

P.3347/82

**ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

ELEKTRYKA

**Z. 81
GLIWICE
1982**



P 3347/82

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 722

MACIEJ SIWCZYŃSKI

**ZASTOSOWANIE ALGEBR
BANACHA W TEORII
SYGNAŁÓW I UKŁADÓW
WIELOWYMIAROWYCH**

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. Wiesław Żelazko
Prof. dr hab. inż. Zygmunt Nowomiejski

KOLEGIUM REDAKCYJNE

Wiesław Gabzdyl (redaktor naczelny), Zofia Cichowska (redaktor działu),
Elżbieta Stinzing (sekretarz redakcji)

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Anna Błażkiewicz

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakł 150+85 Ark. wyd. 4,75 Ark. druk. 5,75 Papier piśmienny kl. III, 70x100, 70 g
Oddano do druku 19.05.1982 Podpis. do druku 26.07.1982 Druk ukończ. we wrześniu 1982
Zamówienie 491/82 B-24 Cena zł 12,-

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

	Str.
OZNACZENIA I PODSTAWOWE OKREŚLENIA	5
1. WSTĘP	9
1.1. Postawienie zagadnienia stabilności przy zastosowaniu algebry Banacha	9
1.2. Zastosowanie w teorii układów nieliniowych	13
2. PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA TEORII ALGEBR BANACHA	17
2.1. Niekomutatywne algebry i podstawowe własności widm	17
2.2. Funkcje analityczne jednej zmiennej w algebrach Banacha i niektóre twierdzenia o istnieniu odwrotności pojedynczych elementów	22
2.3. Przykład zastosowania twierdzeń o istnieniu odwrotności	26
2.4. \mathbb{C} -wartościowe homomorfizmy komutatywnych algebr Banacha	30
2.5. Przekształcenie Gelfanda	33
2.6. Funkcje analityczne wielu zmiennych w algebrach Banacha i twierdzenie o istnieniu odwrotności układu elementów algebry	34
3. KONKRETNE KOMUTATYWNE ALGEBRY BANACHA	38
3.1. $L(\mathbb{R}_+^M)$ jako algebra Banacha	38
3.2. $L(\mathbb{R}_+^M)$ jako algebra Banacha	41
3.3. Stabilność liniowych układów wielowymiarowych	42
3.4. Algebra \mathcal{D} sygnałów wielookresowych	45
4. NIELINIOWE CZASOWO NIEZMIENNICZE UKŁADY ANALITYCZNE	52
4.1. Poszukiwanie rozwiązań równań nieliniowych	52
4.2. Jednorodne operatory czasowo niezmiennicze	58
4.3. Identyfikacja układu nieliniowego za pomocą operatora jednorodnego	61
4.4. Synteza operatora jednorodnego	62
4.5. Operatory analityczne czasowo niezmiennicze	64
5. NIELINIOWE CZASOWO ZMIENNE UKŁADY ANALITYCZNE	70
5.1. \mathcal{X}_+ i \mathcal{X} - algebry	70
5.2. Jednorodne operatory czasowo zmienne	79
5.3. Analityczne operatory czasowo zmienne	82
UWAGI KONGOWE	86
LITERATURA	87
STRESZCZENIA	90

OZNACZENIA I PODSTAWOWE OKRESLENIA

Przez \mathcal{N} , \mathcal{N}_+ , \mathcal{R} , \mathcal{R}_+ , \mathcal{C} oznaczone będą odpowiednio zbiory: liczb całkowitych, liczb całkowitych nieujemnych, liczb rzeczywistych, liczb rzeczywistych nieujemnych, liczb zespolonych, a przez \mathcal{N}^M , \mathcal{N}_+^M , \mathcal{R}^M , \mathcal{R}_+^M , \mathcal{C}^M odpowiednie produkty kartezjańskie, tj., $\mathcal{N}^M = \mathcal{N} \times \dots \times \mathcal{N}$ (M razy), gdzie w miejsce \mathcal{N} podstawia się kolejno \mathcal{N} , \mathcal{N}_+ , \mathcal{R} , \mathcal{R}_+ , \mathcal{C} . Zbiory \mathcal{R}^M i \mathcal{C}^M są oczywiście przestrzeniami liniowymi nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych) z działaniami dodawania i mnożenia przez skalary określonymi w zwykły sposób, tj.:

$$\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_M) + \beta(\mu_1, \dots, \mu_M) = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \dots, \alpha\lambda_M + \beta\mu_M)$$

Zbiór \mathcal{N}^M nazywa się zbiorem multiindeksów, a zbiór \mathcal{N}_+^M - zbiorem multiindeksów pierwszego hiperkwadrantu. Zbiór \mathcal{N}_+^M z określonym działaniem dodawania: $(n_1, \dots, n_M) + (m_1, \dots, m_M) = (n_1 + m_1, \dots, n_M + m_M)$ tworzy półgrupę, a zbiór \mathcal{N}^M tworzy grupę ze względu na to działanie. Przez $\mathbf{1}$ i $\mathbf{0}$ oznaczone będą elementy $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Mnożenie elementów z \mathcal{N}^M przez $m \in \mathcal{N}$ określa się następująco: $m(n_1, \dots, n_M) = (m n_1, \dots, m n_M)$. W tym sensie $-n = (-1)n$, $n \in \mathcal{N}^M$. W \mathcal{N}_+^M wprowadza się symbol:

$$n! = n_1! \dots n_M!$$

We wszystkich podanych tu zbiorach określa się następujące działania:

$$\alpha^\beta = (\alpha_1^{\beta_1}, \alpha_2^{\beta_2}, \dots, \alpha_M^{\beta_M})$$

$$\alpha^\beta = (\alpha_1^{\beta_1}, \alpha_2^{\beta_2}, \dots, \alpha_M^{\beta_M})$$

(uwaga: α , β mogą należeć do różnych zbiorów pod warunkiem, że działania są poprawnie określone);

iloczyn skalarny

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \beta_i$$

moduł |·| i normę ||·|| :

$$|\alpha| = (\alpha, \alpha)^{1/2}$$

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^M |\alpha_i|$$

Zapis $\alpha > \beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathcal{R}^M$ lub \mathcal{I}^M , lub \mathcal{I}_+^M oznacza, że $\alpha_1 > \beta_1, \dots, \alpha_M > \beta_M$; analogicznie rozumie się zapis $\alpha > \beta$.

Zbiór

$$K^M(\alpha, \varrho) = \{ \lambda \in \mathbb{C}^M : |\lambda_i - \alpha_i| < \varrho_i, i=1, \dots, M \}$$

nazywa się otwartym polidyskiem (polikołem) o środku $\alpha \in \mathbb{C}^M$ i multipromieniu $\varrho \in \mathcal{R}_+^M$. Zbiory

$$\partial K^M(\alpha, \varrho) = \{ \lambda \in \mathbb{C}^M : |\lambda_i - \alpha_i| = \varrho_i, i=1, \dots, M \}$$

$$\bar{K}^M(\alpha, \varrho) = \{ \lambda \in \mathbb{C}^M : |\lambda_i - \alpha_i| \leq \varrho_i, i=1, \dots, M \}$$

nazywają się kolejno poliołkregiem i domkniętym polidyskiem. Symbol $K^M = K^M(0, I)$ oznaczać będzie jednostkowy otwarty polidysk. Analogicznie symbole $\bar{K}^M, \partial K^M$ oznaczają jednostkowy domknięty polidysk i jednostkowy poliołkrag.

Jeżeli f jest funkcją analityczną $\mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}$, to pochodna cząstkowa $f^{(n)}(\lambda), n \in \mathcal{I}_+^M, \lambda \in \mathbb{C}^M$ oznacza:

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{\partial^{\|n\|} f(\lambda)}{\partial \lambda_1^{n_1} \dots \partial \lambda_M^{n_M}}$$

Jeżeli x jest \mathbb{C} -wartościowym ciągiem zadanym na \mathcal{I}^M , to symbol $\sum_{n \in \mathcal{I}^M} x(n)$ oznaczać będzie sumę wartości $x(n)$ ciągu x po wszystkich wartościach $n \in \mathcal{I}^M$. Suma ta nie będzie zależała od sposobu definiowania sum częściowych i sposobu przechodzenia do granicy w nieskończoności, bowiem zawsze będzie obowiązywało założenie o absolutnej zbieżności szeregu $\sum_{n \in \mathcal{I}^M} x(n)$. (Oznacza to, że zakłada się zbieżność szeregu, którego składnikami są liczby $|x(n)|$). Analogicznie rozumie się całkę $\int_{\mathcal{R}^M} x(t) dt$, gdzie x jest absolutnie sumowalną $\mathcal{R}^M \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją, a $dt = dt_1 \dots dt_M$ jest miarą Lebesgue'a na \mathcal{R}^M .

Wprowadza się następujące przestrzenie ciągowe i funkcyjne:

$$L(\mathcal{I}^M) = \{ x : \mathcal{I}^M \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathcal{I}^M} |x(n)| < \infty \}$$

$$L^\infty(\mathcal{I}^M) = \{ x : \mathcal{I}^M \rightarrow \mathbb{C} : \bigvee_{\alpha(x) \in \mathcal{R}_+} \bigwedge_{n \in \mathcal{I}^M} |x(n)| < \alpha \}$$

$$L(\mathcal{R}^M) = \{ x : \mathcal{R}^M \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathcal{R}^M} |x(t)| dt < \infty \}$$

$$L^\infty(\mathcal{R}^M) = \{ x : \mathcal{R}^M \rightarrow \mathbb{C} : \bigvee_{\alpha(x) \in \mathcal{R}_+} \text{esssup}_{t \in \mathcal{R}^M} |x(t)| < \alpha \}$$

Symbole $L(\mathcal{I}_+^M), L^\infty(\mathcal{I}_+^M), L(\mathcal{R}_+^M), L^\infty(\mathcal{R}_+^M)$ oznaczają odpowiednie podprzestrzenie funkcji, których nośniki leżą w \mathcal{I}_+^M lub \mathcal{R}_+^M (funkcje znikające poza pierwszym hiperkwadrantem).

Funkcje $\mathcal{I}^M \rightarrow \mathbb{C}$ będą nazywane wielowymiarowymi sygnałami dyskretnymi lub spróbkowanymi, w skrócie MSDSg (ang. Multidimensional Sampled Data Signal). Zbiór wszystkich MSDSg oznaczany będzie przez $\mathcal{S}(\mathcal{I}^M)$. Funkcje $\mathcal{R}^M \rightarrow \mathbb{C}$ będą nazywane wielowymiarowymi sygnałami ciągłymi, w skrócie MSg (ang. Multidimensional Signal). Zbiór wszystkich MSg oznaczany będzie przez $\mathcal{S}(\mathcal{R}^M)$. Precyzyjnie należałoby mówić o sygnałach czasowo dyskretnych lub czasowo ciągłych, albo też o sygnałach argumentu dyskretnego lub ciągłego. Sygnały będą oznaczane symbolami s, u, v , a ich wartości $s(n)$ lub też $s(t), n \in \mathcal{I}^M, t \in \mathcal{R}^M$. Symbole x, y, z będą natomiast zarezerwowane dla odpowiedzi impulsowych.

Wielowymiarowy układ dyskretny z jednym wejściem i jednym wyjściem, w skrócie MSDS (ang. Multidimensional Sampled Data System), jest definiowany jako odwzorowanie $\mathcal{S}(\mathcal{I}^M) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{I}^M)$. Analogicznie wielowymiarowy układ ciągły, MS (ang. Multidimensional System) określa się jako odwzorowanie $\mathcal{S}(\mathcal{R}^M) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{R}^M)$.

Na zakończenie dowodu każdego twierdzenia umieszczono znak \square .

1. WSTĘP

Zakres pracy: praca dotyczy głównie zastosowań algebr Banacha sygnałów wielowymiarowych do:

- analizy stabilności liniowych, czasowo niezmienniczych układów wielowymiarowych;
- analizy, identyfikacji i syntezy nieliniowych czasowo niezmienniczych układów dających się opisać za pomocą szeregów funkcjonalnych (tzw. układów analitycznych).

Ponadto ostatni rozdział poświęcono analizie i identyfikacji układów analitycznych czasowo zmiennych.

1.1. Postawienie zagadnienia stabilności przy zastosowaniu algebry Banacha

Wielowymiarowy układ czasowo dyskretny nazywa się stabilny, jeżeli realizuje on odwzorowanie $L^\infty(\mathcal{M}^M)$ w siebie, tj. jeżeli każdemu ograniczonemu sygnałowi wejściowemu odpowiada ograniczony sygnał wyjściowy. Analogicznie, wielowymiarowy układ czasowo ciągły nazywa się stabilny, jeżeli realizuje odwzorowanie $L^\infty(\mathcal{X}^M)$ w siebie. Określenie to znane jest często pod nazwą "stabilności BIBO" (ang. Boundet Input Boundet Output Stability).

Jednowymiarowy liniowy układ czasowo dyskretny scharakteryzowany jest operatorem:

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{M}} x(n, m) s(m), \quad n \in \mathcal{N} \quad (1.1)$$

Z fizycznego punktu widzenia rozpatrywane tu będą tylko operatory przyczynowe, tj. takie, dla których aktualna wartość sygnału wyjściowego zależy tylko od aktualnej i przeszłych wartości sygnału wejściowego. Wynika stąd, że odpowiedź impulsowa x takiego układu musi spełniać warunek:

$$x(n, m) = 0 \quad \text{dla} \quad m > n. \quad (1.2)$$

Inaczej mówiąc, odpowiedź impulsową x układu przyczynowego można przedstawić w postaci macierzy n i e s k o ń c z o n e j dolnej trójkątnej. Suma i iloczyn (o ile on istnieje) takich macierzy są również ma-

cierzami dolnymi trójkątnymi, zatem zbiór macierzy dolnych trójkątnych tworzy algebrę. Także odwrotność macierzy nieskończonej dolnej trójkątnej (o ile istnieje) jest też macierzą dolną trójkątną.

Na algebrę macierzową układów przyczynowych pierwszy zwrócił uwagę FRIEDLAND [20]. Opis układów za pomocą macierzy dolnych trójkątnych stosują też CRUZ [12] i NAYLOR [34]. Należy jednak podkreślić, że wszyscy oni stosują macierze o skończonych wymiarach ograniczając się do skończonej liczby próbek sygnałów. Podejście takie jest wygodne z punktu widzenia wykonywania obliczeń, ale nie jest wystarczające, bowiem nie pozwala na badanie istnienia rozwiązań równań, stabilności, ani też na badanie zachowania się sygnałów w nieskończoności. Niniejsza praca, oparta na teorii algebr Banacha operatorów, a nie na teorii macierzy o skończonych rozmiarach, wolna jest od tych niedostatków.

Operator liniowego układu czasowo niezmienniczego komutuje z operatorem przesunięcia, zatem - jak nietrudno wykazać - ma postać splotu:

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}} x(n-m)s(m), \quad n \in \mathcal{N}, \quad (1.3)$$

przy czym ze względu na przyczynowość odpowiedź impulsowa x ma własności: $x(n) = 0$ dla wszystkich $n < 0$.

Wielowymiarowy liniowy, czasowo zmienny, czasowo dyskretny układ, oznaczany w skrócie przez MLTVSDS (ang. Multidimensional Linear Time Varying Sampled Data System), scharakteryzowany jest operatorem:

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} x(n,m)s(m), \quad n \in \mathcal{N}^M. \quad (1.4)$$

Przyczynowość oznacza tu, że odpowiedź impulsowa znika, jeżeli co najmniej dla jednego $i \in \{1, \dots, M\}$, $n_i - m_i < 0$. Zatem warunkiem przyczynowości MLTVSDS jest:

$$x(n,m) = 0 \quad \text{dla} \quad n-m \notin \mathcal{N}_+^M. \quad (1.5)$$

Wielowymiarowy liniowy, czasowo niezmienniczy, czasowo dyskretny układ, w skrócie MLTISDS (ang. Multidimensional Linear Time Invariant Sampled Data System), opisany jest operatorem wielowymiarowego splotu:

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} x(n-m)s(m), \quad n \in \mathcal{N}^M. \quad (1.6)$$

Ze względu na przyczynowość odpowiedź impulsowa spełnia warunek:

$$x(n) = 0 \quad \text{dla} \quad n \notin \mathcal{N}_+^M.$$

MLTISDS bywa też nazywany wielowymiarowym filtrem cyfrowym.

Warunek konieczny i dostateczny stabilności BIBO dla MLTISDS podaje następujące

TWIERDZENIE 1.1

Przyczynowy operator splotu (1.6) odwzorowuje $L^\infty(\mathcal{N}^M)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in L(\mathcal{N}_+^M)$.

Dowód dostateczności jest oczywisty. Aby wykazać konieczność, stosuje się dowód nie wprost. Niech $x \notin L(\mathcal{N}_+^M)$. Wówczas szereg $\sum_{\|m\|=0}^{\infty} |x(m)|$ jest rozbieżny. Wybierając sygnał wejściowy $s \in L^\infty(\mathcal{N}^M)$ tak, aby:

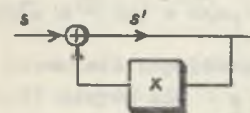
$$s(n) = \exp[-j \arg x(-n)],$$

otrzymuje się:

$$[X(s)](0) = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} x(-m)s(m) = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} |x(-m)| = \sum_{m \in \mathcal{N}^M} |x(m)|,$$

a zatem $X(s) \notin L^\infty(\mathcal{N}^M)$, co oznacza sprzeczność. \square

Niech x będzie odpowiedzią impulsową wielowymiarowego filtra cyfrowego z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego (rys. 1.1). Niech $x \in L(\mathcal{N}_+^M)$, co oznacza, że filtr z otwartą pętlą jest stabilny.



Rys. 1.1. MLTISDS ze sprzężeniem zwrotnym

Zagadnienie stabilności filtra z zamkniętą pętlą sprzężenia sprowadza się do podania warunku koniecznego i dostatecznego, przy którym odpowiedź impulsowa filtra z zamkniętą pętlą, wyrażona poprzez x za pomocą ułamka splotowego, również należy do $L(\mathcal{N}_+^M)$. Tak postawiony problem wygodnie jest rozwiązywać z zastosowaniem pojęcia algebry Banacha.

Algebrą Banacha nazywa się zbiór tworzący jednocześnie dwie struktury: przestrzeń Banacha i algebrę. Jest to przestrzeń Banacha, w której określono mnożenie łączne, liniowe ze względu na każdy czynnik z osobna, łączne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone, z elementem neutralnym (jednością) e : $ex = xe = x$, $\|e\| = 1$, spełniające warunek:

$$\|xy\| < \|x\| \|y\|$$

W paragrafie 3.1 wykazuje się, że przestrzeń $L(\mathcal{N}_+^M)$ z normą:

$$\|x\| = \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} |x(n)|$$

i mnożeniem splotowym:

$$[xy](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}_+^M} x(n-m)y(m)$$

tworzy komutatywną algebrę Banacha. Jeżeli teraz x jest odpowiedzią impulsową układu z otwartą pętlą, to odpowiedzią impulsową wejście s , odchyłka s' (rys. 1.1) układu z zamkniętą pętlą jest:

$$(e-x)^{-1},$$

gdzie e jest jedyneką splotową, a potęga (-1) oznacza odwrotność splotową. W ten sposób zagadnienie stabilności filtra ze sprzężeniem zwrotnym sprowadzono do warunku istnienia odwrotności elementu $e-x$ z pewnej algebry Banacha. Warunek ten można efektywnie sformułować, jeżeli odwzoruje się izomorficznie algebrę Banacha na algebrę C - wartościowych funkcji analitycznych w pewnym obszarze C^M . Rolę takiego izomorfizmu¹⁾ spełnia przekształcenie Gelfanda. Wówczas, jak to pokazuje się w paragrafie 3.3, warunki konieczne i dostateczne stabilności MLTISDS sprowadzają się do warunków niezzerowania się pewnych funkcji zespolonych wielu zmiennych na pewnym ograniczonym domkniętym obszarze hiperpłaszczyzny C^M .

