ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: ELEKTRYKA z. 195 Nr kol. 1670

Adam ŻUCHOWSKI
Zakład Teorii Sterowania i Technik Symulacyjnych
Instytut Automatyki Przemysłowej
Politechnika Szczecińska

CZTEROPARAMETROWE MODELE DYNAMIKI PRZETWORNIKÓW POMIAROWYCH TWORZONE W OPARCIU O MODEL STREJCA

Streszczenie. Dynamika szeregu przetworników pomiarowych odpowiada eleme-ntom wieloinercyjnym o współczynniku statycznego wzmocnienia k i zespole stałych czasowych T_i przy i=1,2,...,n. Praktyczne eksperymentalne wyznaczenie tych n+1 parametrów jest trudne. Stosunkowo łatwo daje się natomiast wyznaczyć trzy lub cztery parametry modelu Strejca, którego zastępczy rząd inercji jest zwykle liczbą ułamkową. Przedstawiono możliwości analitycznego wyznaczania różnych modeli czteroparametro-wych w oparciu o znane parametry modelu Strejca.

THE USING OF STREJC MODELS FOR CREATION OF 4-PARAMETERS MODELS OF DYNAMICS OF MEASURING SENSORS

Summary. There are numerous sensors with dynamics of multi-inertia type. It means, that parametric models of these sensors contain static gain k and set of inertia time constants T_i, i=1,2,…,n. The experimental way of determining of all mentioned n+1 parameters is difficult one. However, by means of relatively simple procedure one can determine the respective three or four parameters Strejc's models. Usually, the substitute inertia order of obtained Strejc's model is represented by fractional number. The possibilities of determining of various models described with four parameters and created analytically on the base of known parameters of respective Strejc models are presented in the paper.

1. WSTĘP

Szereg przetworników pomiarowych, w tym na przykład różnego typu termometry [1] to tak zwane elementy wieloinercyjne, cechujące się współczynnikiem statycznego wzmocnienia k, zespołem stałych czasowych T_i przy i=1,2,…,n, gdzie n jest rzędem inercji, a czasem także opóźnieniem rzeczywistym T_0. Dynamikę przetwornika opisuje tym samym n+2 parametrów na ogół trudnych do dokładnego wyznaczenia. Dla uproszczenia opisu i ułatwienia identyfikacji stosuje się często jako uproszczony tak zwany model Strejca [2] o klasycznej postaci:

$$K_m(S) = \frac{k \cdot \exp(-sT_0)}{(1+sT)^m}, \tag{1}$$

gdzie: $K_m(s)$ jest transmitancją modelu, T – zastępczą stałą czasową, a m – zastępczym rzędem inercji.

Jeśli pominąć opóźnienie rzeczywiste T_0 identyfikowane (na ogół mało dokładnie) jako opóźnienie reakcji przetwornika na sygnał wejściowy $x(t)$ - model ten posiada tylko trzy parametry. Może on być wykorzystywany w ogólnym przypadku, gdy charakterystyka skokowa przetwornika jest funkcją monotonicznie rosnącą od zera do wartości ustalonej k i istnieje kilka metod pomiarowych umożliwiających wyznaczenie parametrów k, T i m (np. [3], [4], [5], [6]). Należy podkreślić, że metody te prowadzą najczęściej do ułamkowych wartości zastępczego rzędu dynamiki m, nie mających odpowiedników fizykalnych, toteż stosuje się zwykle zaokrąglenia m do liczby naturalnej, co nawet przy stosowaniu odpowiednich zasad [7] wprowadza dodatkowe błędy istotne w zakresie $m<4$. Model Strejca jest zwykle wystarczająco dokładny w dłuższym horyzoncie czasowym, natomiast jeśli $m \neq n$ wprowadza błędy w początkowej fazie reakcji na sygnał wejściowy.

Dla uniknięcia potrzeby zaokrąglania rzędu inercji i zmniejszenia błędów można zaproponować uzupełnienie modelu Strejca (z pominięciem członu $\exp(-sT_0)$) do modelu czteroparametrowego bez potrzeby wprowadzania nowych metod identyfikacji, to jest wyłącznie w oparciu o znane parametry T, m, k. W tym celu konieczne jest ustalenie pewnych jednoznacznych zasad przekształceń modelu Strejca.

