.P., JENKINS G.M.: Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie. PWN, Warszawa 1983.
- [28] PIOTROWSKI J.: Ocena wyników pomiaru metodą analizy modelu matematycznego systemu pomiarowego. PAK, nr 4, 1981.
- [29] PIOTROWSKI J.: Propagacja wzorców miary i błędów.
Cz. I - Wzorzec pierwotny i wtórny o jednakowej mierze. Normalizacja nr 3/1983.
Cz. II - Porównanie wzorców o różnych miarach. Normalizacja nr 4/1983.
Cz. III - Przenoszenie miary wzorca na przyrządy pomiarowe. Normalizacja nr 5/1983.
- [30] PIOTROWSKI J.: Klasyfikacja narzędzi pomiarowych ze względu na właściwości błędów. Normalizacja nr 3, 1981.
- [31] KAŁUSKI J.: Integralny wskaźnik dokładności wybranej klasy przyrządów pomiarowych. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1976.
- [32] POPIELARZ S.: Badania systemu telemetrycznego typu PT. Praca dyplomowa. Instytut Automatyki Politechniki Śląskiej, Gliwice 1978.
- [33] KLEPEK R.: Analiza błędów i interpretacja nominalnej miary wzorca etalonu grupowego. Praca dyplomowa, Instytut Automatyki Politechniki Śląskiej, Gliwice 1982.
- [34] PIOTROWSKI J.: Estymacja błędów systematycznych i przypadkowych przy niewielkiej liczbie pomiarów błędów. Normalizacja, nr 2 1981.
- [35] SOBCZAK W.: Podstawy probabilistyczne teorii systemów informacyjnych. WNT, Warszawa 1981.
- [36] PIOTROWSKI J.: Statyczne właściwości metrologiczne urządzeń pomiarowych jako wielowymiarowy proces losowy. Określenia podstawowe. Referat na konferencji "Metrologia 80" w Jachrance CUP MiSP Politechniki Warszawskiej oraz PAK nr 2/1982.
- [37] Praca R.I.3. PIOTROWSKI J.: Interpretacja własności metrologicznych narzędzi pomiarowych.
Cz. I - Przegląd zagadnień, 1981.
Cz. II - 1982.
Cz. III - Normowanie charakterystyk metrologicznych - 1983.
Oprac. w Probl. Węzł. MNSzWiT R.I-3 na zlecenie CUP Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Warszawskiej.
- [38] PIOTROWSKI J.: Teoria pomiarów. Pomierzy fizyczne i techniczne. PWN, Warszawa (w druku).

MODELOWANIE MATEMATYCZNE BŁĘDÓW SYSTEMÓW POMIAROWYCH
WIELOWYMIAROWYCH, NIESTACJONARNYM PROCESEM LOSOWYM

S t r e z a c z e n i e

W pracy przedstawiono definicję fizycznej skali pomiarowej, model systemu pomiarowego odzwierciedlający fizyczne przetwarzanie wielkości, procedury wzorcowania, wynikające stąd błędy oraz sposoby ich definiowania i modelowania.

Na podstawie właściwości zjawisk fizycznych zachodzących w systemie pomiarowym wyprowadzono wniosek, że błąd systemu pomiarowego jest niestacjonarnym, wielowymiarowym procesem losowym. Podano jego właściwości fizyczne, matematyczne i metrologiczne. Szczegółowo przedstawiono i uzasadniono skorelowanie realizacji błędów oraz skorelowanie współczynników funkcji modelującej błędy. Jako przykład zastosowań proponowanego w pracy modelu błędów pokazano ocenę błędów przy propagacji wzorców, ocenę błędów po adiustacji systemu pomiarowego oraz ocenę błędów o skorelowanych realizacjach.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
МНОГОМЕРНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ**

Р е з ю м е

В работе представлено определение физической измерительной шкалы, модель измерительной системы отображающей физическое преобразование величины, процедуры калибровки, вытекающие отсюда погрешности а также способ их определения и моделирования.

На основе свойств физических величин преобладающих в измерительной системе сделано вывод, что погрешность измерительной системы является нестационарным многомерным случайным процессом.

Подано его физическое, математическое и метрологическое свойства. Подробно представлено и обосновано корреляция реализации погрешностей а также корреляция коэффициентов функции моделирующей ошибки. В качестве примера применения предложенной в работе модели погрешностей показано оценку ошибок при передаче единицы измерения, оценку ошибок после встройки измерительной системы а также ошибок со скоррелированными реализациями.

THE MATHEMATICAL MODELLING OF MEASUREMENT SYSTEMS ERRORS WITH
HELP OF NON-STATIONARY MULTI-DIMENSIONAL RANDOM PROCESS

S u m m a r y

In the paper the definition of the physical measurement scale, the model of measurement system representing physical conversion of value, the procedure of calibration, errors resulting from this and the defining and modelling procedure are introduced. On the base of the characteristics of physical effects arriving in measurement system a conclusion is derived, that measured system error is a non-stationary multi-dimensional random process. Its physical, mathematical and metrological characteristics are given. The correlation of errors realization and correlation of coefficients of function modelling errors are particularly introduced and substantiated. As an example of application of the errors model proposed in the paper the estimation of errors which appear by propagation of standards, the estimation of errors after measurement system adjustment and estimation of errors which have correlated realizations.

P. 3341/84/77

Cena zł 59,-

**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
- 44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
- 40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
- 40-098 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
- 41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
- 41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
- 41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
- 47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
- 44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
- 41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
- 41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
- 00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —
Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.