Analogicznie stawia się zagadnienie stabilności wielowymiarowych układów czasowo ciągłych. Wówczas odpowiednik operatora splotowego (1.6) ma postać:

$$[X(s)](t) = \int_{\mathcal{R}^M} x(t-\tau)s(\tau)d\tau, \quad t \in \mathcal{R}^M, \quad (1.7)$$

a warunek przyczynowości:

$$x(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \notin \mathcal{R}_+^M.$$

Czasowo ciągły wariant twierdzenia 1.1 ma postać:

Przyczynowy operator splotu (1.7) odwzorowuje $L^\infty(\mathcal{R}^M)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in L(\mathcal{R}_+^M)$.

¹⁾ Na ogół jest to homomorfizm.

Takie postawienie zagadnienia stabilności układów wielowymiarowych pojawia się w 1973 roku, kiedy to J.H. JUSTICE i J.L. SHANKS w krótkim artykule [27] rozwiązują zagadnienie stabilności wielowymiarowych filtrów cyfrowych za pomocą tauberowskiego twierdzenia Wienera. Nie stosują oni jednak algebr Banacha w pełnym tego słowa znaczeniu.

Stabilność liniowych układów czasowo zmiennych stawia się podobnie, z tym że rozwiązanie problemu staje się o wiele trudniejsze. Na ogół nie można tu podać warunków koniecznych i wystarczających stabilności, a tylko warunki wystarczające. Ilustruje to przykład przedstawiony w paragrafie 2.3. Podobne zagadnienia rozpatrują też: WILLEMS [53], VIDYASAGAR [56], ZAMES i KALIMAN [59].

Teoria sygnałów wielowymiarowych ma różne zastosowania: przetwarzanie sygnałów sejsmicznych, poprawianie jakości obrazów fotograficznych, sporządzanie map magnetycznych, rozwiązywanie zagadnień brzegowych i inne.

1.2. Zastosowania w teorii układów nieliniowych

Również układy nieliniowe wymagają wprowadzenia pojęcia sygnału wielowymiarowego. Na przykład operator układu pokazanego na rys. 1.2, złożonego z p równoległych LTISDS "spiętych" mnożnikiem, ma postać:

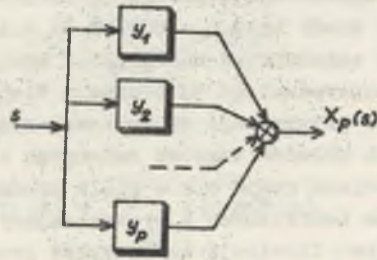
$$[X_p(s)](n) = \sum_{m_1 \in \mathcal{N}} \dots \sum_{m_p \in \mathcal{N}} y_1(n-m_1) \dots y_p(n-m_p) s(m_1) \dots s(m_p), \quad n \in \mathcal{N}$$

Ogólniej, operator ten może być zapisany w formie:

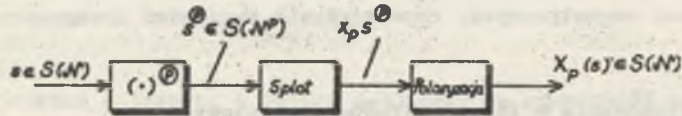
$$[X_p(s)](n) = \sum_{m=(m_1, \dots, m_p) \in \mathcal{N}^p} x_p(nI-m) s^{\textcircled{D}}(m), \quad n \in \mathcal{N}, \quad (1.8)$$

gdzie $s^{\textcircled{D}}(m) = s(m_1) \dots s(m_p)$

a odpowiedź impulsowa x_p spełnia warunek przyczynowości. Operator typu (1.8) nazywa się wielomianowym operatorem jednorodnym stopnia p . Składa się on z trzech działań: operatora $(\cdot)^{\textcircled{D}}$ działającego z $S(\mathcal{N})$ do $S(\mathcal{N}^p)$, splotu z wielowymiarową odpowiedzią impulsową x_p i operacji wyrównania zmiennych (polaryzacji) polegającej na obliczeniu wartości splotu dla $k=nI$, ($n \in \mathcal{N}$). Ilustruje to rys. 1.3. Zatem przyczynowy operator jednorodny jest jednoznacznie scharakteryzowany wielowymiarową odpowiedzią impulsową x_p , a z twierdzenia 1.1 wynika, że odwzorowuje on $L^\infty(\mathcal{N})$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x_p \in L(\mathcal{N}_+^p)$.



Rys. 1.2. Przykład układu nieliniowego złożonego ze skończonej liczby LTISDS i mnożnika



Rys. 1.3. Schemat blokowy operatora jednorodnego

Szerszą klasę układów nieliniowych opisuje operator typu:

$$P_m(s) = \sum_{i=1}^m X_i(s), \quad (1.9)$$

gdzie X_i jest operatorem jednorodnym stopnia i . Nazywa się on operatorem wielomianowym stopnia m . Jeżeli szereg nieskończony:

$$P(s) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(s) \quad (1.10)$$

jest zbieżny w określonym sensie (paragraf 4.5), to wyrażenie (1.10) definiuje operator analityczny. Operatory analityczne obejmują szeroką klasę układów nieliniowych. Każdy operator analityczny jest scharakteryzowany nieskończonym ciągiem odpowiedzi impulsowych o narastających wymiarach. Zatem układ analityczny identyfikuje się z nieskończonym ciągiem wielowymiarowych filtrów cyfrowych.

Analogicznie wprowadza się czasowo zmienny operator jednorodny:

$$[X_p(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{N}^p} x_p(n, m) s^{\textcircled{p}}(m), \quad n \in \mathcal{N}, \quad (1.11)$$

którego odpowiedź impulsowa spełnia warunek przyczynowości:

$$x(n, m) = 0 \text{ dla } nI - m \notin \mathcal{N}_+^p,$$

a następnie poprzez wyrażenia (1.9) i (1.10) definiuje się operatory wielomianowe i analityczne.

Jednorodny operator czasowo ciągły określa się podobnie jak dla czasu dyskretnego:

$$[X_p(s)](t) = \int_{\mathcal{R}^p} x_p(tI - \tau) s^{\textcircled{p}}(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{R} \quad (1.12)$$

w przypadku czasowo niezmienniczym oraz:

$$[X_p(s)](t) = \int_{\mathcal{R}^p} x_p(t, \tau) s^{\textcircled{p}}(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{R}, \quad (1.13)$$

w przypadku czasowo zmiennym, gdzie:

$$s^{\textcircled{p}}(\tau) = s(\tau_1) \dots s(\tau_p).$$

Odpowiedzi impulsowe operatorów (1.12) i (1.13) spełniają warunki przyczynowości, a więc odpowiednio $x_p(\tau) = 0$ dla $\tau \notin \mathcal{N}_+^p$ i $x_p(t, \tau) = 0$ dla $tI - \tau \notin \mathcal{N}_+^p$.

Klasyfikację operatorów analitycznych czasowo niezmienniczych, czasowo ciągłych przeprowadził SMETS w pracy [49]. Zastosowaniem funkcji zespolonych wielu zmiennych w teorii układów analitycznych poświęcone są prace [4] i [31]. Zagadnienia identyfikacji układów nieliniowych czasowo ciągłych przy użyciu operatorów analitycznych, metodą częstotliwościową, poruszono w pracach [5], [55]. W pracach [24] i [42] podano pewne szczególne metody syntezy operatorów wielomianowych czasowo ciągłych. Ważnym zagadnieniem jest problem zbieżności szeregów nieskończonych typu (1.10). Jest to jednocześnie problem trudny, dlatego istnieje stosunkowo niewiele prac na ten temat. Najdalej sięgające wyniki dotyczące zbieżności szeregów funkcjonalnych typu (1.10) znajdują się w pracach CHRISTENSENA i TROTTEA [10, 51, 62]. Wyniki te jednak nie zadowalają w pełni. W niniejszej pracy uzyskano kilka nowych rezultatów:

- (I) sformułowano warunki konieczne i dostateczne stabilności BIBO oraz stabilności asymptotycznej układów opisanych operatorami analitycznymi (twierdzenia 5.1, 5.2, 5.3);
- (II) sformułowano warunki konieczne i dostateczne stabilności asymptotycznej odpowiedzi okresowej nieliniowych układów analitycznych z okresowo zmiennymi parametrami (twierdzenie 5.7);

(III) podano warunki dostateczne na to, aby operator układu zadany w postaci uwikłanej można było rozwikłać za pomocą odpowiedniego operatora analitycznego (twierdzenia 4.4, 5.8) oraz podano algorytm takiego rozwikłania (paragraf 4.5).

Ponadto przedstawiono metodę identyfikacji układu operatorem wielomianowym odmienną i metodycznie prostszą od metod częstotliwościowych opisanych w pracach [5] i [55], podano w paragrafie 4.4 prostą metodą syntezy operatora wielomianowego czasowo dyskretnego oraz wprowadzono operatory analityczne bezpośrednio w przestrzeni sygnałów okresowych służące do analizy stanów ustalonych układów nieliniowych pobudzanych okresowo.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA TEORII ALGEBR BANACHA

Celem tego rozdziału jest przedstawienie najważniejszych pojęć i twierdzeń teorii algebr Banacha niezbędnych do zastosowań w niniejszej pracy. Większość z tych twierdzeń można znaleźć u RUDINA [40], ale aby zwiększyć przystępność tej pracy, zdecydowano się na podanie ich wraz z dowodami. W zastosowaniach do teorii stabilności wielowymiarowych filtrów cyfrowych największą rolę odgrywa przekształcenie Gelfanda oraz wszystkie twierdzenia dostarczające warunków koniecznych i dostatecznych istnienia odwrotności pojedynczych elementów komutatywnej algebry Banacha, czy też ich układów. Przekształcenie Gelfanda znajduje też zastosowanie w teorii nieliniowych czasowo niezmienniczych układów analitycznych. Do badania stabilności liniowych układów czasowo zmiennych znajdują zastosowanie twierdzenia dające warunki wystarczające istnienia odwrotności elementów niekomutatywnej algebry Banacha.

2.1. Niekomutatywne algebry i podstawowe własności widm

Algebrą Banacha nazywa się przestrzeń Banacha \mathfrak{B} z normą $\|\cdot\|$, w której określono mnożenie $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B})$ spełniające następujące warunki:

$$\bigwedge_{x,y,z \in \mathfrak{B}, \alpha \in \mathbb{C}} \begin{aligned} & x(yz) = (xy)z, \quad (x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz, \\ & \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|; \quad \bigvee_{e \in \mathfrak{B}} \bigwedge_{x \in \mathfrak{B}} xe = ex = x, \quad \|e\| = 1. \end{aligned}$$

Założenie istnienia jedności nie zmniejsza ogólności przedstawionej definicji, bowiem jedność można zawsze wprowadzić za pomocą następującej procedury: Niech \mathfrak{B}_1 składa się ze wszystkich par (x, α) , gdzie $x \in \mathfrak{B}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Jeżeli działania dodawania i mnożenia przez skalar zdefiniować następująco: $(x, \alpha) + (y, \beta) = (x+y, \alpha+\beta)$, $\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta \alpha)$, a działanie mnożenia i normę w \mathfrak{B}_1 : $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha \beta)$, $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$, to \mathfrak{B}_1 spełnia wszystkie aksjomaty definicji algebry Banacha, a przy tym posiada jedność $e = (0, 1)$. W szczególnym przypadku każdy element $x \in \mathfrak{B}$ może być utożsamiony z elementem $(x, 0) \in \mathfrak{B}_1$.

Z nierówności $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ łatwo wynika ciągłość mnożenia, tj.:
 $x_n \rightarrow x, \quad y_n \rightarrow y \Rightarrow x_n y_n \rightarrow xy$.

Przez $G(\mathfrak{B})$ oznaczany będzie zbiór wszystkich elementów algebry \mathfrak{B} posiadających odwrotności, tj.:

$$G(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} : \exists x^{-1} \in \mathfrak{B} \text{ takie, że } x x^{-1} = x^{-1} x = e\}.$$

Widmem $Sp(x)$ elementu $x \in \mathfrak{B}$ nazywa się zbiór:

$$Sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(\mathfrak{B})\}.$$

Zbiór $\tilde{Sp}(x) = \mathbb{C} - Sp(x)$ nazywa się zbiorem rezolwenty elementu x , a odwzorowanie $r_x: \tilde{Sp}(x) \rightarrow G(\mathfrak{B})$ takie, że:

$$r_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$$

nazywa się rezolwentą elementu x .

TWIERDZENIE 2.1

Jeżeli \mathfrak{B} jest algebrą Banacha, $x \in \mathfrak{B}$ i $\|x\| < 1$, to:

(I) $(e - x) \in G(\mathfrak{B})$ (2.1)

(II) $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(III) $\frac{1}{1 + \|x\|} < \|(e-x)^{-1}\| < \frac{1}{1 - \|x\|}$ (2.2)

D o w ó d. Jeżeli utworzyć w \mathfrak{B} następujący ciąg sum:

$$s_n = e + x + \dots + x^n \tag{2.3}$$

to ma miejsce oszacowanie:

$$\|s_m - s_n\| = \|x^m + x^{m-1} + \dots + x^{n+1}\| < \|x\|^m + \|x\|^{m-1} + \dots + \|x\|^{n+1}, \quad m > n,$$

z którego wynika, że przy $\|x\| < 1$ istnieje dowolnie małe $\epsilon > 0$, takie, że dla $m, n > N$ zachodzi nierówność $\|s_m - s_n\| < \epsilon$. Zatem $\{s_n\}$ jest ciągiem podstawowym w \mathfrak{B} . Ciąg ten ma w \mathfrak{B} granicę s , gdyż \mathfrak{B} jest przestrzenią zupełną. Zachodzi równość:

$$s_n(e-x) = (e-x)s_n = e - x^{n+1} \tag{2.4}$$

Ponieważ $\|x^n\| < \|x\|^n \rightarrow 0$, to z równości (2.4) na mocy ciągłości mnożenia wynika, że s jest elementem odwrotnym do $(e-x)$, a więc $(e-x) \in G(\mathfrak{B})$. Prócz tego z wyrażenia (2.3) otrzymuje się:

$$s = (e-x)^{-1} = e + x + x^2 + \dots$$

Oszacowanie normy elementu s_n w wyrażeniu (2.3) daje:

$$\|s_n\| < 1 + \|x\| + \|x\|^2 + \dots + \|x\|^n = \frac{1 - \|x\|^{n+1}}{1 - \|x\|},$$

skąd wynika, że:

$$\|s\| < \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

Zachodzi ponadto:

$$e = (e-x)s = s - xs,$$

skąd otrzymuje się oszacowanie:

$$1 = \|s - xs\| < \|s\| + \|xs\| < (1 + \|x\|) \|s\|.$$

Zatem:

$$\|s\| > \frac{1}{1 + \|x\|}. \quad \square$$

Z twierdzenia 2.1 wynika następujący

Wniosek

$G(\mathfrak{B})$ jest otwartym zbiorem w \mathfrak{B} .

D o w ó d. Niech $x \in G(\mathfrak{B})$. Z tożsamości $x-h = x(e-x^{-1}h)$ i z twierdzenia 2.1 (I) wynika, że przy $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$, $(x-h) \in G(\mathfrak{B})$, a więc x należy do $G(\mathfrak{B})$ wraz z pewnym otoczeniem. Zatem zbiór $G(\mathfrak{B})$ jest otwarty.

TWIERDZENIE 2.2

Jeżeli \mathfrak{B} jest algebrą Banacha i $x \in \mathfrak{B}$, to:

- (I) rezolwenta elementu x jest silnie analityczną \mathfrak{B} -wartościową funkcją na $\tilde{Sp}(x)$,
- (II) $Sp(x)$ jest zbiorem niepustym domkniętym i ograniczonym.

D o w ó d. Niech $|\lambda| > \|x\|$. Podstawiając $y = \lambda^{-1}x$ w wyrażeniu $\lambda e - x = \lambda(e - \lambda^{-1}x)$ otrzymuje się $\|y\| < 1$, zatem na mocy twierdzenia 2.1 (I), $(e-y) \in G(\mathcal{B})$, a więc i $(\lambda e - x) \in G(\mathcal{B})$. Czyli wówczas $\lambda \notin \text{Sp}(x)$, co dowodzi, że $\text{Sp}(x)$ jest zbiorem ograniczonym.

Gdy $\lambda, \mu \in \widetilde{\text{Sp}}(x)$, to z określenia rezolwenty wynika, że:

$$\lambda e - x = [r_x(\lambda)]^{-1}$$

$$\mu e - x = [r_x(\mu)]^{-1},$$

skąd:

$$r_x(\mu) - r_x(\lambda) = (\lambda - \mu)r_x(\mu)r_x(\lambda). \quad (2.5)$$

Ma zatem miejsce następujące oszacowanie:

$$\|r_x(\mu) - r_x(\lambda)\| \leq |\mu - \lambda| \|r_x(\mu)\| \|r_x(\lambda)\|,$$

z którego wynika, że funkcja r_x jest ciągła na $\widetilde{\text{Sp}}(x)$. Zatem z równości (2.5) otrzymuje się:

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{r_x(\mu) - r_x(\lambda)}{\mu - \lambda} = - [r_x(\lambda)]^2,$$

co dowodzi, że funkcja r_x jest silnie analityczna na $\widetilde{\text{Sp}}(x)$.

Dalej, z faktu, że $\widetilde{\text{Sp}}(x) = r_x^{-1}[G(\mathcal{B})]$, z ciągłości rezolwenty r_x na $\widetilde{\text{Sp}}(x)$, z wzajemnej jednoznaczności odwzorowania $y \rightarrow y^{-1}$ i z wniosku do twierdzenia 2.1 (że $G(\mathcal{B})$ jest zbiorem otwartym w \mathcal{B}) wynika, że $\widetilde{\text{Sp}}(x)$ jest zbiorem otwartym. Zatem $\text{Sp}(x)$ jest domknięty.