2. ZASADY PRZEKSZTAŁCEŃ MODELU STREJCA

Przedstawimy model Strejca (już bez opóźnienia rzeczywistego, które nie podlega przekształceniu) w nieco innej równoważnej postaci:

$$K_m(s) = \frac{k}{\left(1 + s\frac{T'}{m}\right)^m}, \tag{2}$$

gdzie oczywiście $T'=T \cdot m$. Jeśli model ten ma być zastąpiony przez inny model $K_{mz}(s)$, to należy koniecznie zachować warunki identycznego, statycznego wzmocnienia obu modeli:

$$K_{mz}(0) = K_m(0) = k, \tag{3}$$

oraz identycznej „skali czasu":

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{K_{mz}(0)}{K_{mz}(s)}\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{K_m(0)}{K_m(s)}\right)_{s=0} = T'. \tag{4}$$

Wynika stąd, że w modelu Strejca (2) jakiekolwiek zmiany mogą dotyczyć wyłącznie wartości parametru m. Przypuśćmy, że parametr m zostanie zastąpiony wartością $m+\Delta m$, a transmitancja (2) nowa transmitancją:

$$K_{mz}(s)=\frac{k}{\left(1+s\frac{T'}{m+\Delta m}\right)^{m+\Delta m}}. \tag{5}$$

W warunkach podania na wejście sygnału $x(s)$ różnica zachowań obu modeli przyjmie postać:

$$Dx(s)=x(s)\cdot\{K_{mz}(s)-K_m(s)\}\cong\Delta m\cdot x(s)\cdot\frac{\partial}{\partial m}K_m(s) \tag{6}$$

z pominięciem dalszych wyrazów rozwinięcia w szereg przy niewielkim Δm. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymuje się:

$$Dx(s)\cong\Delta m\cdot x(s)\cdot\frac{k}{\left(1+s\cdot\frac{T'}{m}\right)^{m}}\cdot\left[\ln\left(1+s\cdot\frac{T'}{m}\right)-\frac{s\cdot\frac{T'}{m}}{1+s\cdot\frac{T'}{m}}\right], \tag{7}$$

a po zastosowaniu wzoru przybliżonego [8] dokładnego w szerokim zakresie zmian r:

$$\ln(1+r)\cong\frac{r}{1+r}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{(1+r)^{1.5}}, \tag{8}$$

$$Dx(s)\cong\Delta m\cdot x(s)\cdot k\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(s\cdot\frac{T'}{m}\right)^2}{\left(1+s\cdot\frac{T'}{m}\right)^{m+1.5}}. \tag{9}$$

Ostatni człon składowy wzoru (9) wolno traktować jako wrażliwość modelu Strejca (2) na zmiany m przy zachowaniu warunków (3) i (4). Osiąga ona maksimum (stosunkowo płaskie!) dla:

$$s\cdot T'=\frac{2\cdot m}{m-0.5}, \tag{10}$$

skąd $s\cdot T'\cong 2$ i tym samym trzeci warunek zastąpienia modelu $K_m(s)$ przez model $K_{mz}(s)$ powinien mieć postać:

$$\left(\frac{K_m(0)}{K_m(s)}\right)_{s=\frac{2}{T'}}=\left(1+\frac{2}{m}\right)^m=\left(\frac{K_{mz}(0)}{K_{mz}(s)}\right)_{s=2\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{K_{mz}(0)}{K_{mz}(s)}\right)_{s=0}}, \tag{11}$$

co oznacza $\Delta m=0$ właśnie wtedy, gdy wrażliwość modelu Strejca na odchyłki parametru m jest największa, a więc przybliżoną minimalizację błędu. Wzory (3), (4) i (11) będą wykorzystane dla dalszych przekształceń modelu Strejca [9].

3. MODELE CZTEROPARAMETROWE

Modele czteroparametrowe można tworzyć albo uzupełniając model Strejca o dodatkowy człon z jednym parametrem, albo też jako modele wieloinercyjne o różnych stałych czasowych. W pierwszej grupie można wyróżnić cztery różne modele:

$$K_{m1}(s)=\frac{k}{(1+sT_m)^n\cdot(1+s\cdot q\cdot T_m)}, \tag{12}$$

$$K_{m2}(s)=\frac{k\cdot(1+s\cdot q\cdot T_m)}{(1+sT_m)^n}, \tag{13}$$

$$K_{m3}(s)=\frac{k}{(1+sT_m)^n\cdot(1+2\cdot B\cdot T_m\cdot s+s^2\cdot T_m^2)}, \tag{14}$$

$$K_{m4}(s)=\frac{k\cdot(1+2\cdot B\cdot T_m\cdot s+s^2T_m^2)}{(1+sT_m)^n}, \tag{15}$$

przy tym z założenia n jest liczbą całkowitą, oraz $B>0$, $q>0$. W każdym z tych modeli współczynnik statycznego wzmocnienia musi być identyczny jak w modelu Strejca (1), co odpowiada warunkowi (3). Warunek (4) dla modeli (12) i (13) przyjmuje postać:

$$m\cdot T=T_m\cdot(n+q)\ (12),\ \text{lub}\ m\cdot T=T_m(n-q)\ (13)$$

a dla modeli (14) i (15) odpowiednio postać: (16)

$$m\cdot T=T_m(n+2\cdot B)\ (14),\ \text{lub}\ m\cdot T=T_m\cdot(n-2\cdot B)\ (15)$$

Uwzględniając konieczność spełnienia warunku (11), otrzymuje się po wykorzystaniu (16):

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{m}\right)^m &= (1+R)^n\cdot(3-n\cdot R),\quad R=\frac{2}{n+q} && \text{model (12)}\\
&= \frac{(1+R)^n}{(n\cdot R-1)},\quad R=\frac{2}{n-q} && \text{model (13)}\\
&= (1+R)^n\cdot(3-n\cdot R+R^2),\quad R=\frac{2}{n+2B} && \text{model (14)}\\
&= \frac{(1+R)^n}{(R^2+n\cdot R-1)},\quad R=\frac{2}{n-2B} && \text{model (15)}
\end{aligned} \tag{17}$$

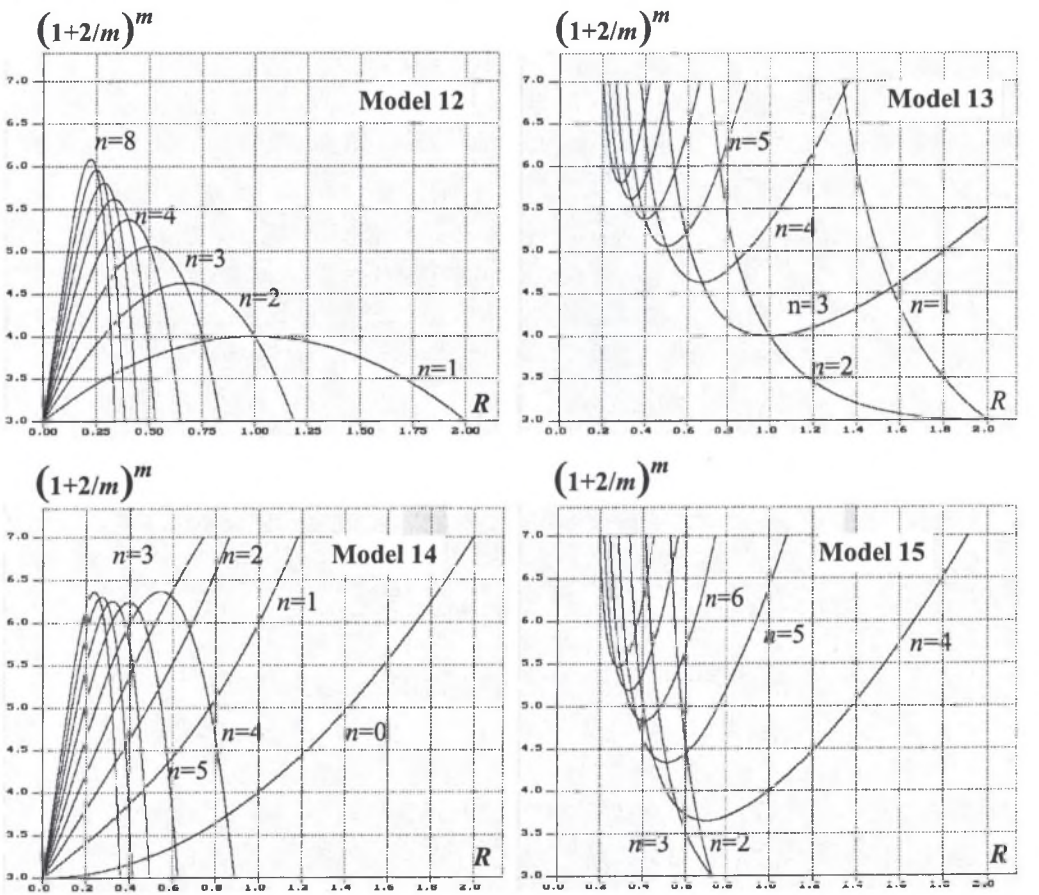
We wzorach tych parametr n należy przyjąć arbitralnie, co może oznaczać istnienie różnych modeli tego samego typu. W praktyce, dla modelu (12) można przyjąć $n=E(m)-1$, by nie powiększać nadmiernie rzędu dynamiki, lub ewentualnie $n=E(m)$, zakładając, że na skutek niejednakowych składowych stałych czasowych w modelu rzeczywistym m zostało wyznaczone jako mniejsze od prawdziwego rzędu ($E(m)$ oznacza liczbę całkowitą największą zawartą w m). Dla modelu (13) można przyjąć $n=E(m)$ lub $n=E(m)+1$ z tych samych powodów, a dla modeli (14) i (15) granice wartości n odpowiednio szersze. Te ostatnie dwa