Pozostaje do udowodnienia, że $\text{Sp}(x)$ jest zbiorem niepustym. Niech będzie przeciwnie. Wówczas rezolwenta r_x jest analityczna na \mathbb{C} . Niech f będzie dowolnym liniowym funkcjonałem zadany na \mathcal{B} , a wtedy $f[r_x(\cdot)]$ jest funkcją całkowitą. Z twierdzenia 2.1 (III) otrzymuje się oszacowanie:

$$|f[r_x(\lambda)]| \leq \|f\| \|r_x(\lambda)\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|x\|}$$

z którego wynika, że $f[r_x(\lambda)] \rightarrow 0$ przy $|\lambda| \rightarrow \infty$. Zatem z twierdzenia Liouville'a o funkcjach całkowitych ograniczonych wynika, że $f[r_x(\cdot)]$ jest funkcją zerową na \mathbb{C} , czyli r_x też jest funkcją zerową (ze względu na dowolność f), a więc $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} r_x(\lambda) \in G(\mathcal{B})$, co prowadzi do sprzeczności. \square

Z twierdzenia 2.2 wynika, że dla dowolnego $x \in \mathcal{B}$ istnieje liczba $\varphi(x) = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(x)} |\lambda|$, zwana promieniem spektralnym elementu

tu x . Z dowodu twierdzenia 2.2 wynika, że zbiór $\text{Sp}(x)$ leży całkowicie wewnątrz koła o promieniu $\|x\|$ i środka w punkcie zero, a więc:

$$\varphi(x) \leq \|x\|.$$

TWIERDZENIE 2.3 (GELFANDA-MAZURA)

Jeżeli w algebrze Banacha \mathcal{B} każdy niezerowy element posiada odwrotność, to \mathcal{B} jest izometrycznie izomorficzna z ciałem \mathbb{C} .

D o w ó d. Z założenia wynika, że $\lambda e - x \in G(\mathcal{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda e - x = 0$, stąd $\lambda \in \text{Sp}(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda e = x$. Zatem dla każdego $x \in \mathcal{B}$ zbiór $\text{Sp}(x)$ składa się zawsze z jednego punktu $\lambda(x)$ takiego, że $\lambda(x)e = x$. Czyli odwzorowanie $x \rightarrow \lambda(x)$ jest izomorfizmem algebry \mathcal{B} i ciała \mathbb{C} , przy czym izomorfizm ten jest izometryczny, bowiem $|\lambda(x)| = \|(\lambda(x)e)\| = \|x\|$ dla dowolnego $x \in \mathcal{B}$. \square

TWIERDZENIE 2.4

Niech \mathcal{B} będzie algebrą Banacha, $x \in \mathcal{B}, \Omega$ - otwarty zbiór w \mathbb{C} , $\text{Sp}(x) \subset \Omega$. Istnieje takie $\varepsilon > 0$, że $\text{Sp}(x+y) \subset \Omega$, jeżeli tylko $y \in \mathcal{B}$ i $\|y\| < \varepsilon$.

D o w ó d. Z twierdzenia 2.2 (I) wynika, że funkcja $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ jest ciągła względem λ na $\widetilde{\text{Sp}}(x)$. Z twierdzenia 2.1 (III), dla $|\lambda| > \|x\|$ wynika oszacowanie:

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|},$$

z którego widać, że $\|(\lambda e - x)^{-1}\| \rightarrow 0$ przy $|\lambda| \rightarrow \infty$. Istnieje więc taka liczba dodatnia N , że

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| < N$$

dla wszystkich $\lambda \in \Omega$. Jeżeli $y \in \mathcal{B}$, $\|y\| < \frac{1}{N}$ i $\lambda \in \Omega$, to:

$$\|(\lambda e - x)^{-1}y\| < 1,$$

a zatem z tożsamości:

$$\lambda e - (x+y) = (\lambda e - x) [e - (\lambda e - x)^{-1}y]$$

i z twierdzenia 2.1 (I) wynika, że $\lambda e - (x+y) \in G(\mathcal{B})$. Dlatego $\lambda \notin \text{Sp}(x+y)$. Podstawienie $\varepsilon = \frac{1}{N}$ kończy dowód. \square

2.2. Funkcje analityczne jednej zmiennej w algebrach Banacha i niektóre twierdzenia o istnieniu odwrotności pojedynczych elementów

Niech L będzie zorientowanym zwartym łukiem w \mathbb{C} , a f funkcją ciągłą określoną na L o wartościami w \mathcal{B} . Całką funkcji f po łuku L nazywa się granicę:

$$\int_L f(\lambda) d\lambda = \lim_{\max|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k),$$

gdzie: $\lambda_1, \lambda_2 \in L$, a punkt ξ_k leży na łuku L między punktami λ_k i λ_{k+1} . Punkt λ_{k+1} jest późniejszy w sensie orientacji łuku od punktu λ_k . Z definicji tej wynika, że jeżeli Λ jest dowolnym liniowym ograniczonym funkcjonałem zadanym na \mathcal{B} ($\Lambda \in \mathcal{B}^*$), to:

$$\Lambda \left[\int_L f(\lambda) d\lambda \right] = \int_L [\Lambda f(\lambda)] d\lambda$$

Jeżeli M_x jest operatorem lewostronnego mnożenia przez ustalony element $x \in \mathcal{B}$, a $\Lambda \in \mathcal{B}^*$, to $\Lambda \circ M_x \in \mathcal{B}^*$, zatem:

$$\Lambda \circ M_x \left[\int_L f(\lambda) d\lambda \right] = \int_L [\Lambda M_x(f(\lambda))] d\lambda = \Lambda \left[\int_L M_x(f(\lambda)) d\lambda \right],$$

więc:

$$x \int_L f(\lambda) d\lambda = \int_L x f(\lambda) d\lambda$$

Podobnie można wykazać, że:

$$\int_L f(\lambda) d\lambda x = \int_L [f(\lambda) x] d\lambda$$

Formuły te są użyteczne podczas dowodzenia twierdzeń, w których występują całki \mathcal{B} -wartościowych funkcji zadanym w \mathbb{C} .

Niech f będzie \mathbb{C} -wartościową funkcją wymierną zadaną w \mathbb{C} , tj.:

$$f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \beta_n \lambda^n + \sum_{m, k \geq 0} \delta_{mk} (\lambda - \alpha_m)^{-k}, \quad (2.6)$$

gdzie sumy zawierają skończoną liczbę składników. Za pomocą funkcji f można następująco określić \mathcal{B} -wartościową funkcję \tilde{f} zadaną w \mathcal{B} :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \geq 0} \beta_n x^n + \sum_{m, k} \delta_{mk} (x - \alpha_m e)^{-k}, \quad (2.7)$$

gdzie $\alpha_m \notin \text{Sp}(x)$.

TWIERDZENIE 2.5

Niech Ω będzie otwartym zbiorem w \mathbb{C} takim, że $\text{Sp}(x) \subset \Omega$. Jeżeli funkcja (2.6) jest analityczna w Ω , a krzywa zamknięta (kontur) $\Gamma \subset \Omega$ obejmuje $\text{Sp}(x)$, to:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} r_x(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad (2.8)$$

gdzie r_x jest rezolwentną elementu $x \in \mathcal{B}$.

D o w ó d. Wystarczy wykazać, że przy $x \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \text{Sp}(x)$ zachodzi:

$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (\alpha e - x)^{-1} \quad (2.9)$$

dla $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Z tożsamości:

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda) (\alpha e - x)^{-1} (\lambda e - x)^{-1}$$

wynika, że:

$$\begin{aligned} y_n &= (\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^{n+1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \\ &= (\alpha e - x)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1} y_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pierwszy składnik sumy w wyrażeniu (2.10) jest równy zero, ponieważ funkcja $(\alpha - \lambda)^n$ jest analityczna w obszarze objętym przez kontur Γ . Otrzymuje się zatem:

$$y_n = (\alpha e - x)^{-1} y_{n+1} \quad (2.11)$$

Stosując twierdzenie 2.1 (I) i (II) otrzymuje się rozwinięcie rezolwentny r_x w szereg potęgowy:

$$r_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^n, \quad |\lambda| > \|x\|. \quad (2.12)$$

Jeżeli wybrać kontur Γ w postaci okręgu o promieniu $\rho_1 > \rho(x)$ i scałkować szereg (2.12) wyraz po wyrazie po tym konturze, to otrzyma się:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} r_x(\lambda) d\lambda = x^0 = e. \quad (2.13)$$

Na zasadzie indukcji z wyrażeń (2.11) i (2.13) wynika słuszność formuły (2.9). \square

W teorii algebr Banacha można udowodnić twierdzenie analogiczne do 2.5 przy znacznie słabszych założeniach dotyczących funkcji f , według których funkcja ta nie musi być wymierna. Przedtem jednak trzeba podać pewne określenia.

Niech \mathfrak{B} będzie algebra Banacha, a Ω otwartym zbiorem w \mathbb{C} . Symbol $\mathcal{A}(\Omega)$ oznacza algebra wszystkich \mathbb{C} -wartościowych funkcji zadanych w Ω , analitycznych w Ω z mnożeniem określonym w zwykły sposób, tj.: $\bigwedge_{\lambda \in \Omega} r_{\mathfrak{B}}(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$. \mathfrak{B}_{Ω} jest następującym zbiorem:

$$\mathfrak{B}_{\Omega} = \{x \in \mathfrak{B} : \text{Sp}(x) \subset \Omega\}$$

Z twierdzenia 2.4 wynika, że \mathfrak{B}_{Ω} jest zbiorem otwartym w \mathfrak{B} . Niech $\tilde{\mathcal{A}}(\mathfrak{B}_{\Omega})$ oznacza zbiór wszystkich \mathfrak{B} -wartościowych funkcji \tilde{f} zadanych na \mathfrak{B}_{Ω} takich, że:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} r_x(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (2.14)$$

gdzie $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, a kontur Γ leży w Ω i obejmuje $\text{Sp}(x)$.

TWIERDZENIE 2.6

- (I) Zbiór $\tilde{\mathcal{A}}(\mathfrak{B}_{\Omega})$ tworzy algebra, przy czym odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(\mathfrak{B}_{\Omega})$ określone wzorem (2.14) jest izomorfizmem;
- (II) odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(\mathfrak{B}_{\Omega})$ jest ciągłe w następującym sensie $f_n \rightarrow f$, $f_n \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \bigwedge_{x \in \mathfrak{B}_{\Omega}} \tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$.

D o w ó d. Norma $\|r_x(\lambda)\|$ jest ograniczona dla każdego $\lambda \in \Gamma$, zatem jeżeli $|f(\lambda) - f_n(\lambda)| < \varepsilon$ dla każdej funkcji $f_n \in \mathcal{A}(\Omega)$ i każdego $\lambda \in \Gamma$, to $\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)\| < \varepsilon \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} r_x(\lambda) d\lambda \right|$ dla każdego $x \in \mathfrak{B}_{\Omega}$. Kończy to dowód tezy (II).

Niech \tilde{f} będzie funkcją zerową, tj.: $\bigwedge_{x \in \mathfrak{B}_{\Omega}} \tilde{f}(x) = 0$ (0 jest zerem algebry \mathfrak{B}). Wówczas dla dowolnego $\alpha \in \Omega$ z wyrażenia (2.14) otrzymuje się:

$$0 = \tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha)e,$$

²⁾Zbieżność $f_n \rightarrow f$ jest niemal jednostajna.

skąd wynika, że f też jest funkcją zerową. Ponieważ odwzorowanie (2.14) jest liniowe, więc jest ono jednoznaczne. Aby wykazać multiplikatywność odwzorowania (2.14), trzeba wybrać dwie funkcje wymierne $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Wówczas z twierdzenia 2.5 wynika, że jeżeli $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$, to $\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ dla każdego $x \in \mathfrak{B}_{\Omega}$. Na podstawie twierdzenia Rungego ([41], tw. 13.9) dowolne funkcje $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ można aproksymować jednostajnie na zwartych podzbiorach Ω ciągami funkcji wymiernych $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$. Zatem na mocy udowodnionej poprzednio tezy (II) odwzorowanie określone wyrażeniem (2.14) jest multiplikatywne dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. Czyli odwzorowanie to jest izomorfizmem. \square

Następne twierdzenie dostarcza warunek konieczny i dostateczny istnienia odwrotności pojedynczego elementu algebry Banacha, a także podaje regułę odwzorowania widma poprzez funkcję analityczną w jego otoczeniu.

TWIERDZENIE 2.7

Jeżeli $x \in \mathfrak{B}_{\Omega}$ i $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, to:

- (I) $\tilde{f}(x) \in G(\mathfrak{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in \text{Sp}(x)$,
- (II) $\text{Sp}[\tilde{f}(x)] = f[\text{Sp}(x)]$.

D o w ó d. (I) Jeżeli $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in \text{Sp}(x)$, to funkcja $g = f^{-1}$ jest analityczna na zbiorze Ω_1 takim, że $\text{Sp}(x) \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Ponieważ $fg = 1$ na Ω_1 , to z twierdzenia 2.6 (I) wynika, że $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$ dla każdego $x \in \mathfrak{B}_{\Omega_1}$, a więc $\tilde{f}(x) \in G(\mathfrak{B})$. Na odwrót, jeżeli $f(\alpha) = 0$ dla pewnego $\alpha \in \text{Sp}(x)$, to istnieje taka funkcja $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, że dla każdego $\lambda \in \Omega$, $(\lambda - \alpha)u(\lambda) = f(\lambda)$, skąd na podstawie twierdzenia 2.6 (I) otrzymuje się:

$$(x - \alpha e)\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x)(x - \alpha e) = \tilde{f}(x).$$

Ponieważ $x - \alpha e \notin G(\mathfrak{B})$, to $\tilde{f}(x) \notin G(\mathfrak{B})$.

(II) Jeżeli $\beta \in \text{Sp}[\tilde{f}(x)]$, to $\tilde{f}(x) - \beta e \notin G(\mathfrak{B})$, zatem na podstawie udowodnionej tezy (I) istnieje takie $\lambda \in \text{Sp}(x)$, że $f(\lambda) - \beta = 0$, czyli $\beta \in f[\text{Sp}(x)]$. Zatem $\text{Sp}[\tilde{f}(x)] \subset f[\text{Sp}(x)]$. Na odwrót, jeżeli $\beta \in f[\text{Sp}(x)]$, to można znaleźć takie $\mu \in \text{Sp}(x)$, że $f(\mu) - \beta = 0$, a więc na mocy tezy (I) $\tilde{f}(x) - \beta e \in G(\mathfrak{B})$, czyli $\beta \in \text{Sp}[\tilde{f}(x)]$. Zatem $f[\text{Sp}(x)] \subset \text{Sp}[\tilde{f}(x)]$, skąd wynika słuszność tezy (II). \square

Poniższe twierdzenie dotyczy funkcji złożonych. Głosi ono, że jeżeli $h = gef$, to $\tilde{h} = \tilde{g}\tilde{a}\tilde{f}$.

TWIERDZENIE 2.8

Jeżeli: $x \in \Omega_0$, $f \in A(\Omega)$, $\Omega_1 \supset f[Sp(x)]$ (Ω_1 - zbiór otwarty), $g \in A(\Omega_1)$, $\Omega_0 = \{\mu \in \Omega : f(\mu) \in \Omega_1\}$, $h(\lambda) = g[f(\lambda)]$ dla każdego $\lambda \in \Omega_0$, to:

$$\tilde{h}(x) = \tilde{g}[F(x)].$$

D o w ó d. Wybierając kontur Γ_0 obejmujący $Sp(x)$, dla $\mu \in Sp[F(x)] = f[Sp(x)]$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \tilde{g}[F(x)] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} g(\mu) [\mu e - F(x)]^{-1} d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} g(\mu) \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_0} [\mu - f(\lambda)]^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \right] d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} g(\mu) [\mu - f(\lambda)]^{-1} d\mu \right] (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_0} g[f(\lambda)] (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x). \square \end{aligned}$$

Następne twierdzenie daje dwa warunki dostateczne istnienia odwrotności pojedynczego elementu algebry Banacha.

TWIERDZENIE 2.9

Jeżeli istnieje \mathfrak{B} -wartościowa funkcja \tilde{f} zadana w \mathfrak{B} taka, że $\tilde{f}(e) = e$ i jeżeli \tilde{f} spełnia jeden z warunków:

(I) $1 \notin Sp[F(x)],$

(II) $\|\tilde{f}(x)\| < 1,$

to $e - x \in G(\mathfrak{B}).$

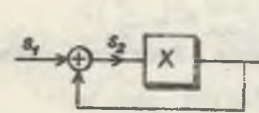
D o w ó d. (I) Niech $(e - x) \notin G(\mathfrak{B}).$ Wówczas $1 \in Sp(x).$ Ponieważ $f(1) = 1$ (twierdzenie 2.5), to $1 \in f[Sp(x)]$, a więc na mocy twierdzenia 2.7 (II), $1 \in Sp[\tilde{f}(x)]$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem. Zatem $(e - x) \in G(\mathfrak{B}).$

(II) Jeżeli $\|\tilde{f}(x)\| < 1$, to na podstawie twierdzenia 2.1 (I), $e - \tilde{f}(x) \in G(\mathfrak{B})$, a więc $1 \notin Sp[\tilde{f}(x)].$ Zatem z części (I) twierdzenia wynika, że $(e - x) \in G(\mathfrak{B}). \square$

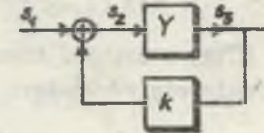
2.3. Przykład zastosowania twierdzeń o istnieniu odwrotności

Nietrudno wykazać, że zbiór wszystkich ograniczonych operatorów liniowych odwzorowujących pewną przestrzeń Banacha w siebie, z mnożeniem rozu-

mianym jako złożenie operatorów i z normą równą normie operatora, tworzy algebrę Banacha.



Rys. 2.1. Schemat układu ze sprzężeniem zwrotnym



Rys. 2.2. Schemat układu z czasowo-zależnym wzmacniaczem w torze powrotnym

Niech na wejście układu ze sprzężeniem zwrotnym, widocznego na rys. 2.1, podaje się sygnały należące do pewnej przestrzeni Banacha A . Operator X układu z otwartą pętlą jest liniowy i ograniczony, należy zatem do pewnej algebry Banacha \mathfrak{B} . Związek między sygnałami wejściowym s_1 , a wyjściowym s_2 określa równanie:

$$[I - X](s_2) = s_1$$

gdzie I jest operatorem tożsamościowym. Warunkiem przynależności sygnału wyjściowego do A jest istnienie odwrotności operatora $I - X$. Warunek dostateczny na to podaje twierdzenie 2.1 (I). Ma on jednak stosunkowo niewielkie znaczenie praktyczne, bo chociaż prosty, jest zbyt rygorystyczny. Twierdzenie 2.9 (II) pozwala złagodzić ten warunek. Można to pokazać na przykładzie układu zawierającego w torze głównym układ czasowo niezmienny scharakteryzowany operatorem splotu Y o odpowiedzi impulsowej y_f a w torze powrotnym wzmacniacz o czasowo zależnym wzmocnieniu k (rys.2.2). Układ taki opisany jest równaniami:

$$[I - X](s_2) = s_1 \tag{2.15}$$

$$s_3 = Y(s_2),$$

gdzie:

$$[X(s)](t) = \int_0^t y(t-\tau)k(\tau)s(\tau)d\tau. \tag{2.16}$$

Jeżeli zbiory $L(\mathfrak{R})$ i $L^\infty(\mathfrak{R})$ unormować odpowiednio: $\|s\|_{L(\mathfrak{R})} = \int_0^\infty |s(t)| dt$, $\|s\|_{L^\infty(\mathfrak{R})} = \text{esssup} |s(t)|$, to stają się one przestrzeniami Banacha. Niech $PC L^\infty(\mathfrak{R})$ będzie podprzestrzenią ciągłych sygnałów okresowych. Jeżeli $y \in L(\mathfrak{R})$ i $k \in PC$, to łatwo zauważyć, że operator X określony wzorem (2.16) odwzorowuje $L(\mathfrak{R})$ w siebie. Symbolem (\cdot) w tym paragrafie oznaczane bę-

dzie przekształcenie Fouriera. Ponieważ $[L(\mathcal{R})]^A \in L^\infty(\mathcal{R})$, więc operator \hat{X} zdefiniowany równością:

$$(\hat{X})^A(s) = \hat{X}(s)$$

odwzorowuje $L^\infty(\mathcal{R})$ w siebie. Dokonując przekształceń Fouriera równań (2.15) otrzymuje się równania:

$$\begin{aligned} [I - \hat{X}] (\hat{s}_2) &= \hat{s}_1 \\ \hat{s}_3 &= \hat{Y}(\hat{s}_2) \end{aligned}$$

równoważne równaniom (2.15). Niech $\hat{s}_1 \in L^\infty(\mathcal{R})$. Warunek przynależności \hat{s}_2 i \hat{s}_3 do $L^\infty(\mathcal{R})$ jest równoważny warunkowi istnienia odwrotności operatora $I - \hat{X}$.