modele poza szczególnymi przypadkami mogą wprowadzać większe błędy i lepiej ich unikać. W każdym z wymienionych przypadków po przyjęciu n ze wzorów (17) można wyznaczyć parametr pomocniczy R wykorzystując proste programy komputerowe, lub pomocnicze wykresy pokazane na rysunku 1, a następnie parametry B lub q i w konsekwencji także T_m.

W drugiej grupie można wyróżnić trzy typy modeli wieloinercyjnych. Model:

$$K_{m5}(s) = \frac{k}{(1+sT_1)\cdot(1+sT_2)\cdot(1+sT_3)}, \tag{18}$$

możliwy do wykorzystania wtedy, gdy $m \leq 3$, oraz dwa modele, w których stałe $T_1, T_2, \ldots T_i$ tworzą postęp arytmetyczny (19), lub geometryczny (20) o narzuconej liczbie wyrazów i, będącej jednocześnie rzędem dynamiki. Dla modelu (19) przyjmiemy więc parametry k, T_1, d, oraz i przy tym $T_i = T_1 + (i-1)\cdot d$, a dla modelu (20) parametry k, T_1, q oraz i przy $T_i = T_1 \cdot q^{i-1}$.



Rys. 1. Wykres dla wyznaczenia parametru R przy znanych wartościach parametrów m i n, dla modeli typu (12), (13), (14) i (15)

Fig. 1. The diagram determining of parameter R for known values of m and n and models defined by (12), (13), (14), (15)

Dla modelu (18) warunki (4) i (11) przyjmują postać:

$$T_1 + T_2 + T_3 = m \cdot T$$

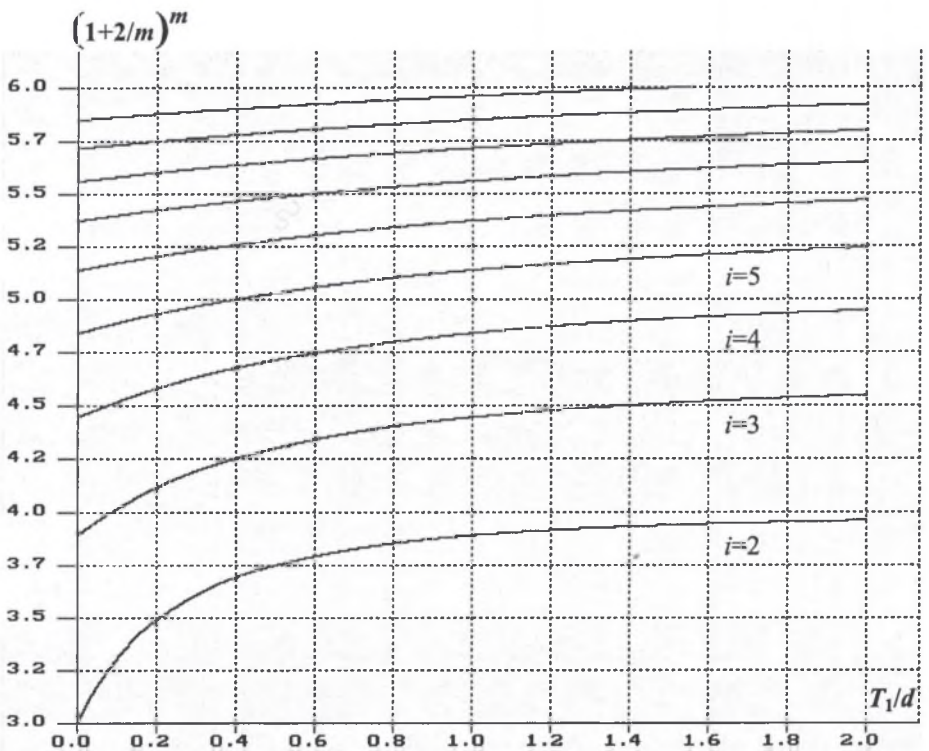
$$\left(1+\frac{2}{m}\right)^m = \left(1+\frac{2\cdot T_1}{mT}\right)\left(1+\frac{2\cdot T_2}{mT}\right)\left(3-\frac{2\cdot T_1}{mT}-\frac{2\cdot T_2}{mT}\right)$$

i jeden z parametrów T_1, lub T_2 należy przyjąć w sposób arbitralny, np. $T_1 = \frac{1}{3}\cdot mT$, co ma pewien wpływ na dokładność modelu, ale umożliwia wyznaczenie parametrów, jeśli m=3.

W przypadku modeli (19) i (20) warunki (4) i (11) prowadzą do bardzo złożonych wzorów i jedynym wyjściem jest wykorzystanie gotowych wykresów zależności $\left(1+\frac{2}{m}\right)^m$ od parametrów i oraz T_1/d lub q, a następnie wykorzystanie znanych wzorów na sumy i wyrazów postępu arytmetycznego: $m\cdot T = i\cdot T_1 + \frac{i\cdot(i-1)}{2}\cdot d$,

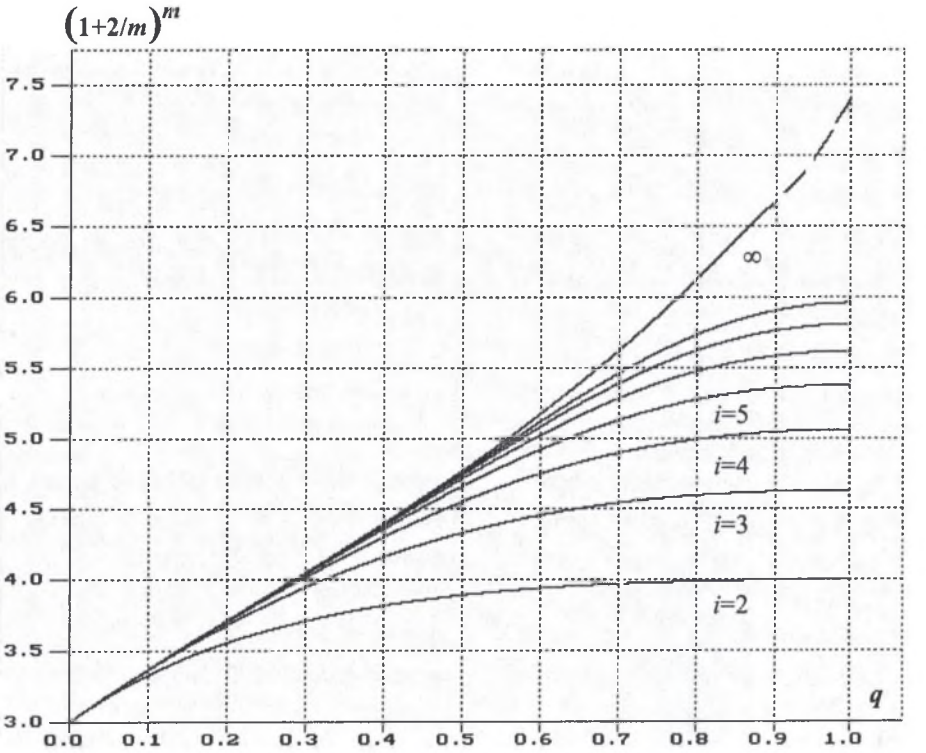
oraz geometrycznego: $m\cdot T = T_1\cdot\frac{q^i-1}{q-1}$,

należy przy tym pamiętać, że zgodnie z założeniami model ma cztery parametry, więc jeden (na przykład i) musi zostać przyjęty arbitralnie.



Rys. 2. Wykres zależności $(1+2/m)^m$ od parametrów i oraz T_1/d dla modelu (19)
Fig. 2. The diagram determining $(1+2/m)^m$ on the base of parametrs i and T_1/d for model (19)

Jeśli wykorzystać „metodę pierwszych próbek" [4] i przyjąć jako i rzeczywisty rząd dynamiki modelu inny niż wyznaczane m, to wolno się spodziewać bardzo dobrych własności modeli (19) lub (20). Ich wadą jest konieczność korzystania z wykresów pokazanych na rysunkach 2 i 3.



Rys. 3. Wykres zależności $(1+2/m)^m$ od parametrów i oraz q dla modelu (20)
Fig. 3. The diagram determining $(1+2/m)^m$ on the base of parameters i and q for model (20)

Do pomyślenia są także czteroparametrowe modele oparte na innych ciągach liczbowych (np. ciągi Fibonacciego) i otwarty pozostaje problem doboru optymalnego ciągu w zależności od posiadanych dodatkowych informacji.

4. WYNIKI EKSPERYMENTÓW

„Prawdziwe" modele o bardzo wysokim rzędzie dynamiki należą do rzadkości, dlatego też przyjęto jako taki model czwartego rzędu o wzmocnieniu równym jedności i stałych czasowych $T_1 = 0{,}5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 2$, $T_4 = 4$ tworzących postęp geometryczny. Jak wynika z prostych obliczeń $m \cdot T = 7.5$, $\left(1+\frac{2}{m}\right)^m = 4{,}549116$ oraz $m = 2{,}8398$. Wyniki obliczeń parametrów modeli (12)÷(15) zestawiono w tabeli 1, przy arbitralnie przyjętym n.

Wyznaczono także parametry modelu (19), oraz maksymalne błędy wszystkich tych modeli w porównaniu z modelem idealnym, przy skoku jednostkowym na wejściu.

Tabela 1

Wyniki obliczeń parametrów oraz symulacji zachowań uproszczonych modeli, w sytuacji gdy stałe czasowe przetewornika tworzą postęp geometryczny

Numer modelu	n	r	q, B	T_m	Maksymalny błąd
(1)	m = 2,839			T = 2,641	0,0162
(12)	2	0,791	0,530	2,965	0,0132
(13)	3	0,682	0,0676	2,558	0,0186
(14)	0	1,245	0,8033	4,669	0,0586
	1	0,642	1,057	2,408	0,0127
(15)	5	0,415	0,0893	1,556	0,0703
(19)	i = 4		d = 1,141	T_1 = 0,164	0,00767

Najmniejsze błędy wykazują modele (12), (14), a zwłaszcza (19), co wynika z faktu, że są to w gruncie rzeczy modele wieloinercyjne, a więc podobne pod względem budowy do modelu prawdziwego. Model (15) ma wyraźnie niewłaściwą strukturę (podobnie model (13) i (14) przy $n = 0$, a więc $B < 1$). Modele te wykazują stosunkowo duże błędy.

Jako inny prawdziwy model o dynamice czwartego rzędu przyjęto model wieloinercyjny o statycznym wzmocnieniu k=1 i stałych czasowych $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 3$, oraz $T_4 = 4$ tworzących postęp arytmetyczny. W tym przypadku $\left(1+\frac{2}{m}\right)^m = 4{,}8384$, $m = 3{,}4401$ oraz $T = 2{,}907$. Wyniki obliczeń parametrów modeli (12)÷(15) przy arbitralnie przyjętym n zestawiono w tabeli 2. Wyznaczono także parametry modelu (20) oraz maksymalne błędy wszystkich tych modeli w porównaniu z modelem prawdziwym, przy skoku jednostkowym na wejściu.