Funkcja k zadana jest szeregiem Fouriera:

$$k(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n e^{jn\Omega t}$$

przy czym $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |k_n| < \infty$.

Zgodnie z twierdzeniem 2.9 (II) można wybrać $\tilde{f}(x) = x^2$. Po łatwych przekształceniach otrzymuje się:

$$[\hat{X}(\hat{s})](j\omega) = \hat{y}(j\omega) \sum_{n \in \mathcal{N}} k_n \hat{s}[j(\omega - n\Omega)]$$

$$[\hat{X}^2(\hat{s})](j\omega) = \hat{y}(j\omega) \sum_m k_m \hat{y}[j(\omega - m\Omega)] \sum_n k_n \hat{s}[j(\omega - (m+n)\Omega)]$$

skąd wynikają oszacowania:

$$|[\hat{X}(\hat{s})](j\omega)| \leq |\hat{y}(j\omega)| \sum_n |k_n| \|\hat{s}\|_{L^\infty(\mathcal{R})}$$

$$|[\hat{X}^2(\hat{s})](j\omega)| \leq \sum_r \left\{ \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \left| \sum_m k_{r-m} k_m \hat{y}(j\omega) \hat{y}[j(\omega - m\Omega)] \right| \right\} |\hat{s}[j(\omega - r\Omega)]|$$

Stąd otrzymuje się:

$$\|\hat{X}(\hat{s})\| \leq \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |\hat{y}(j\omega)| \sum_n |k_n| \|\hat{s}\|$$

$$\begin{aligned} \|\hat{X}^2(\hat{s})\| &< \sum_r \left\{ \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \left| \sum_m k_{r-m} k_m \hat{y}(j\omega) \hat{y}[j(\omega - m\Omega)] \right| \right\} \|\hat{s}\| < \\ &< \left(\sum_m |k_m| \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |\hat{y}(j\omega) \hat{y}[j(\omega - m\Omega)]| \right) \left(\sum_r |k_r| \right) \|\hat{s}\| < \\ &< \sup_{\omega \in \mathcal{R}} |\hat{y}(j\omega) \hat{y}[j(\omega - m\Omega)]| \left(\sum_r |k_r| \right)^2 \|\hat{s}\| \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli spełnione są nierówności:

$$\sup_{\omega \in \mathcal{R}} |\hat{y}(j\omega)| \sum_n |k_n| < 1, \tag{2.17}$$

$$\sup_{\omega \in \mathcal{R}, m \in \mathcal{N}} |\hat{y}(j\omega) \hat{y}[j(\omega - m\Omega)]| \left(\sum_r |k_r| \right)^2 < 1, \tag{2.18}$$

to odpowiednio $\|\hat{X}\| < 1$ i $\|\hat{X}^2\| = \|\tilde{f}(\hat{X})\| < 1$. Nierówność (2.17) czyni zażądanie warunkom twierdzenia 2.1 (I), a nierówność (2.18) warunkom twierdzenia 2.9 (II).

Uzyskane wyniki zastosowano do badania stabilności rozwiązań równania Mathieu:

$$\ddot{s}_2 + 2\mu\dot{s}_2 + (\mu^2 + a)s_2 + (16q \cos 2t)s_2 = s_1 \tag{2.19}$$

gdzie $s_1 \in L(\mathcal{R})$. Wówczas:

$$\hat{y}(j\omega) = - \frac{1}{6^2 + 2\mu 6 + \mu^2 + a} \Big|_{6=j\omega}$$

$$k(t) = 8q(e^{j2t} + e^{-j2t}).$$

Istotnie, oznaczając przez $-Y$ operator rozwiązujący równanie

$$\ddot{s}_2 + 2\mu\dot{s}_2 + (\mu^2 + a)s_2 = s,$$

tj.:

$$s_2 = -Y(s)$$

doprowadza się równanie (2.19) do postaci:

$$s_2 - Y[k(\cdot)s_2(\cdot)] = -Y(s_1),$$

a zatem:

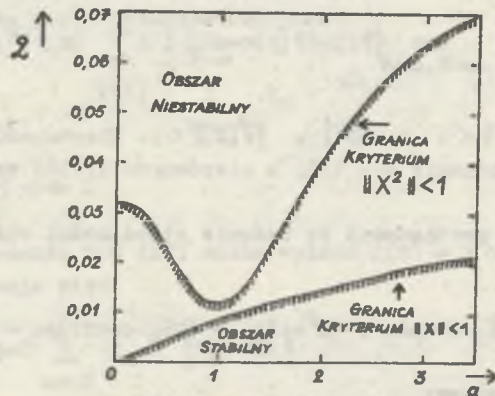
$$[X(s)](\cdot) = Y[k(\cdot)s(\cdot)].$$

W tym przypadku nierówność (2.17) przybiera postać:

$$q < \frac{1}{8} \mu \sqrt{a}, \quad (2.20)$$

a nierówność (2.18) doprowadza się do formy:

$$q < \sqrt{\frac{\mu}{32}} \left\{ a \left[(\sqrt{a}-1)^2 + \frac{\mu^2}{4} \right] \right\}^{1/4} \quad (2.21)$$



Rys. 2.3. Granice obszarów stabilności równania Mathieu

Na rysunku 2.3 pokazano granice stabilności wyznaczone z kryteriów $\|X\| < 1$ (nierówność (2.20)) i $\|X^2\| < 1$ (nierówność (2.21)). Dobrze widoczne jest osłabienie dostatecznego warunku stabilności.

2.4. C-wartościowe homomorfizmy komutatywnych algebr Banacha

Podprzestrzeń liniową J algebry komutatywnej \mathcal{B} nazywa się **ideałem**, jeżeli $\mathcal{B}J \subset J$, przy czym jeżeli $J \neq \mathcal{B}$, to J nazywa się **ideałem właściwym**.

Łatwo wykazać, że:

- (a) żaden ideał właściwy algebry \mathcal{B} nie zawiera elementów z $G(\mathcal{B})$;
- (b) jeżeli J jest ideałem komutatywnej algebry Banacha \mathcal{B} , to domknięcie \bar{J} również jest ideałem.

Istotnie, niech $y \in J \neq \mathcal{B}$ i $y \in G(\mathcal{B})$, wówczas $\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} xy = z \in J$, skąd wynika, że $\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} x = zy^{-1} \in J$, czyli $J = \mathcal{B}$, co prowadzi do sprzeczności. Jeżeli $\{y_n\}$ jest zbieżnym ciągiem w J , to $y_n \rightarrow y \in J$, a z ciągłości mnożenia wynika, że $\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} x y_n \rightarrow xy \in J$, czyli \bar{J} też jest ideałem.

W szczególności z (a) wynika, że żaden ideał właściwy algebry \mathcal{B} nie zawiera jedności.

TWIERDZENIE 2.10

- (I) Jeżeli \mathcal{B} jest komutatywną algebrą z jednością, to każdy jej ideał właściwy zawiera się co najmniej w jednym ideale maksymalnym.
- (II) Jeżeli \mathcal{B} jest komutatywną algebrą Banacha, to każdy jej ideał maksymalny jest domknięty.

D o w ó d. (I) Niech J będzie ideałem właściwym algebry \mathcal{B} , a Q_1 rodziną wszystkich ideałów właściwych algebry \mathcal{B} zawierających J . Rodzina Q_1 jest częściowo uporządkowana według relacji inkluzji. Z twierdzenia Hausdorfa o maksymalności³⁾ wynika, że istnieje maksymalna podrodzina Q_2 rodziny Q_1 , liniowo uporządkowana. Niech M oznacza sumę ideałów wchodzących w skład rodziny Q_2 . M jest ideałem, co wynika z liniowego uporządkowania rodziny Q_2 . Jest oczywiste, że $J \in M$, a ponadto $M \neq \mathcal{B}$, gdyż żaden ideał rodziny Q_2 nie zawiera jedności. Z maksymalności rodziny Q_2 wynika, że M jest ideałem maksymalnym w \mathcal{B} .

(II) Niech M będzie ideałem maksymalnym w \mathcal{B} . Wobec tego ideał M nie może zawierać elementów z $G(\mathcal{B})$. Z wniosku z twierdzenia 2.1 wynika, że $G(\mathcal{B})$ jest otwartym zbiorem w \mathcal{B} . Wobec tego \bar{M} także nie zawiera żadnego elementu z $G(\mathcal{B})$. Zatem \bar{M} jest ideałem właściwym w \mathcal{B} , a ponieważ M jest maksymalny, to $M = \bar{M}$. \square

Niech \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_2 oznaczają komutatywne algebry Banacha, a $f: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ będzie homomorfizmem, tj.: $\bigwedge_{x, y \in \mathcal{B}_1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}} f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Zbiór $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathcal{B}_1 : f(x) = 0\}$ (0 - zero algebry \mathcal{B}_2) nazywa się **jądrem** homomorfizmu f . Jądro homomorfizmu jest podprzestrzenią liniową w \mathcal{B}_1 i \mathcal{B}_1 , $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f)$, zatem $\text{Ker}(f)$ jest ideałem w \mathcal{B}_1 .

Niech J będzie domkniętym ideałem właściwym w komutatywnej algebrze Banacha \mathcal{B} , a \mathcal{K} niech będzie odwzorowaniem $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/J$ algebry \mathcal{B} w przestrzeń ilorazową, tj.: $\mathcal{K}(x) = x+J$. Przestrzeń \mathcal{B}/J jest przestrzenią Banacha względem normy $\|\mathcal{K}(x)\| = \inf_{z \in J} \|x-z\|$. Więcej, \mathcal{B}/J jest algebrą Banacha, a odwzorowanie \mathcal{K} homomorfizmem. (Przed udowodnieniem tego warto zauważyć, że $\mathcal{K}(J) = 0$.) Istotnie, jeżeli $x-x' \in J$ i $y-y' \in J$, to z tożsamości:

$$x'y' - xy = (x-x)y' + x(y-y')$$

³⁾ Każdy niepusty częściowo uporządkowany zbiór zawiera podzbiór maksymalny liniowo uporządkowany (dowód z zastosowaniem pewnika wyboru w pracy [4]).

wynika, że $x'y = xy \in J$ i dlatego $\mathcal{K}(x'y) = \mathcal{K}(xy)$. Zatem na \mathcal{B}/J można wprowadzić mnożenie w następujący sposób:

$$\mathcal{K}(x)\mathcal{K}(y) = \mathcal{K}(xy), \quad x \in \mathcal{B}, \quad y \in \mathcal{B}. \quad (2.22)$$

Oczywiście przy takim mnożeniu przestrzeń \mathcal{B}/J tworzy algebra, a odwzorowanie \mathcal{K} jest homomorfizmem algebr. Ponadto z określenia normy w przestrzeni ilorazowej wynika, że $\|\mathcal{K}(x)\| \leq \|x\|$, a zatem homomorfizm ten jest ciągły. Niech $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$ i $\varepsilon > 0$. Z określenia normy w przestrzeni ilorazowej wynika, że:

$$\bigvee_{y_1, y_2 \in J} \|x_1 + y_1 + x_2 + y_2\| < \|\mathcal{K}(x_1)\| + \varepsilon, \quad i=1,2. \quad (2.23)$$

Ponieważ:

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + J,$$

to:

$$\|\mathcal{K}(x_1x_2)\| < \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| < \|x_1 + y_1\| \|x_2 + y_2\|,$$

skąd na podstawie nierówności (2.23), ze względu na dowolność ε , wynika nierówność:

$$\|\mathcal{K}(x_1)\mathcal{K}(x_2)\| < \|\mathcal{K}(x_1)\| \|\mathcal{K}(x_2)\|. \quad (2.24)$$

Jeżeli e jest jednością algebry \mathcal{B} , to $\mathcal{K}(e)$ jest jednością algebry \mathcal{B}/J . Z nierówności (2.24) wynika, że $\|\mathcal{K}(e)\| \geq 1$, a z nierówności $\|\mathcal{K}(x)\| \leq \|x\|$ wynika, że $\|\mathcal{K}(e)\| < 1$, zatem $\|\mathcal{K}(e)\| = 1$. Tak więc \mathcal{B}/J jest algebra Banacha.

TWIERDZENIE 2.11

Niech \mathcal{B} będzie komutatywną algebra Banacha, a Δ zbiorem wszystkich (niezerowych) \mathbb{C} -wartościowych homomorfizmów algebry \mathcal{B} .

- (I) Każdy ideał maksymalny algebry \mathcal{B} jest jądrem pewnego homomorfizmu $h \in \Delta$.
- (II) Jądro każdego homomorfizmu $h \in \Delta$ jest ideałem maksymalnym algebry \mathcal{B} .
- (III) $x \in G(\mathcal{B}) \iff \bigvee_{h \in \Delta} h(x) \neq 0$.
- (IV) $\lambda \in Sp(x) \iff \bigvee_{h \in \Delta} \lambda = h(x)$.

D o w ó d. (I) Jeżeli M jest ideałem maksymalnym w \mathcal{B} , wówczas na mocy twierdzenia 2.10 (II) ideał ten jest domknięty tak, że \mathcal{B}/M jest algebra Banacha. Jeżeli $a \in \mathcal{B}$ i $a \notin M$ jest ustalonym elementem, to zbiór:

$$J = \{ax + y : x \in \mathcal{B}, y \in M\}$$

jest ideałem w \mathcal{B} szerszym niż M , ponieważ $a = ae + 0 \in J$. Zatem $J = \mathcal{B}$ i dlatego istnieją takie elementy $x \in \mathcal{B}$ i $y \in M$, że $ax + y = e$. Jeżeli \mathcal{K} jest odwzorowaniem $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/M$, to $\mathcal{K}(a)\mathcal{K}(x) = e$, a więc każdy niezerowy element algebry \mathcal{B}/M posiada odwrotność. Z twierdzenia Gelfanda-Mazura wynika, że istnieje izomorfizm "i" między \mathcal{B}/M a \mathbb{C} . Niech $h = i \circ \mathcal{K}$. Wówczas $h \in \Delta$ oraz $i \circ \mathcal{K}(M) = i(0) = 0$. Czyli (ze względu na maksymalność M) $M = \text{Ker}(h)$.

(II) Jeżeli $h \in \Delta$, to $h^{-1}(0) = \text{Ker}(h)$ jest ideałem w \mathcal{B} , a ze względu na maksymalność $\text{Ker}(h)$ jest to ideał maksymalny.

(III) Jeżeli $x \in G(\mathcal{B})$ i $h \in \Delta$, to:

$$h(x)h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(e) = 1,$$

czyli $h(x) \neq 0$. Niech $x \in G(\mathcal{B})$. Zbiór $\{ax : a \in \mathcal{B}\}$ jest ideałem w \mathcal{B} nie zawierającym e , a więc ideałem właściwym. Z twierdzenia 2.10 (I) wynika, że zawiera się on w pewnym ideałem maksymalnym, a więc zgodnie z tezą (I) znika na tym zbiorze pewien homomorfizm $h \in \Delta$. W szczególności $h(x) = 0$.

$$(IV) \lambda \in Sp(x) \iff (\lambda e - x) \notin G(\mathcal{B}) \iff \bigvee_{h \in \Delta} h(\lambda e - x) = \lambda h(e) - h(x) = \lambda - h(x) = 0. \quad \square$$

2.5. Przekształcenie Gelfanda

Niech, tak jak w paragrafie 2.4, Δ będzie zbiorem wszystkich \mathbb{C} -wartościowych homomorfizmów komutatywnej algebry Banacha \mathcal{B} (zbiorem wszystkich funkcjonałów liniowo-multiplikatywnych zadanych na \mathcal{B}). Każdy element $x \in \mathcal{B}$ generuje funkcję $\hat{x} : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ określoną następująco:

$$\hat{x}(h) = h(x). \quad (2.25)$$

Funkcję \hat{x} nazywa się **przekształceniem Gelfanda** elementu $x \in \mathcal{B}$.

Z twierdzenia 2.11 wynika wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ideałami maksymalnymi algebry \mathcal{B} a elementami zbioru Δ , dlatego zbiór Δ można utożsamić ze zbiorem ideałów maksymalnych algebry \mathcal{B} .

Przecięcie wszystkich maksymalnych ideałów algebry \mathcal{B} nazywa się **radą** algebry, co zapisuje się $\text{rad } \mathcal{B}$. Algebra \mathcal{B} nazywa się **prosta**, jeżeli $\text{rad } \mathcal{B} = \{0\}$.

TWIERDZENIE 2.12

Niech $C_b(\Delta)$ będzie algebra wszystkich ograniczonych \mathbb{C} -wartościowych funkcji zadanych na Δ .

(I) Przekształcenie Gelfanda jest homomorfizmem algebry \mathcal{B} na podalgebrę $\hat{\mathcal{B}}$ algebry $C_b(\Delta)$. Jadro tego homomorfizmu pokrywa się z radykałem algebry \mathcal{B} . Przekształcenie Gelfanda jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy algebra \mathcal{B} jest półprosta.

(II) $\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} \hat{x}(\Delta) = \text{Sp}(x)$ i dlatego:

$$\|\hat{x}\|_{\infty} = \varrho(x) < \|x\|,$$

gdzie: $\|\hat{x}\|_{\infty} = \sup_{h \in \Delta} |\hat{x}(h)|$, a $x \in \text{rad } \mathcal{B} \Leftrightarrow \varrho(x) = 0$.

D o w ó d. (I) Niech $x \in \mathcal{B}$, $y \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ i $h \in \Delta$. Wówczas:

$$(\alpha x)^\wedge(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = [\alpha \hat{x}](h),$$

$$(x+y)^\wedge(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x} + \hat{y})(h),$$

$$(xy)^\wedge(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h),$$

a więc odwzorowanie $x \rightarrow \hat{x}$ jest homomorfizmem. $\text{Ker} [(\cdot)^\wedge] = \{x \in \mathcal{B} : \bigwedge_{h \in \Delta} h(x) = 0\}$. Zgodnie z twierdzeniem 2.11, $\text{Ker} [(\cdot)^\wedge] = \text{rad } \mathcal{B}$. Z kolei homomorfizm $(\cdot)^\wedge$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Ker} [(\cdot)^\wedge] = \{0\}$.

(II) Z twierdzenia 2.11 (IV) wynika, że $\hat{\lambda} \in \text{Sp}(x) \Leftrightarrow \bigvee_{h \in \Delta} \lambda = \hat{x}(h)$. Zatem $\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} \hat{x}(\Delta) = \text{Sp}(x)$. \square

2.6. Funkcje analityczne wielu zmiennych w algebrach Banacha i twierdzenie o istnieniu odwrotności układu elementów algebry

Niech $x = (x_1, \dots, x_n)$ oznacza uporządkowany skończony układ elementów komutatywnej algebry Banacha \mathcal{B} , a \mathcal{B}^n oznacza zbiór wszystkich takich układów ($\mathcal{B}^n = \mathcal{B} \times \dots \times \mathcal{B}$ n razy). Działania dodawania i mnożenia przez skalar z \mathbb{C} określa się w \mathcal{B}^n następująco:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_n + \beta y_n)$$

Ponadto dla zwięzłości zapisu oznacza się:

$$x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad x \in \mathcal{B}^n, \quad k \in \mathcal{N}^n,$$

pod warunkiem, że istnieją ewentualnie elementy odwrotne. oraz:

$$\lambda y = (\lambda_1 y, \dots, \lambda_n y), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n, \quad y \in \mathcal{B},$$

$$xy = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n), \quad x \in \mathcal{B}^n, \quad y \in \mathcal{B}.$$

Zbiór:

$$\text{Sp}(x) = \text{Sp}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^n : \lambda_i = \hat{x}_i(h), \quad h \in \Delta, \quad i=1, \dots, n \right\}$$

nazywa się **widmem łącznym** układu elementów $x \in \mathcal{B}^n$.

Niech $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ będzie otwartym polidyskiem w \mathbb{C}^n , tj. $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ są otwartymi kołami w \mathbb{C} , a zbiór \mathcal{B}_Ω^n określa się następująco:

$$\mathcal{B}_\Omega^n = \{x \in \mathcal{B}^n : \text{Sp}(x) \subset \Omega\}$$

$\mathcal{A}(\Omega)$ oznacza algebra wszystkich \mathbb{C} -wartościowych funkcji zadanych w \mathbb{C}^n analitycznych na Ω ze zwykłym mnożeniem:

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{C}^n} fg(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda).$$

$\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{B}_\Omega^n)$ oznacza zbiór wszystkich \mathcal{B} -wartościowych funkcji zadanych na \mathcal{B}_Ω^n takich, że:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi j)^n} \int_{\Gamma} (\lambda_0 - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda, \quad (2.26)$$

gdzie: $\lambda \in \mathbb{C}^n$, $d\lambda = d\lambda_1 \dots d\lambda_n$, $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$, kontur $\Gamma_1 \subset \Omega_1$ obejmuje $\hat{x}_1(\Delta)$, $i = 1, \dots, n$.

TWIERDZENIE 2.13

Zbiór $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{B}_\Omega^n)$ tworzy algebra, przy czym odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{B}_\Omega^n)$ określone wzorem (2.26) jest izomorfizmem.

D o w ó d. Ponieważ norma $\|(\lambda_0 - x)^{-1}\|$ jest ograniczona na Γ , to odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{B}_\Omega^n)$ jest ciągłe w następującym sensie:

$$f_n \rightarrow f, \quad f_n \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \bigwedge_{x \in \mathcal{B}_\Omega^n} \tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x).$$

Z wyrażenia (2.26) wynika, że odwzorowanie $\mathcal{A}(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{B}_\Omega^n)$ jest liniowe. Jeżeli \tilde{f} jest funkcją zerową, tj. taką, że $\bigwedge_{x \in \mathcal{B}_\Omega^n} \tilde{f}(x) = 0$, to stosując wzór Cauchy'ego dla funkcji wielu zmiennych otrzymuje się:

$$0 = \tilde{f}(\alpha e) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} (\lambda - \alpha)^{-1} f(\lambda) e d\lambda = f(\alpha) e$$

dla każdego $\alpha \in \Omega$, a więc f też jest funkcją zerową w $\mathcal{H}(\Omega)$. Zatem odwzorowanie $(\cdot)^\sim$ jest wzajemnie jednoznaczne.

Podstawiając we wzorze (2.26) $f(\lambda) = (\lambda - \beta)^k$, $\lambda, \beta \in \mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{N}_+$ i stosując n -krotnie twierdzenie 2.5 otrzymuje się:

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} (\lambda - x)^{-1} (\lambda - \beta)^k d\lambda = (x - \beta e)^k.$$

Wynika stąd, że jeżeli f i g są wielomianami: $\sum_{k=0}^N \alpha_k (\lambda - \beta)^k$, to $(fg)^\sim = \tilde{f} \tilde{g}$. Ponieważ zbiór wielomianów jest gęsty w $\mathcal{H}(\Omega)$ i jak pokazano wyżej odwzorowanie $(\cdot)^\sim$ jest ciągłe, to jest ono moltiplikatywne, to znaczy, że jeżeli $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, to $(fg)^\sim = \tilde{f} \tilde{g}$. Zatem $\mathcal{H}(\mathbb{B}_\Omega^n)$ jest algebra, a odwzorowanie $(\cdot)^\sim$ izomorfizmem. \square

TWIERDZENIE 2.14

Jeżeli $x \in \mathbb{B}_\Omega^n$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, to $\tilde{f}(x) \in G(\mathcal{B})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\lambda) \neq 0$ dla każdego $\lambda \in Sp(x)$.

D o w ó d. Z twierdzenia 2.13 wynika, że dla dowolnego $h \in \Delta$

$$\begin{aligned} [\tilde{f}(x)]^\wedge(h) &= h[\tilde{f}(x)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} h [(\lambda - x)^{-1}] f(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} [\lambda - \hat{x}(h)]^{-1} f(\lambda) d\lambda = f[\hat{x}(h)], \end{aligned}$$

gdzie: $\hat{x}(h) = [\hat{x}_1(h), \dots, \hat{x}_n(h)]$, zatem stosując twierdzenie 2.11 (III) do pojedynczego elementu $\tilde{f}(x)$ otrzymuje się:

$$\tilde{f}(x) \in G(\mathcal{B}) \iff \bigwedge_{h \in \Delta} f[\hat{x}(h)] \neq 0 \iff \bigwedge_{\lambda \in Sp(x)} f(\lambda) \neq 0. \square$$

Niech $[x]$ oznacza macierz $n \times n$ elementów komutatywnej algebry Banacha \mathcal{B} , które tworzą układ $x \in \mathbb{B}^{n^2}$ elementów uporządkowanych leksykograficznie⁴⁾. Niech \tilde{d} będzie funkcją wyznacznikową elementów macierzy $[\cdot]$ zadaną na \mathbb{B}^{n^2} . W teorii stabilności układów wielowejsciowych znajduje zastosowanie następujące

⁴⁾ Uporządkowanie to jest oczywiście jednym z możliwych.

TWIERDZENIE 2.15

Macierz $[x]$ posiada odwrotność wtedy i tylko wtedy, gdy: $\bigwedge_{\lambda \in Sp(x)} d(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^{n^2}$.

D o w ó d. Niech $[x]y = z$ oznacza układ równań liniowych z niewiadomym układem elementów $y = (y_1, \dots, y_n)$ algebry \mathcal{B} . Z teorii zwykłej algebry liniowej wynika, że:

$$\tilde{d}(x)y_1 = \sum_{j=1}^n \tilde{d}_{ji}(x)y_j,$$

gdzie $\tilde{d}_{ji}(x)$ są odpowiednimi dopełnieniami algebraicznymi i zawsze należą do \mathcal{B} , gdyż funkcje \tilde{d}_{ji} są wielomianami. Zatem z twierdzenia 2.14 wynika, że $\tilde{d}(x) \in G(\mathcal{B}) \iff \bigwedge_{\lambda \in Sp(x)} d(\lambda) \neq 0. \square$

Uwaga: w zastosowaniach często będzie opuszczany znak \sim nad funkcją f , jeżeli tylko nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

3. KONKRETNE KOMUTATYWNE ALGEBRY BANACHA

3.1. $L(\mathcal{N}_+^M)$ jako algebra Banacha

Z nierówności:

$$\sum_{\|n\|=0}^{\infty} |x(n)+y(n)| < \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |x(n)| + \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |y(n)|, \quad n \in \mathcal{N}_+^M.$$

gdzie: $x, y \in L(\mathcal{N}_+^M)$ wynika, że $L(\mathcal{N}_+^M)$ jest podprzestrzenią liniową. Jeżeli w $L(\mathcal{N}_+^M)$ określić normę:

$$\|x\| = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |x(n)| \quad (3.1)$$

to staje się ona przestrzenią Banacha. Istotnie, w szczególności z twierdzenia 1.1 wynika, że przestrzeń $L(\mathcal{N}_+^M)$ i przestrzeń $L^\infty(\mathcal{N}_+^M)$ z normą:

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathcal{N}_+^M} |x(n)|$$

są wzajemnie sprzężone, a tym samym obie są zupełne.

Mnożenie (wielowymiarowy splot) określone wzorem

$$xy(n) = \sum_{m \in \mathcal{N}_+^M} x(n-m) y(m) \quad (3.2)$$

jest odwzorowaniem $L(\mathcal{N}_+^M) \times L(\mathcal{N}_+^M) \rightarrow L(\mathcal{N}_+^M)$. Rzeczywiście dla $x, y \in L(\mathcal{N}_+^M)$ zachodzi nierówność:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} |xy(n)| &= \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} \left| \sum_{m \in \mathcal{N}_+^M} x(n-m)y(m) \right| \leq \sum_{m \in \mathcal{N}_+^M} |y(m)| \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} |x(n-m)| = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} |x(n)| \sum_{m \in \mathcal{N}_+^M} |y(m)|, \end{aligned}$$

a ponadto $\bigwedge_{n \in \mathcal{N}_+^M} xy(n) = 0$. Stąd też wynika, że:

$$\|xy\| < \|x\| \|y\|.$$

Nietrudno sprawdzić, że mnożenie (3.2) jest łączne, liniowe ze względu na każdy czynnik z osobna, oraz rozdzielne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone. W $L(\mathcal{N}_+^M)$ istnieje jedność:

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=(0, \dots, 0) \\ 0 & \text{dla } n \neq (0, \dots, 0) \end{cases}$$

dla której $\|e\| = 1$. W dodatku mnożenie jest komutatywne.

Zatem przestrzeń $L(\mathcal{N}_+^M)$ z normą (3.1) i mnożeniem (3.2) tworzy komutatywną algebrę Banacha.

Niech $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_M)$ będzie następującym układem elementów algebry $L(\mathcal{N}_+^M)$:

$$\delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=(1, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{N}_+^M \end{cases}$$

$$\delta_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=(0, 1, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{N}_+^M \end{cases}$$

...

$$\delta_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=(0, 0, \dots, 1) \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{N}_+^M. \end{cases}$$

Każdy liniowy funkcjonal zadany na $L(\mathcal{N}_+^M)$ określony jest wyrażeniem:

$$h(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} H(n)x(n), \quad (3.3)$$

gdzie: $H \in L^\infty(\mathcal{N}_+^M)$. Jeżeli $x, y \in L(\mathcal{N}_+^M)$, to:

$$h(xy) = \sum_{n \in \mathcal{N}_+^M} \sum_{m \in \mathcal{N}_+^M} H(n+m)x(n)y(m),$$

skąd wynika, że funkcjonal ten jest multiplikatywny wtedy i tylko wtedy, gdy H spełnia równanie funkcyjne:

$$H(n+m) = H(n)H(m), \quad n, m \in \mathcal{N}_+^M.$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w $L^\infty(\mathcal{N}_+^M)$ jest rodzina:

$$H(n) = \chi_n, \quad \chi \in \overline{\mathbb{K}}^M, \quad n \in \mathcal{N}_+^M,$$

gdzie: $\bar{K}^M = \{\lambda \in \mathbb{C}^M, |\lambda_i| < 1, i=1, \dots, M\}$ jest jednostkowym domkniętym polidyskiem w \mathbb{C}^M . Istotnie, niech $\chi \in \mathbb{C}^M$ leży poza polidyskiem \bar{K}^M , tj. dla pewnego i , $|\chi_i| > 1$. Jednocześnie $h(\delta_i) = \chi_i$, skąd $h(e^{-\chi_i^{-1} \delta_i}) = 0$. Jednakże $\| \chi_i^{-1} \delta_i \| = |\chi_i|^{-1} < 1$, więc na mocy twierdzenia 2.1 (I) $e^{-\chi_i^{-1} \delta_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M)$, co pozostaje w sprzeczności z twierdzeniem 2.11 (III), które mówi, że $h(e^{-\chi_i^{-1} \delta_i}) \neq 0$. Zatem każdy liniowo-multiplikatywny funkcjonał h zadany na $\mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M)$ taki, że

$$h(x) = \sum_{n \in \mathcal{M}_+^M} \chi^n x(n)$$

można utożsamić z określonym punktem $\chi \in \bar{K}^M$, przy czym cały jednostkowy domknięty polidysk wyczerpuje cały zbiór takich funkcjonałów. Tak więc zbiór Δ wszystkich \mathbb{C} -wartościowych homomorfizmów algebry $\mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M)$ można utożsamić z polidyskiem \bar{K}^M . Czyli przekształcenie Gelfanda elementu $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M)$ ma postać:

$$\hat{x}(\chi) = h(x) = \sum_{n \in \mathcal{M}_+^M} \chi^n x(n), \quad \chi \in \bar{K}^M. \quad (3.4)$$

Ponieważ:

$$\text{Ker}(\cdot)^\wedge = \left\{ x \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M) : \bigwedge_{\chi \in \bar{K}^M} \hat{x}(\chi) = 0 \right\} = \{0\},$$

więc na mocy twierdzenia 2.12 (I) algebra $\mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M)$ jest półprostą, a zatem przekształcenie Gelfanda jest izomorfizmem. Przekształcenie odwrotne dane jest wyrażeniem:

$$x(n) = \frac{1}{n!} \hat{x}^{(n)}(0), \quad n \in \mathcal{M}_+^M. \quad (3.5)$$

Łatwo zauważyć, że potęga splotowa $\delta^k, k \in \mathcal{M}_+^M$ układu δ realizuje operację opóźnienia:

$$[\delta^k x](n) = [x \delta^k](n) = x(n-k),$$

a zatem każdy element $x \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_+^M)$ można przedstawić w postaci:

$$x = \sum_{n \in \mathcal{M}_+^M} x(n) \delta^n = \hat{x}(\delta). \quad (3.6)$$

3.2. $\mathcal{L}(\mathcal{R}_+^M)$ jako algebra Banacha

Zupełnie podobnie można wykazać, że przestrzeń $\mathcal{L}(\mathcal{R}_+^M)$ z normą:

$$\|x\| = \int_{\mathcal{R}_+^M} |x(t)| dt$$

i mnożeniem:

$$xy(t) = \int_{\mathcal{R}_+^M} x(t-\tau)y(\tau) d\tau$$

tworzy komutatywną algebrę Banacha. Algebra ta nie posiada jedności, ale zawsze można tę jedność dołączyć za pomocą procedury opisanej na początku paragrafu 2.1.

Dowolny liniowy funkcjonał na $\mathcal{L}(\mathcal{R}_+^M)$ zadany jest wyrażeniem:

$$h(x) = \int_{\mathcal{R}_+^M} H(t)x(t) dt \quad (3.7)$$

gdzie: $H \in L^\infty(\mathcal{R}_+^M)$. Jeżeli $x, y \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_+^M)$, to:

$$h(xy) = \int_{\mathcal{R}_+^M} \int_{\mathcal{R}_+^M} H(t+\tau)x(t)y(\tau) dt d\tau,$$

czyli funkcjonał ten jest multiplikatywny wtedy i tylko wtedy, gdy H spełnia równanie funkcyjne:

$$H(t+\tau) = H(t)H(\tau), \quad t, \tau \in \mathcal{R}_+^M.$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w $L^\infty(\mathcal{R}_+^M)$ jest rodzina:

$$H(t) = \chi^t, \quad \chi \in \bar{K}^M, \quad t \in \mathcal{R}_+^M.$$

Zatem i w tym przypadku każdy \mathbb{C} -wartościowy homomorfizm algebry $\mathcal{L}(\mathcal{R}_+^M)$ można utożsamić z określonym punktem $\chi \in \bar{K}^M$, a zbiór Δ wszystkich takich homomorfizmów z jednostkowym domkniętym polidyskiem \bar{K}^M . Tak więc przekształcenie Gelfanda elementu $x \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_+^M)$ ma postać:

$$\hat{x}(\chi) = h(x) = \int_{\mathcal{R}_+^M} \chi^t x(t) dt, \quad \chi \in \bar{K}^M. \quad (3.8)$$

Także i tym razem $\text{Ker}(\cdot)^{\wedge} = \{0\}$ (gdzie 0 jest funkcją zerową, tj. znikającą wszędzie za wyjątkiem, być może, zbioru miary zero w \mathcal{R}^M). Algebra $L(\mathcal{R}_+^M)$ też jest algebrą półprostą, a więc przekształcenie Gelfanda jest izomorfizmem. Jeżeli podstawić:

$$\chi = [\exp(-\zeta_1), \dots, \exp(-\zeta_M)] \equiv \exp(-\zeta), \quad (3.9)$$

gdzie: ζ leży w prawej domkniętej multipląszczyźnie, tj. $\text{Re } \zeta_i > 0$ ($i=1, \dots, M$), to przekształcenie Gelfanda (3.8) przechodzi w wielowymiarowe przekształcenie Laplace'a. Odwzorowanie (3.9) przekształca jednostkowy domknięty polidysk w prawą domkniętą multipląszczyznę.

Wyrażenie (3.6) nie posiada odpowiednika w algebrze $L(\mathcal{R}_+^M)$, można mu jednak nadać sens, jeżeli $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_M)$ uznać za układ odpowiednich delta - dystrybucji, symbol δ^t potraktować jako delta - dystrybucję opóźnioną o $t \in \mathcal{R}^M$, a symbol $\hat{x}(\delta)$ jako odpowiedni splot. Wówczas istotnie otrzyma się $x = \hat{x}(\delta)$.