Tabela 2

Wyniki obliczeń parametrów oraz symulacji zachowań uproszczonych modeli, w sytuacji gdy stałe czasowe przetwornika tworzą postęp arytmetyczny

Numer modelu	n	r	q, B	T_m	Maksymalny błąd
(1)	m = 3,4401			T = 2,907	0,00738
(12)	3	0,6221	0,2149	3,1105	0,0039
(13)	4	0,5425	0,3136	2,7127	0,0109
(14)	1	0,7270	0,8755	3,6350	0,0190
	2	0,4493	1,2257	2,2470	0,0020
(15)	6	0,3862	0,4107	1,9310	0,0262
(20)	i = 4		q = 0,048	T_1 = 4,2735	0,0023

W tym przypadku wnioski są identyczne i nie ma potrzeby ich powtarzać. Warto jedynie zwrócić uwagę na możliwą niejednoznaczność rozwiązań wynikającą zarówno z możliwości arbitralnego wyboru parametru n, lub i, jak i z wykresów pokazanych na rysunku 1. Problem wyboru najwłaściwszego modelu pozostaje niestety problemem otwartym.

5. PODSUMOWANIE

Stosunkowo prosta identyfikacja parametrów modelu Strejca (1) pozwala na tworzenie szeregu modeli czteroparametrowych bez konieczności przeprowadzania dodatkowych eksperymentów identyfikacyjnych. Większość z tych modeli to w rezultacie modele wieloinercyjne, a więc dobrze dostosowane do modelu prawdziwego pod względem struktury, lecz o innych parametrach. Cechują je niewielkie błędy i mogą być one z pożytkiem stosowane w praktyce.

Literatura

1. Michalski L., Eckersdorf K., Kucharski J.: *Termometria. Przyrządy i Metody.* Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź 1998.
2. Strejc V.: *Naherungsverfahren für aperiodische Übertragungscharakteristiken.* Regelungstechnik 1959/4.
3. Findeisen W.: *Technika regulacji automatycznej.* PWN, Warszawa 1965.
4. Skoczowski S.: *Eine Bemerkungen zur Approximierung von Regelstrecken mit Ausgleich.* Regelungstechnik 1983/7.
5. Skoczowski S.: *Metoda uproszczonej identyfikacji parametrów modelu Strejca na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej.* Kwartalnik Elektrotechniki i Telekomunikacji 1992, vol. 38, z. 2-3.
6. Żuchowski A.: *O pewnej metodzie wyznaczania parametrów modelu Strejca.* Pomiary Automatyka Kontrola, PAK 1993/2.
7. Żuchowski A.: *Wybór optymalnego rzędu dynamiki w modelu Strejca.* Materiały XIV Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych. Krynica, 19-23.09.2004. Wyd. AGH, Kraków.
8. Żuchowski A.: *Kilka użytecznych wzorów przybliżonych.* Materiały XIII Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych. Kraków 8-11.09.2003, Wyd. AGH, Kraków.
9. Papliński J., Żuchowski A.: *Pochodne modele dynamiki obiektów tworzone na bazie modelu Strejca.* Materiały XII Krajowej Konferencji Automatyki. Gdynia 1994.
10. Skoczowski S.: *Uniwersalny model uproszczony procesów aperiodycznych z opóźnieniem.* Materiały XIV Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica 2004.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Zakrzewski

Wpłynęło do Redakcji dnia 7 grudnia 2004

Abstract

There are numerous sensors (like, for example, thermometers of various type) with dynamic properties fitting to multi-inertia models with real delay. Thus, the primary model of such sensor contains the following parameters: static gain k, delay time T_0 and inertia time constants T_i, i= 1,2,...,n. The experimental way of determining of all mentioned n+2 parameters is difficult one. However, by means of relatively simple procedure one can determine the respective parameters of Strejc's model, i.e. k, T_0, m, T, where T - substitute time constant, m – substitute order of inertia. Excluding rough approximation one should usually use the fractional m. It is possible to determine the various models described with four or five parameters which are created analytically on the base of known parameters of

respective Strejc models. These "secondary" models, containing delay $T0$, are usually more accurate comparing to accuracy of "initial " Strejc models. The obtained "secondary" models can be considered again as multi-inertia models with real delay, if necessary. However, they are different comparing them to "primary" models mentioned above.