3.3. Stabilność liniowych układów wielowymiarowych

W paragrafie 1.1 utożsamiono zagadnienie stabilności z warunkiem istnienia odwrotności elementu algebry Banacha. Niech odpowiedź impulsowa "z" filtru cyfrowego wielowymiarowego będzie ułamkiem splotowym:

$$z = yx^{-1}; \quad x, y \in L(\mathcal{R}_+^M).$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności filtru jest: $z \in L(\mathcal{R}_+^M) \iff x \in G[L(\mathcal{R}_+^M)]$. Z twierdzenia 2.11 (III) i z rozważań przeprowadzonych w paragrafie 3.1 wynika, że warunek ten ma postać:

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{R}^M} \hat{x}(\chi) \neq 0$$

Jeżeli $x \in L(\mathcal{R}_+^M)$ jest odpowiedzią impulsową układu z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, to układ z zamkniętą pętlą jest stabilny, gdy: $(e-x) \in G[L(\mathcal{R}_+^M)]$, czyli gdy:

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{R}^M} \hat{x}(\chi) \neq 1.$$

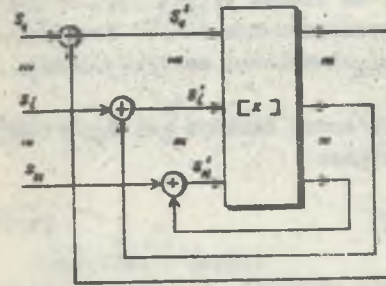
Ogólniej, można rozpatrywać N - wejściowy, M - wymiarowy układ ze sprzężeniem zwrotnym widoczny na rys. 3.1. $[x]$ oznacza $N \times N$ - macierz odpowiedzi impulsowych układu otwartego, gdzie x jest układem N^2 elementów z $L(\mathcal{R}_+^M)$ uporządkowanych leksykograficznie. Sygnały $s_i, (i=1, \dots, N)$ należą

do $L(\mathcal{R}_+^M)$. Związek między układem $s = (s_1, \dots, s_N)$ sygnałów wejściowych a układem $s' = (s'_1, \dots, s'_N)$ sygnałów odchyłek dany jest równaniem:

$$(Ee - [x])s' = s$$

gdzie: E jest zwykłą macierzą jednostkową, a iloczyn jest mnożeniem macierzowo-splotowym. Układ sygnałów odchyłek należy do $[L(\mathcal{R}_+^M)]^N$ wówczas, gdy macierz $Ee - [x]$ posiada odwrotność. Na mocy twierdzenia 2.15 ma to miejsce, gdy:

$$\bigwedge_{\lambda \in \text{Sp}(x)} d(\lambda) \neq 0,$$



Rys. 3.1. Wielowejsiowy układ ze sprzężeniem zwrotnym

gdzie:

$$\text{Sp}(x) = \left\{ \lambda \in \mathcal{C}^M: \lambda_i = \hat{x}_i(\chi), \chi \in \mathcal{R}^M, i=1, \dots, N^2 \right\},$$

czyli:

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{R}^M} d[\hat{x}_1(\chi), \hat{x}_2(\chi), \dots, \hat{x}_{N^2}(\chi)] \neq 0, \quad (3.10)$$

gdzie: d jest funkcją wyznacznikową macierzy $E - [\cdot]$. Wyrażenie (3.10) daje więc ostateczny warunek konieczny i dostateczny stabilności BIBO wielowejsiowego wielowymiarowego układu ze sprzężeniem zwrotnym. Na przykład, jeżeli:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

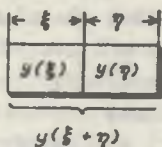
to

$$d(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda_1 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & 1 - \lambda_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_4 + 1$$

i warunek (3.10) przyjmuje postać:

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{R}^M} \hat{x}_1(\chi) \hat{x}_4(\chi) - \hat{x}_2(\chi) \hat{x}_3(\chi) - \hat{x}_1(\chi) - \hat{x}_4(\chi) + 1 \neq 0$$

Zastosowanie znajdują także funkcje niewymierne, o czym świadczy następujący przykład. Można rozpatrywać jednorodny układ o parametrach rozłożonych pokazany schematycznie na rys. 3.2, na którym $y(\xi)$ i $y(\eta)$ $\in L(\mathcal{R}_+^M)$ oznaczają odpowiedzi impulsowe składowych odcinków układu o długościach odpowiednio ξ i η , a $y(\xi+\eta)$ jest odpowiedzią impulsową całego odcinka o długości $\xi + \eta$,



Rys. 3.2. Odcinek układu o parametrach rozłożonych

Tym samym określona zostaje pewna funkcja $y : \mathcal{R}_+ \rightarrow L(\mathcal{R}_+^M)$ spełniająca równanie funkcyjne:

$$y(\xi+\eta) = y(\xi)y(\eta) \quad (3.11)$$

przy czym $y(0) = e$. Równanie to można doprowadzić do postaci:

$$\frac{1}{\eta} [y(\xi+\eta) - y(\xi)] = y(\xi) \frac{1}{\eta} [y(\eta) - e],$$

które po przejściu granicznym $\eta \rightarrow 0$ przechodzi w równanie różniczkowe w $L(\mathcal{R}_+^M)$:

$$y'(\xi) = y(\xi)z$$

gdzie:

$$z = \left(\frac{1}{\eta} [y(\eta) - e] \right)_{\eta \rightarrow 0}$$

jest określonym elementem z $L(\mathcal{R}_+^M)$ (zakłada się, że taki element istnieje). Wobec tego jedynym rozwiązaniem równania (3.11) w $L(\mathcal{R}_+^M)$ jest funkcja:

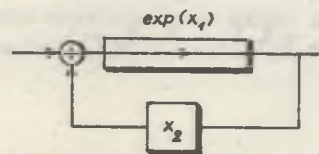
$$y(\xi) = \exp(\xi z), \quad \xi \in \mathcal{R}_+$$

Element $y(\xi) \in L(\mathcal{R}_+^M)$ jest więc odpowiedzią impulsową odcinka o długości ξ i określonej tworzącej infinitesimalnej z . Na przykład, odpowiedzią impulsową układu otwartego z rysunku 3.3 jest $x_2 \exp(x_1)$, gdzie $x_1, x_2 \in L(\mathcal{R}_+^M)$.

Zatem warunek stabilności układu zamkniętego przyjmuje postać:

$$\bigwedge_{\chi \in K^M} \hat{x}_2(\chi) \exp[\hat{x}_1(\chi)] \neq 1.$$

Z rozważań przeprowadzonych w paragrafie 3.2 wynika, że wszystkie wyniki dotyczące stabilności przenoszą się bez zmian do algebry $L(\mathcal{R}_+^M)$.



Rys. 3.3. Przykład układu o parametrach rozłożonych ze sprzężeniem zwrotnym

3.4. Algebra \mathcal{P} sygnałów wielookresowych

Niech $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(\mathcal{R}^M)$, gdzie $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_M) \in \mathcal{R}^M$ oznacza zbiór wszystkich sygnałów z $L^\infty(\mathcal{R}^M)$ okresowych względem wszystkich swoich indeksów, przy czym okres względem indeksu n_i równy jest \mathcal{J}_i , tj.:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(\mathcal{R}^M) = \left\{ x \in L^\infty(\mathcal{R}^M) : \bigwedge_{n \in \mathcal{R}^M} x(n_1, \dots, n_i - \mathcal{J}_i, \dots, n_M) = x(n_1, \dots, n_i, \dots, n_M), \right. \\ \left. i=1, \dots, M \right\}.$$

Zbiór ten z normą:

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\mathcal{J}-1} |x(n)|, \quad (3.12)$$

i mnożeniem:

$$[xy](n) = \sum_{m=0}^{\mathcal{J}-1} x(n-m)y(m); \quad n, m \in \mathcal{R}^M \quad (3.13)$$

tworzy komutatywną algebrę Banacha. Rzeczywiście, nietrudno jest wykazać, że z normą określoną równością (3.12) przestrzeń $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(\mathcal{R}^M)$ jest zupełna. Jeżeli oznaczyć:

$$\vec{\mathcal{J}}_1 = (0, \dots, \mathcal{J}_1, 0, \dots, 0),$$

to z równości:

$$xy(n - \vec{\mathcal{J}}_1) = \sum_{m=0}^{\mathcal{J}-1} x(n - \vec{\mathcal{J}}_1 - m)y(m) = \sum_{p=\vec{\mathcal{J}}_1}^{\mathcal{J}+\vec{\mathcal{J}}_1-1} x(n-p)y(p - \vec{\mathcal{J}}_1) = \\ = \sum_{p=\vec{\mathcal{J}}_1}^{\mathcal{J}+\vec{\mathcal{J}}_1-1} x(n-p)y(p) = \sum_{p=0}^{\mathcal{J}-1} x(n-p)y(p) = xy(n)$$

dla dowolnego $n \in \mathcal{R}^M$ i przy każdym $i=1, \dots, M$ wynika, że mnożenie jest odwzorowaniem $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}(\mathcal{R}^M) \times \mathcal{P}_{\mathcal{J}}(\mathcal{R}^M) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{J}}(\mathcal{R}^M)$. Ponadto dla dowolnego $n \in \mathcal{R}^M$ zachodzi:

$$[x(yz)](n) = \sum_{k=0}^{\vartheta-1} x(n-k) \sum_{m=0}^{\vartheta-1} y(k-m)z(m) = \sum_{m=0}^{\vartheta-1} z(m) \sum_{k=0}^{\vartheta-1} x(n-k)y(k-m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\vartheta-1} z(m) \sum_{p=-m}^{\vartheta-1-m} x(n-m-p)y(p) = \sum_{m=0}^{\vartheta-1} xy(n-m)z(m) = [(xy)z](n),$$

z więc mnożenie jest łączne. Jest ono też liniowe ze względu na każdy czynnik oraz rozdzielne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone.

Ma miejsce następujące oszacowanie:

$$\begin{aligned} \|xy\| &= \sum_{n=0}^{\vartheta-1} \left| \sum_{m=0}^{\vartheta-1} xy(n-m)y(m) \right| \leq \sum_{n=0}^{\vartheta-1} \sum_{m=0}^{\vartheta-1} |x(n-m)| |y(m)| = \\ &= \sum_{m=0}^{\vartheta-1} |y(m)| \sum_{p=-m}^{\vartheta-1-m} |x(p)| = \sum_{p=0}^{\vartheta-1} |x(p)| \sum_{m=0}^{\vartheta-1} |y(m)| = \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Elementem neutralnym ze względu na mnożenie jest w $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$:

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = (k_1\vartheta_1, k_2\vartheta_2, \dots, k_M\vartheta_M), \quad k_1, \dots, k_M \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{M}^M. \end{cases}$$

Widać, że $\|e\| = 1$. Nietrudno zauważyć, że mnożenie jest przemienne. Zatem $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ jest komutatywną algebrą Banacha.

Funkcjonał liniowy w $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ określony jest wyrażeniem:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\vartheta-1} H(n)x(n), \quad n \in \mathcal{M}^M.$$

Z równości:

$$h(xy) = \sum_{n=0}^{\vartheta-1} \sum_{m=0}^{\vartheta-1} H(n+m)x(n)y(m)$$

wynika, że h jest funkcyjonałem liniowo-multiplikatywnym, jeżeli funkcja H spełnia równanie funkcyjne:

$$H(n+m) = H(n)H(m), \quad n, m \in \mathcal{M}^M.$$

Ponadto funkcyjonał h musi być niezmienniczy względem operacji opóźnienia sygnału o $\vartheta_1, i=1, \dots, M$, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $H \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$. Z kolei jedynym rozwiązaniem równania funkcyjnego w $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ jest rodzina:

$$H(n) = \chi^n, \quad \chi \in \left\{ \varepsilon^{(p)}, \quad 0 \leq p < \vartheta-1, \quad p \in \mathcal{M}^M \right\} = \mathcal{G}_\vartheta$$

gdzie:

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M) \in \mathbb{C}^M, \quad \varepsilon_i = \exp(j \frac{2\pi}{\vartheta_i}).$$

Zbiór \mathcal{G}_ϑ składa się ze skończonej liczby punktów rozmieszczonych regularnie na poliokręgu jednostkowym $\partial\bar{K}^M$. Każdy \mathbb{C} -wartościowy homomorfizm h można utożsamiać z punktem $\chi \in \mathcal{G}_\vartheta$, a zbiór Δ wszystkich takich homomorfizmów ze zbiorem \mathcal{G}_ϑ . Przekształcenie Gelfanda określone jest wzorem:

$$\hat{x}(\chi) = h(x) = \sum_{n=0}^{\vartheta-1} \chi^n x(n), \quad \chi \in \mathcal{G}_\vartheta \quad (3.14)$$

Ponieważ:

$$\text{Ker}(\cdot)^{\wedge} = \left\{ x \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M) : \bigwedge_{\chi \in \mathcal{G}_\vartheta} \hat{x}(\chi) = 0 \right\} = \{0\},$$

więc zgodnie z twierdzeniem 2.12(I) algebra $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ jest algebrą półprosta, a przekształcenie Gelfanda jest izomorfizmem. Przekształcenie odwrotne dane jest wzorem:

$$x(n) = \frac{1}{\vartheta^M} \sum_{\chi \in \mathcal{G}_\vartheta} \chi^{-n} \hat{x}(\chi). \quad (3.15)$$

Nietrudno jest sprawdzić słuszność wzoru (3.15) podstawiając $\hat{x}(\chi)$ z (3.14) i doprowadzając do tożsamości.

Niech symbol $\mathcal{P}'_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ oznacza zbiór $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$, lecz z odmiennie określoną normą:

$$\|x'\| = \sup_{n \in \mathcal{M}^M} |x'(n)|$$

i zwykłym mnożeniem:

$$\bigwedge_{n \in \mathcal{M}^M} x'_1 x'_2(n) = x'_1(n) x'_2(n).$$

Łatwo wykazać, że $\mathcal{P}'_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ również jest algebrą Banacha. Z wyrażen (3.14) i (3.15) wynika, że odwzorowanie $x \mapsto x'$, $x \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$, $x' \in \mathcal{P}'_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ określone wzorami:

$$x'(n) = \sum_{p=0}^{\vartheta-1} (\varepsilon^{(n)})^p x(p) \quad (3.16)$$

$$x(n) = \frac{1}{\vartheta!} \sum_{p=0}^{\vartheta-1} (\varepsilon^{(p)})^{-n} x'(p) \quad (3.17)$$

jest izomorfizmem algebry $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ na $\mathcal{P}'_\vartheta(\mathcal{M}^M)$.

Ważną rolę odgrywa układ $\mathbb{W} = (\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_M)$ elementów algebry $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ takich, że:

$$\mathbb{W}_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = (1+i\vartheta_1, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{M}^M \end{cases}$$

$$\mathbb{W}_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = (0, 1+i\vartheta_2, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{M}^M \end{cases}$$

...

$$\mathbb{W}_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = (0, \dots, 0, 1+i\vartheta_M) \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \in \mathcal{M}^M \end{cases}$$

gdzie: $i \in \mathcal{M}$. Nietrudno przekonać się, że element \mathbb{W}^k , $0 \leq k \leq \vartheta-1$, $k \in \mathcal{M}^M$ realizuje operację opóźnienia:

$$[\mathbb{W}^k x](n) = x(n-k)$$

i dlatego każdy element $x \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ można przedstawić w postaci szeregu skończonego:

$$x = \sum_{n=0}^{\vartheta-1} x(n) \mathbb{W}^n = \hat{x}(\mathbb{W}). \quad (3.18)$$

Najprostszą dziedziną zastosowań algebry $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ jest teoria MLTISDS podbudzanych sygnałami wielookresowymi. Odpowiedź impulsowa układu elementarnego jest elementem $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$. Oznacza to, że operator układu elementarnego jest operatorem splotu (3.13) sygnału wejściowego s z odpowiedzią impulsową x ; $F(s) = xs$, $x \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$. Operator F można traktować jako odwzorowanie $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M) \rightarrow \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$, lub też $\mathcal{P}'_\vartheta(\mathcal{M}^M) \rightarrow \mathcal{P}'_\vartheta(\mathcal{M}^M)$, przy czym za każdym razem mnożenie należy rozumieć w sensie określenia (3.13).

Jeżeli odpowiedź impulsowa "z" wielowymiarowego filtra cyfrowego jest ułamkiem splotowym:

$$z = y x^{-1}, \quad x, y \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M),$$

to operator F filtra odwzorowuje $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M) \rightarrow \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy (twierdzenie 2.11 (III)):

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{G}_\vartheta} \hat{x}(\chi) \neq 0. \quad (3.19)$$

Podobnie, jak to rozważano w paragrafie 3.3, jeżeli $x \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ jest odpowiedzią impulsową układu z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, to układ z zamkniętą pętlą odwzorowuje $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $e - x \in \mathcal{G}[\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)]$, czyli, gdy:

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{G}_\vartheta} \hat{x}(\chi) \neq 1. \quad (3.20)$$

Wreszcie układ wielowejściowy pokazany na rysunku 3.1, gdzie $x \in [\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)]^N$, przekształca układ sygnałów $s_1 \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ w układ sygnałów $s_2 \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ ($i=1, \dots, N$) wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{\chi \in \mathcal{G}_\vartheta} d[\hat{x}_1(\chi), \hat{x}_2(\chi), \dots, \hat{x}_N(\chi)] \neq 0, \quad (3.21)$$

gdzie: d jest funkcją wyznacznikową macierzy $E = [\cdot]$. Warunki (3.19), (3.20) i (3.21) można interpretować jako uogólnienie warunków rezonansowych, według których układ realizuje odwzorowanie $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^M)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada on własności rezonansowych dla określonego multiokresu $\vartheta \in \mathcal{M}^M$.

Niech dla przykładu dwuwymiarowy filtr rekursywny opisany będzie dwuwymiarowym równaniem rekurencyjnym:

$$s_2(n_1, n_2) = -s_1(n_1, n_2) + 2s_2(n_1-1, n_2) + s_2(n_1, n_2-1), \quad (3.22)$$

gdzie: $s_1 \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}^2)$ jest sygnałem wejściowym, a s_2 - sygnałem wyjściowym. Należy określić odpowiedź filtra na jednostkowy sygnał wejściowy $s_1 = e$, o okresie $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) = (5, 4)$. Równanie (3.22) można zapisać w równoważnej postaci:

$$s_2 = -s_1 + (2\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2)s_2$$

skąd:

$$s_2 = (2\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 - e)^{-1} s_1.$$

Zatem odpowiedź impulsowa filtra ma postać:

$$x = (2\chi_1 + \chi_2 - e)^{-1}.$$

Przekształcenie Gelfanda elementu x ma więc postać:

$$\hat{x}(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{2\chi_1 + \chi_2 - 1}.$$

Ponieważ wyrażenie $2\chi_1 + \chi_2 - 1$ nie znika na zbiorze $G_{(5,4)}$, gdzie $\epsilon_1 = \exp(j \frac{2\pi}{T_1}) = \exp(j \frac{2\pi}{T_1})$, $\epsilon_2 = \exp(j \frac{2\pi}{T_2}) = j$, zatem $x \in \mathcal{P}_G(\mathcal{R}^2)$. Stosując odwrotne przekształcenie Gelfanda określone wzorem (3.15) otrzymuje się:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{\chi \in G_{(5,4)}} \chi_1^{-n_1} \chi_2^{-n_2} \hat{x}(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1=0}^4 \sum_{k_2=0}^3 \frac{\epsilon_1^{-k_1 n_1} \epsilon_2^{-k_2 n_2}}{2\epsilon_1^{k_1} + \epsilon_2^{k_2} - 1}.$$

Kładąc $s_1 = e$, otrzymuje się $s_2 = x$.

Niech $T = (T_1, \dots, T_M) \in \mathcal{R}_+^M$, a $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ oznacza zbiór sygnałów wielookresowych zadanych na \mathcal{R}^M , tj.:

$$\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M) = \left\{ x \in L^\infty(\mathcal{R}^M) : \bigwedge_{t \in \mathcal{R}^M} x(t_1, \dots, t_1 - T_1, \dots, t_M) = x(t_1, \dots, t_1, \dots, t_M), \right. \\ \left. i=1, \dots, M \right\}.$$

Postępując analogicznie jak w przypadku $\mathcal{P}_G(\mathcal{R}^M)$ można wykazać, że zbiór $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ z normą:

$$\|x\| = \int_0^T |x(t)| dt, \quad t \in \mathcal{R}^M$$

i mnożeniem splotowym:

$$[xy](t) = \int_0^T x(t-\tilde{t})y(\tilde{t})d\tilde{t}, \quad t, \tilde{t} \in \mathcal{R}^M,$$

tworzy komutatywną algebrę Banacha. Algebra ta nie ma jedności, ale można tę jedność dołączyć za pomocą procedury opisanej w paragrafie 2.1.

Dowolny funkcjonal liniowy w $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ określony jest wzorem:

$$h(x) = \int_0^T H(t)x(t)dt, \quad t \in \mathcal{R}^M.$$

Z równości:

$$h(x, y) = \int_0^T \int_0^T H(t+\tilde{t})x(t)y(\tilde{t})dt d\tilde{t}$$

wynika, że h jest funkcjonałem multiplikatywnym, jeżeli funkcja H spełnia równanie funkcyjne:

$$H(t+\tilde{t}) = H(t)H(\tilde{t}), \quad t, \tilde{t} \in \mathcal{R}^M.$$

Także i tym razem funkcjonal h musi być niezmienniczy względem operacji opóźnienia sygnału o $\bar{T}_i = (0, \dots, T_i, 0, \dots, 0)$, $i=1, \dots, M$, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $H \in \mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$. Natomiast jedynym rozwiązaniem równania funkcyjnego w $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ jest rodzina:

$$H(t) = \chi^t, \quad \chi \in \left\{ \epsilon^{(n)}, \quad n \in \mathcal{R}^M \right\} = \mathcal{G}_T,$$

gdzie:

$$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_M) \in \mathcal{C}^M, \quad \epsilon_i = \exp(j \frac{2\pi}{T_i}).$$

Zbiór \mathcal{G}_T składa się z przeliczalnego układu punktów rozmieszczonych na poliokręgu jednostkowym $\partial \bar{K}^M$. Zbiór Δ wszystkich \mathcal{C} -wartościowych homomorfizmów algebry $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ można więc utożsamić ze zbiorem \mathcal{G}_T , a przekształcenie Gelfanda określa wzór:

$$\hat{x}(\chi) = h(x) = \int_0^T \chi^t x(t)dt, \quad \chi \in \mathcal{G}_T. \quad (3.23)$$

Algebra $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ też jest półprosta, ponieważ $\text{Ker}(\cdot)^{\wedge} = \{0\}$. Zatem przekształcenie Gelfanda jest izomorfizmem, a przekształcenie odwrotne dane jest wyrażeniem:

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{\chi \in \mathcal{G}_T} \chi^{-t} \hat{x}(\chi), \quad t \in \mathcal{R}^M. \quad (3.24)$$

Zastosowanie algebry $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ są analogiczne jak $\mathcal{P}_G(\mathcal{R}^M)$, z tym że dotyczą MLTIS. Także warunki konieczne i dostateczne na to, aby MLTIS przekształcał zbiór $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}^M)$ w siebie, mają postacie wyrażen (3.19), (3.20) i (3.21), z tym że zbiór $\mathcal{G}_G(\mathcal{R}^M)$ trzeba zastąpić zbiorem $\mathcal{G}_T(\mathcal{R}^M)$.

$$\|x\phi(s_1) - x\phi(s_2)\|_{L^\infty} \leq \|x\|_L \|\phi(s_1) - \phi(s_2)\|_{L^\infty} \leq \delta \|x\|_L \|s_1 - s_2\|_{L^\infty}$$

Jeżeli operator $x\phi(\cdot)$ jest zwężający, tj., jeżeli $\delta \|x\|_L < 1$, to równanie (4.1) posiada jednoznaczne rozwiązanie s będące granicą ciągu kolejnych przybliżeń:

$$s_{k+1} = u + x\phi(s_k). \quad (4.2)$$

Jeżeli $u \in L(\mathcal{M}_+^M)$ i $\phi : L(\mathcal{M}_+^M) \rightarrow L(\mathcal{M}_+^M)$, to podczas określania kolejnych wyrazów ciągu $\{s_k\}$ zadanych wyrażeniem (4.2) stosuje się następujący algorytm:

(I) mając wartości $s_k(n)$ k -tego przybliżenia s_k dla wszystkich $n \in \mathcal{M}_+^M$ określa się wynik operacji $\phi(s_k)$, czyli wszystkie wartości $[\phi(s_k)](n)$, $n \in \mathcal{M}_+^M$;

(II) ze wzoru (3.4) określa się przekształcenie Gelfanda elementu $\phi(s_k) : [\phi(s_k)]^\wedge(\chi) = \sum_{\|n\|=0} [\phi(s_k)](n)\chi^n$;

(III) z równania (4.2) określa się przekształcenie Gelfanda $(k+1)$ -go przybliżenia:

$$s_{k+1}(\chi) = \hat{u}(\chi) + \hat{x}(\chi) [\phi(s_k)]^\wedge(\chi), \quad \chi \in \mathcal{K}^M, \quad (4.3)$$

a następnie z wyrażenia (3.5) oblicza się poszczególne wartości $s_{k+1}(n)$, $n \in \mathcal{M}_+^M$. Zgodnie z wyrażeniem (3.6), zamiast wzoru (4.3) można stosować wzór bezpośredni dla s_{k+1} :

$$s_{k+1} = \hat{u}(\delta) + \hat{x}(\delta) [\phi(s_k)]^\wedge(\delta) \quad (4.3')$$

gdzie: $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_M)$ jest układem elementów algebry $L(\mathcal{M}_+^M)$ zdefiniowanym w paragrafie 3.1.

W charakterze elementu początkowego ciągu kolejnych przybliżeń rozwiązania można przyjąć $s_0 = u$.

P r z y k ł a d l i c z b o w y

Niech funkcja przejścia bloku nieliniowego ma postać:

$$[\phi(s)](n) = \varphi[s(n)], \quad n \in \mathcal{M}_+,$$

przy czym funkcja $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ma wykres pokazany na rys. 4.2, a odpowiedź impulsowa bloku liniowego dana jest wyrażeniem:

4. NIELINIOWE CZASOWO NIEZMIENNICZE UKŁADY ANALITYCZNE

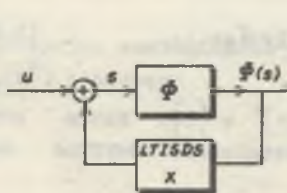
Rozdział niniejszy ogranicza się do algebr $L(\mathcal{M}_+^M)$ i $\mathcal{P}_T(\mathcal{M}_+^M)$, ale prawie wszystkie uzyskane wyniki można przenieść na algebry $L(\mathcal{R}_+^M)$ i $\mathcal{P}_T(\mathcal{R}_+^M)$ zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi w paragrafach 3.2 i 3.4.

4.1. Poszukiwanie rozwiązań równań nieliniowych

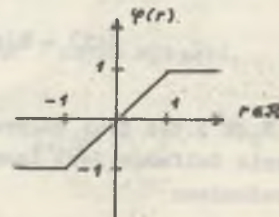
W paragrafie tym rozważa się układ, którego schemat blokowy pokazano na rys. 4.1. Układ ten zawiera w torze głównym element nieliniowy scharakteryzowany funkcją ϕ przekształcającą przestrzeń $L^\infty(\mathcal{M}_+^M)$ w siebie, spełniającą warunek Lipschitza ze stałą δ , tj.:

$$\bigwedge_{s_1, s_2 \in L^\infty(\mathcal{M}_+^M)} \|\phi(s_1) - \phi(s_2)\|_{L^\infty} \leq \delta \|s_1 - s_2\|_{L^\infty}$$

a w torze powrotnym LTISDS o odpowiedzi impulsowej $x \in L(\mathcal{M}_+^M)$.



Rys. 4.1. Schemat blokowy układu ze sprzężeniem zwrotnym



Rys. 4.2. Przykładowa charakterystyka bloku nieliniowego

Wspomniany układ opisany jest równaniem operatorowym:

$$s = u + x\phi(s) \quad (4.1)$$

w którym $u \in L^\infty(\mathcal{M}_+^M)$ jest sygnałem wejściowym, s - sygnałem wyjściowym, a mnożenie oznacza splot w sensie określenia (3.2). Ma miejsce następujące oszacowanie:

$$x(n) = \begin{cases} 0,3 \cdot 2^{-(n+1)} & \text{dla } n \in \mathbb{N}_+, \\ 0 & \text{dla } n \notin \mathbb{N}_+, \end{cases}$$

skąd otrzymuje się:

$$\hat{x}(\chi) = 0,3 \cdot (2-\chi)^{-1}.$$

Na wejście układu podaje się sygnał jednostkowy $u=e$.

Nietrudno sprawdzić, że operator $x\hat{\phi}(\cdot)$ jest zwężający, można więc stosować algorytm kolejnych przybliżeń. Przyjmując $s_0 = e$, otrzymuje się pierwsze przybliżenie w postaci:

$$s_1(n) = e(n) + [\hat{x}(\delta)\hat{\phi}(e)](n) = e(n) + 0,3 \cdot 2^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Wyniki poszczególnych iteracji zestawiono w tabelicy 4.1.

Tablica 4.1

Wyniki poszczególnych iteracji rozwiązania równania 4.1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$s_1(n)$	1,1500	0,0750	0,0375	0,0188	0,0094	0,0047	0,0023	0,0012	0,0006
$s_2(n)$	1,1500	0,0862	0,0487	0,0272	0,0150	0,0082	0,0044	0,0026	0,0013
$s_3(n)$	1,1500	0,0879	0,0506	0,0297	0,0170	0,0098	0,0055	0,0034	0,0018
$s_4(n)$	1,1500	0,0882	0,0510	0,0303	0,0176	0,0103	0,0059	0,0038	0,0020
$s_5(n)$	1,1500	0,0882	0,0510	0,0305	0,0177	0,0105	0,0060	0,0040	0,0021

Podobnie poszukuje się rozwiązań równań nieliniowych pobudzanych okresowo. Wówczas równanie (4.1) trzeba rozpatrywać w przestrzeni $\mathcal{P}_\vartheta(\mathbb{R}^M)$ i tak: $u \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathbb{R}^M)$, $\hat{\phi}$ jest funkcją nieliniową przekształcającą $\mathcal{P}_\vartheta(\mathbb{R}^M)$ w siebie, spełniająca warunek Lipschitza ze stałą $\chi, x \in \mathcal{P}_\vartheta(\mathbb{R}^M)$. Jeżeli operator $x\hat{\phi}(\cdot)$ jest zwężający, tj. jeżeli $\chi \|x\| < 1$, to równanie (4.1) można rozwiązywać iteracyjnie stosując algorytm podobny do powyższego, to znaczy:

(I) mając wartości $s_k(n)$ k-tego przybliżenia dla wszystkich $0 \leq n \leq \vartheta-1$ ($n \in \mathbb{N}^M$) określa się wynik operacji $\hat{\phi}(s_k)$, czyli wszystkie wartości $[\hat{\phi}(s_k)](n)$;

(II) ze wzoru (3.14) określa się przekształcenie Gelfanda elementu $\hat{\phi}(s_k)$:

$$[\hat{\phi}(s_k)]^\wedge(\chi) = \sum_{n=0}^{\vartheta-1} [\hat{\phi}(s_k)](n) \chi^n,$$

(III) z równania (4.2) określa się przekształcenie Gelfanda (k+1)-go przybliżenia:

$$\hat{s}_{k+1}(\chi) = \hat{u}(\chi) + \hat{x}(\chi) [\hat{\phi}(s_k)]^\wedge(\chi), \quad \chi \in \mathcal{G}_\vartheta$$

a następnie ze wzoru (3.15) oblicza się poszczególne wartości $s_{k+1}(n)$, $n \in \mathbb{N}^M$ lub też korzysta się ze wzoru bezpośredniego:

$$s_{k+1} = \hat{u}(\Omega) + \hat{x}(\Omega) [\hat{\phi}(s_k)]^\wedge(\Omega),$$

gdzie: $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_M)$ jest odpowiednim układem elementów z $\mathcal{P}_\vartheta(\mathbb{R}^M)$ zdefiniowanym w paragrafie 3.4.

Przykład liczbowy

Niech funkcja przejścia bloku nieliniowego będzie scharakteryzowana funkcją $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o wykresie pokazanym na rysunku 4.2, a przekształcenie Gelfanda odpowiedzi impulsowej x dane jest wyrażeniem:

$$\hat{x}(\chi) = 0,1(\chi-0,5)^{-1}.$$

Na wejście układu podaje się jednostkowy jednowymiarowy sygnał $u=e$ o okresie $\vartheta = 5$. Odwrotne przekształcenie Gelfanda daje:

$$x(n) = 0,1 \frac{0,5^{\vartheta-1-n}}{1-0,5^\vartheta} \approx 0,1 \cdot (0,5)^{4-n} \quad \text{dla } 0 \leq n \leq 4.$$

Pierwszym przybliżeniem jest:

$s_1(n) = e(n) + [\hat{x}(\Omega)\hat{\phi}(e)](n) = e(n) + x(n) = e(n) + 0,1 \cdot (0,5)^{4-n}$, $0 \leq n \leq 4$. Skąd otrzymuje się:

$$[\hat{\phi}(s_1)]^\wedge(\chi) = 1 + 0,012\chi + 0,025\chi^2 + 0,050\chi^3 + 0,1\chi^4.$$

Powtarzając cykl obliczeń otrzymuje się wyniki dalszych iteracji. Wyniki te zestawiono w tabelicy 4.2. W tabelicy 4.3 zebrano wyniki kolejnych iteracji rozwiązania równania (4.1) przy:

Tablica 4.2

n	0	1	2	3	4
$s_0(n)$	1	0	0	0	0
$s_1(n)$	1,006	0,012	0,025	0,050	0,100
$s_2(n)$	1,011	0,020	0,035	0,061	0,102
$s_3(n)$	1,012	0,023	0,036	0,061	0,103

Tablica 4.3

n	0	1	2	3	4
$s_1(n)$	1,013	0,026	0,052	0,104	0,207
$s_2(n)$	1,023	0,058	0,096	0,150	0,218
$s_3(n)$	1,037	0,073	0,108	0,156	0,225
$s_4(n)$	1,042	0,077	0,111	0,158	0,227

$$\hat{z}(\chi) = 0,2 (\chi - 0,5)^{-1}.$$

Uwaga: W obu przypadkach operator $x\hat{\Phi}(\cdot)$ spełnia warunek zwężenia.

Często operator $x\hat{\Phi}(\cdot)$ nie spełnia warunku zwężenia. Wówczas trzeba równanie (4.1) przygotować do metody kolejnych przybliżeń. Niech istnieje element $y \in L(W_+^M)$ taki, że $(e-xy) \in G[L(W_+^M)]$. Równanie (4.1) można zapisać w równoważnej postaci:

$$(e-xy)s = u + x[\hat{\Phi}(s) - ys],$$

skąd otrzymuje się:

$$s = (e-xy)^{-1}u + (e-xy)^{-1}x[\hat{\Phi}(s) - ys]. \quad (4.4)$$

Jeżeli operator $(e-xy)^{-1}x[\hat{\Phi}(\cdot) - y\cdot]$ jest zwężający, to równanie (4.4) można rozwiązywać przez iteracje. Powyższy rezultat można sformułować następująco:

TWIERDZENIE 4.1

Jeżeli istnieje element $y \in L(W_+^M)$ taki, że:

(I) operator $\hat{\Phi}(\cdot) - y\cdot$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą α ,

(II) $\bigwedge_{\chi \in K^M} 1 - \hat{z}(\chi)\hat{y}(\chi) \neq 0$,

(III) $\|(e-xy)^{-1}x\| \alpha < 1$,

to ciąg określony równościami:

$$s_{k+1} = (e-xy)^{-1}u + (e-xy)^{-1}x[\hat{\Phi}(s_k) - ys_k] \quad (4.5)$$

jest zbieżny do jednoznacznego rozwiązania równania (4.4).

Ze względu na stabilność układu ze sprzężeniem zwrotnym ważne jest następujące

TWIERDZENIE 4.2

Niech w równaniu (4.1) $u \in L(W_+^M)$. Jeżeli istnieje element $y \in L(W_+^M)$ taki, że:

(I) dla każdego $v \in L(W_+^M)$, $\|[\hat{\Phi}(v) - yv]^\wedge\|_\infty < \alpha \|v\|_\infty$

gdzie: $\|\hat{z}\|_\infty = \sup_{\chi \in K^M} |\hat{z}(\chi)|$, $\alpha > 0$,

(II) $\inf_{\chi \in K^M} \left| \frac{1}{\hat{z}(\chi)} - \hat{y}(\chi) \right| > \alpha$,

to istnieje stała $\beta > 0$ taka, że $\|s\|_\infty \leq \beta \|u\|_\infty$.

D o w ó d. Z założenia (II) wynika, że $(e-xy) \in G[L(W_+^M)]$, a więc równanie (4.4) jest równoważne równaniu (4.1). Z równania (4.4) na podstawie twierdzenia 2.12 (II) wynika oszacowanie:

$$\|s\|_\infty \leq \|(1-\hat{z}\hat{y})^{-1}\|_\infty \|u\|_\infty + \|(1-\hat{z}\hat{y})^{-1}\hat{z}\|_\infty \|\hat{\Phi}(s) - ys\|_\infty \leq \|(1-\hat{z}\hat{y})^{-1}\|_\infty \|u\|_\infty + \|\hat{z}^{-1} - \hat{y}\|_\infty \alpha \|s\|_\infty.$$

Oznaczając:

$$\hat{z} = \|\hat{z}^{-1} - \hat{y}\|_\infty \alpha = \sup_{\chi \in K^M} \left| \frac{1}{\hat{z}(\chi)} - \hat{y}(\chi) \right| \alpha = \frac{\alpha}{\inf_{\chi \in K^M} \left| \frac{1}{\hat{z}(\chi)} - \hat{y}(\chi) \right|}$$

z założenia (II) otrzymuje się, że $\hat{z} < 1$. Stąd wynika nierówność:

$$\|s\|_\infty \leq \frac{1}{1-\hat{z}} \|(1-\hat{z}\hat{y})^{-1}\|_\infty \|u\|_\infty. \quad \square$$

Oczywiście twierdzenia 4.1 i 4.2 posiadają swoje odpowiedniki we wszystkich algebrach wprowadzonych w paragrafach 3.1, 3.2 i 3.4.

4.2. Jednorodny operator czasowo niezmienniczy

Przez $S_{\text{sym}}(\mathcal{J}^M)$ oznacza się podprzestrzeń sygnałów w pełni symetrycznych przestrzeni sygnałów $S(\mathcal{J}^M)$, tj. zbiór wszystkich $s \in S(\mathcal{J}^M)$, których wartości $s(n)$ nie zmieniają się przy dowolnej permutacji współrzędnych n_1, \dots, n_M elementu $n \in \mathcal{J}^M$. Analogicznie należy rozumieć przestrzenie $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}^M)$, $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$, $L_{\text{sym}}^\infty(\mathcal{J}^M)$ itd. Łatwo sprawdzić, że mnożenie w $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$ określone wzorem (3.2) odwzorowuje $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M) \times L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$ w $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$, a więc przestrzeń $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$ jest podalgebrą Banacha algebry $L(\mathcal{J}_+^M)$. Rzeczywiście, jeżeli przez \mathcal{I}_1 oznaczyć operator i-tej permutacji współrzędnych n_1, \dots, n_M multiindeksu $n (0 < i < M!)$, to z wyrażenia (3.2) otrzymuje się:

$$xy[\mathcal{I}_1(n)] = \sum_{m \in \mathcal{J}^M} x[\mathcal{I}_1(n-m)]y(m) = \sum_{p \in \mathcal{J}^M} x[\mathcal{I}_1(n-p)]y[\mathcal{I}_1(p)]$$

dla dowolnych $n \in \mathcal{J}_+^M$, skąd wynika, że jeżeli $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$ i $y \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$, to $xy \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$. Wynika stąd też, że przyczynowy operator splotu $X(s) = xs$ odwzorowuje $L_{\text{sym}}^\infty(\mathcal{J}_+^M)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^M)$.

Łatwo sprawdzić, że operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$ określony następująco:

$$s^{\textcircled{m}}(n) = s(n_1)s(n_2)\dots s(n_m), \quad n \in \mathcal{J}_+^m, \quad n \in \mathcal{J}^m \quad (4.6)$$

odwzorowuje $L(\mathcal{J}_+^m)$ w $L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^m)$, a także odwzorowuje $L^\infty(\mathcal{J}^m)$ w $L_{\text{sym}}^\infty(\mathcal{J}_+^m)$ oraz że zachodzą równości:

$$\|s^{\textcircled{m}}\|_{L(\mathcal{J}_+^m)} = \|s\|_{L(\mathcal{J}_+^m)}^m \quad (4.7)$$

$$\|s^{\textcircled{m}}\|_{L^\infty(\mathcal{J}^m)} = \|s\|_{L^\infty(\mathcal{J}^m)}^m \quad (4.8)$$

$$[s^{\textcircled{m}}]^\wedge(\chi) = \hat{s}(\chi_1)\hat{s}(\chi_2)\dots\hat{s}(\chi_m), \quad s \in L(\mathcal{J}_+^m), \quad \chi \in \mathbb{R}^m \quad (4.9)$$

gdzie przekształcenie Gelfanda zadane jest wzorem (3.14).

Operatorem jednorodnym czasowo niezmienniczym stopnia m nazywa się operator X zadany na $L^\infty(\mathcal{J}^m)$ taki, że:

$$[X(s)](n) = [xs^{\textcircled{m}}](nI), \quad n \in \mathcal{J}^m, \quad (4.10)$$

gdzie: $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^m)$. Z twierdzenia 1.1 wynika, że operator X odwzorowuje $L^\infty(\mathcal{J}^m)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in L(\mathcal{J}_+^m)$. Założenie, że x jest elementem w pełni symetrycznym nie zmniejsza ogólności podanej definicji, o czym świadczy następujące

TWIERDZENIE 4.3

Dla każdego $x \in L(\mathcal{J}_+^m)$ istnieje taki element $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^m)$, że

$$[x's^{\textcircled{m}}](nI) = [xs^{\textcircled{m}}](nI)$$

przy dowolnym $s \in L^\infty(\mathcal{J}^m)$ i dowolnym $n \in \mathcal{J}^m$.

D o w ó d. Niech \mathcal{P} oznacza relację permutacji w zbiorze \mathcal{J}^m , to znaczy, że $p\mathcal{P}p'$ ($p, p' \in \mathcal{J}^m$) wtedy i tylko wtedy, gdy p' jest dowolną permutacją p . Łatwo przekonać się, że relacja ta jest zwrotna symetryczna i przechodnia, a więc jest równoważnością. Relacja ta dzieli zbiór \mathcal{J}^m na rozłączne klasy. Niech $\mathcal{J}^m(q)$ i l_q oznaczają odpowiednio klasę z przedstawicielem $q \in \mathcal{J}^m$ i liczbę elementów tej klasy, a (\mathcal{J}^m) oznacza zbiór wszystkich przedstawicieli różnych klas. Wówczas otrzymuje się:

$$\sum_{p \in \mathcal{J}^m} x'(nI-p)s^{\textcircled{m}}(p) = \sum_{q \in (\mathcal{J}^m)} s^{\textcircled{m}}(q) \sum_{p \in \mathcal{J}^m(q)} x'(nI-p). \quad (4.11)$$

Zawsze istnieje taki element $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{J}_+^m)$, że dla dowolnego $n \in \mathcal{J}^m$ zachodzi:

$$l_q x(nI-q) = \sum_{p \in \mathcal{J}^m(q)} x'(nI-p). \quad (4.12)$$

Z wyrażen (4.11) i (4.12) wynika, że:

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x'(nI-p)s^{\textcircled{m}}(p) &= \sum_{q \in (\mathcal{J}^m)} l_q x(nI-q)s^{\textcircled{m}}(q) = \\ &= \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x(nI-p)s^{\textcircled{m}}(p). \quad \square \end{aligned}$$

Zachodzi następująca równość:

$$[xs^{\textcircled{m}}]^\wedge(\chi) = \hat{x}(\chi)(s^{\textcircled{m}})^\wedge(\chi), \quad \chi \in \mathbb{R}^m. \quad (4.13)$$

Ze wzoru (3.5) na odwrotne przekształcenie Gelfanda w $L(\mathcal{J}_+^m)$ otrzymuje się:

$$[xs^{\textcircled{m}}](n) = \frac{1}{n!} [(xs^{\textcircled{m}})^\wedge]^\wedge(n)(0), \quad n \in \mathcal{J}_+^m$$

a stąd:

$$[X(s)](n) = [xs^{(m)}](nI) = \frac{1}{(nI)^m} [(xs^{(m)})^{\wedge}](nI)(0), \quad n \in \mathcal{N}_+^m \quad (4.14)$$

Wyrażenia (4.9), (4.13) i (4.14) służą kolejno do obliczania poszczególnych wartości $[X(s)](n)$, $(n \in \mathcal{N}_+^m)$ sygnału wyjściowego $X(s)$. Za pomocą wzorów (4.8) i (4.10) można oszacować normę elementu $X(s)$:

$$\|X(s)\|_{L^\infty(\mathcal{N})} \leq \|x\|_{L^1(\mathcal{N}_+^m)} \|s\|_{L^\infty(\mathcal{N})}^m \quad (4.15)$$

Analogicznie można wprowadzić pojęcie operatora jednorodnego w przestrzeni $\mathcal{P}_\varphi(\mathcal{N})$. Operator $(\cdot)^{(m)}$ określony wzorem (4.6) odwzorowuje $\mathcal{P}_\varphi(\mathcal{N})$ w $\mathcal{P}_{\varphi \text{ Isym}}(\mathcal{N}^m)$ (względnie $\mathcal{P}'_\varphi(\mathcal{N})$ w $\mathcal{P}'_{\varphi \text{ Isym}}(\mathcal{N}^m)$). Zachodzą równości analogiczne do (4.7), (4.8) i (4.9):

$$\|s^{(m)}\|_{\mathcal{P}'_{\varphi I}(\mathcal{N}^m)} = \|s\|_{\mathcal{P}'_\varphi(\mathcal{N})}^m \quad (4.16)$$

$$\|s\|_{\mathcal{P}'_{\varphi I}(\mathcal{N}^m)} = \|s\|_{\mathcal{P}'_\varphi(\mathcal{N})}^m \quad (4.17)$$

$$[s^{(m)}]^{\wedge}(X) = \hat{s}(X_1) \hat{s}(X_2) \dots \hat{s}(X_m), \quad s \in \mathcal{P}_\varphi(\mathcal{N}), \quad X \in \mathcal{E}_{\varphi I} \quad (4.18)$$

Operatorem jednorodnym stopnia m nazywa się operator $X: \mathcal{P}_\varphi(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{P}_\varphi(\mathcal{N})$ taki, że:

$$[X(s)](n) = [xs^{(m)}](nI), \quad 0 \leq n \leq \varphi-1, \quad (4.19)$$

gdzie: $x \in \mathcal{P}_{\varphi \text{ Isym}}(\mathcal{N}^m)$. Operator ten można też traktować jako odwzorowanie $\mathcal{P}_\varphi(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{P}'_\varphi(\mathcal{N})$, przy czym mnożenie rozumie się w sensie określenia (3.13).

Zachodzi następująca równość:

$$[xs^{(m)}]^{\wedge}(X) = \hat{x}(X)(s^{(m)})^{\wedge}(X). \quad (4.20)$$

Stosując do wyrażenia (4.20) wzór (3.15) dla odwrotnego przekształcenia Gelfanda i biorąc pod uwagę, że:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_m = \varepsilon = \exp(j \frac{2\pi}{\varphi}),$$

otrzymuje się:

$$[xs^{(m)}](n) = \frac{1}{\varphi^m} \sum_{k=0}^{(\varphi-1)I} \varepsilon^{-(k,n)} [xs^{(m)}]^{\wedge}[(\varepsilon I)^{(k)}],$$

gdzie: $n, k \in \mathcal{N}^m$. Stąd:

$$[X(s)](n) = xs^{(m)}(nI) = \frac{1}{\varphi^m} \sum_{k=0}^{(\varphi-1)I} \varepsilon^{-n \parallel k \parallel} [xs^{(m)}]^{\wedge}[(\varepsilon I)^{(k)}] \quad (4.21)$$

gdzie: $n \in \mathcal{N}$, $0 \leq n \leq \varphi-1$.

Wyrażenia (4.18), (4.20) i (4.21) służą do obliczania kolejnych wartości $[X(s)](n)$ sygnału $X(s)$. Normę elementu $[X(s)]$ można oszacować za pomocą nierówności:

$$\|X(s)\|_{\mathcal{P}'_\varphi(\mathcal{N})} \leq \|x\|_{\mathcal{P}'_{\varphi I}(\mathcal{N}^m)} \|s\|_{\mathcal{P}'_\varphi(\mathcal{N})}^m \quad (4.22)$$

4.3. Identyfikacja układu nieliniowego za pomocą operatora jednorodnego

Identyfikacja układu za pomocą operatora jednorodnego polega na określeniu operatora jednorodnego X stopnia m na drodze pomiarów odpowiedzi $X(s)$ na zespół pobudeń $s \in L(\mathcal{N}_+)$. Ilustruje to rys. 4.3.

Problem identyfikacji sprowadza się do wyznaczenia funkcji:

$$s \in L(\mathcal{N}_+) \rightarrow \boxed{X} \rightarrow X(s) \quad x [(\cdot)_{-p_1}, \dots, (\cdot)_{-p_m}], \quad x \in \mathcal{I}_{\text{sym}}(\mathcal{N}_+^m) \quad (4.23)$$

Rys. 4.3. Układ nieliniowy poddany identyfikacji

dla wszystkich wartości p_1, \dots, p_m poprzez pomiary odpowiedzi układu na ciąg $\{\Delta_n^{(i)}\}$ pobudeń:

$$\Delta_n^{(i)} = \delta^{n_1(i)} + \dots + \delta^{n_1(i)} \quad i=1, \dots, m.$$

Niech $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{N}_+^m$ i niech K_p^p oznacza zbiór wszystkich różnych kombinacji $q = (q_1, \dots, q_r)$ wyrazów ciągu p . Określając odpowiedź układu na sygnał Δ_p , a następnie odejmując od niej i dodając na przemian sumy odpowiedzi na sygnały Δ_q dla q należących kolejno do $K_{p-1}^p, K_{p-2}^p, \dots, K_1^p$, otrzymuje się funkcję (4.23):

$$x(n-p_1, n-p_2, \dots, n-p_m) = \frac{1}{m!} ([X(\Delta_p)](n) - \sum_{q \in K_{m-1}^p} [X(\Delta_q)](n) + \sum_{q \in K_{m-2}^p} [X(\Delta_q)](n) - \sum_{q \in K_{m-3}^p} [X(\Delta_q)](n) + \dots + (-1)^{m-1} \sum_{q \in K_1^p} [X(\Delta_q)](n)).$$

Wyrażenie to można zapisać krótko w postaci:

$$x(nI-p) = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \sum_{q \in K_{m-r}^p} [X(\Delta_q)](n). \quad (4.24)$$

Poszukiwanie funkcji $x \in \mathcal{P}_{\text{Isym}}(\mathcal{H}^m)$ przeprowadza się analogicznie, z tym że ciąg próbných pobudzeń $\Delta_n(i) \in \mathcal{P}_2(\mathcal{H})$ ma postać:

$$\Delta_n(i) = \omega_{n_1}^{n_1(i)} + \dots + \omega_{n_m}^{n_m(i)}, \quad i=1, \dots, m.$$

Wówczas wzór (4.24) pozostaje w mocy.

Analiza układu pokazanego na rysunku 4.3 jest zagadnieniem odmiennym od identyfikacji. Przy analizie punktem wyjścia jest zwykle postać uwikłana operatora układu zadana często równaniem (4.1). Tak więc chcąc aproksymować operator układu operatorem jednorodnym X stopnia m można zastosować połączony algorytm analizy i identyfikacji. Poszczególne odpowiedzi $X(\Delta_q)$ na sygnały $s = \Delta_q$ wyznacza się stosując algorytm kolejnych przybliżeń opisany w paragrafie 4.1, a następnie odpowiednią funkcję $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{H}_+^m)$ lub $\mathcal{P}_{\text{Isym}}(\mathcal{H}^m)$ określa się za pomocą wzoru (4.24).

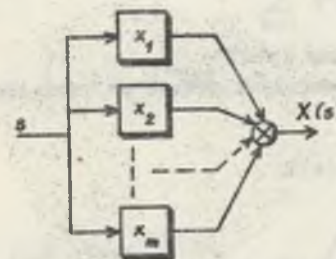
4.4. Synteza operatora jednorodnego

Każdy jednorodny operator określony wyrażeniem (4.10) z odpowiedzią impulsową $x \in L_{\text{sym}}(\mathcal{H}_+^m)$ w pełni faktoryzowalną:

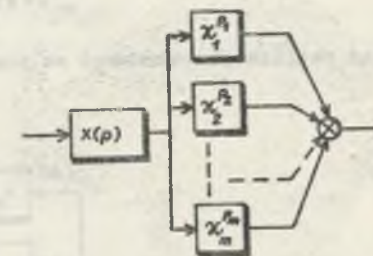
$$x(n) = x_1(n_1)x_2(n_2)\dots x_m(n_m), \quad n \in \mathcal{H}^m \quad (4.25)$$

jest syntetyzowalny w strukturze widocznej na rysunku 4.4. Struktura ta składa się z m równoległych jednowymiarowych układów liniowych o odpowiedziach impulsowych x_1, \dots, x_m "spiętych" mnożnikiem.

Z określenia prostego i odwrotnego przekształcenia Gelfanda w $L(\mathcal{H}_+^m)$ (wzory (3.4) i (3.5)) wynika, że funkcja x jest w pełni faktoryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja \hat{x} jest w pełni faktoryzowalna:



Rys. 4.4. Struktura realizacji operatora jednorodnego stopnia m z odpowiedzią impulsową w pełni faktoryzowalną



Rys. 4.5. Struktura realizacji operatora jednorodnego z faktoryzowalną odpowiedzią impulsową dana wyrażeniem (4.26)

$$\hat{x}(\chi) = \hat{x}_1(\chi_1)\hat{x}_2(\chi_2)\dots\hat{x}_m(\chi_m).$$

Jeżeli funkcja x nie jest w pełni faktoryzowalna, wówczas funkcję \hat{x} można rozłożyć w poldysku \bar{K}^m w szereg potęgowy:

$$\hat{x}(\chi) = \sum_{\|p\|=0}^{\infty} x(p)\chi^p = \sum_{\|p\|=0}^{\infty} \hat{x}_p(\chi),$$

gdzie funkcje \hat{x}_p :

$$\hat{x}_p(\chi) = x(p)\chi^p, \quad p \in \mathcal{H}_+^m, \quad \chi \in \bar{K}^m \quad (4.26)$$

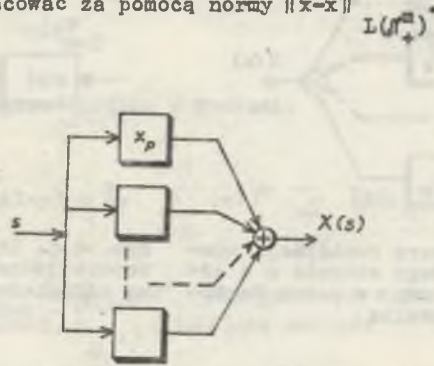
są w pełni faktoryzowalne. Zatem odpowiedź impulsowa, której przekształceniem Gelfanda jest \hat{x}_p , jest realizowalna w strukturze widocznej na rys. 4.5. Struktura ta składa się z m równoległych bloków liniowych realizujących opóźnienia odpowiednio o p_1, \dots, p_m "spiętych" mnożnikiem, oraz układu proporcjonalnego ω współczynnikiem $x(p)$. Następnie odpowiedź impulsowa:

$$x = \sum_{\|p\|=0}^{\infty} x_p \quad (4.27)$$

trzeba zrealizować w strukturze widocznej na rys. 4.6, złożonej z nieskończonej liczby bloków realizujących operatory jednorodne o odpowiedziach impulsowych x_p . W praktyce szereg (4.27) trzeba obciąć, otrzymując:

$$x' = \sum_{\substack{p=0 \\ \|p\|=0}}^M x_p, \quad p \in \mathcal{H}_+^m$$

a błąd realizacji oszacować za pomocą normy $\|x-x'\|$



Rys. 4.6. Struktura realizacji operatora jednorodnego z niefaktoryzowalną odpowiedzią impulsową

4.5. Operatory analityczne czasowo niezmiennicze

Odwzorowanie $P_m : L^\infty(\mathcal{H}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{H})$ określone wyrażeniem:

$$[P_m(s)](n) = \sum_{k=1}^m [x_k(s)](n) = \sum_{k=1}^m [x_k s^{(k)}](n), \quad n \in \mathcal{H} \quad (4.28)$$

gdzie: $x_k \in L_{sym}(\mathcal{H}_+^k)$, nazywa się operatorem wielomianowym stopnia m . Normę elementu można oszacować za pomocą nierówności:

$$\|P_m(s)\|_{L^\infty(\mathcal{H})} \leq \sum_{k=1}^m \|x_k\|_{L(\mathcal{H}_+^k)} \|s\|_{L^\infty(\mathcal{H})} \quad (4.29)$$

Jeżeli dla każdego $s \in Z$, gdzie Z jest zbiorem w $L^\infty(\mathcal{H})$ istnieje granica $P(s)$ ciągu $\{P_m(s)\}$ w sensie normy⁵⁾, to operator $P : L^\infty(\mathcal{H}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{H})$ nazywa się operatorem analitycznym. Z oszacowania (4.29) wynika, że jeżeli zwykły szereg potęgowy:

⁵⁾ Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieją: element $P(s) \in L^\infty(\mathcal{H})$ niezależny od ϵ oraz liczba $M(\epsilon) > 0$ takie, że $\|P(s) - P_m(s)\|_{L^\infty(\mathcal{H})} < \epsilon$ za każdym razem, gdy $m > M(\epsilon)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_{L(\mathcal{H}_+^k)} \|s\|_{L^\infty(\mathcal{H})}^k$$

jest zbieżny, to szereg funkcjonalny:

$$P(s) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(s) \quad (4.30)$$

także jest zbieżny.

W praktyce pojawia się często następujący problem. Kiedy operator układu nieliniowego zadany w postaci uwikłanej równaniem (4.1) można rozwiązać przy użyciu operatora analitycznego? Warunek dostateczny podaje następujące

TWIERDZENIE 4.4

Niech w równaniu:

$$s = u + X[\Phi(s)] \quad (4.31)$$

$u \in L^\infty(\mathcal{H})$, $X : L^\infty(\mathcal{H}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{H})$ jest operatorem mnożenia splotowego przez element $x \in L(\mathcal{H}_+)$: $X(v) = xv$, a Φ jest $L^\infty(\mathcal{H})$ wartościową funkcją zadaną na $L^\infty(\mathcal{H})$ taką, że:

$$[\Phi(v)](n) = \psi[v(n)], \quad (4.32)$$

gdzie: $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jest funkcją analityczną. Jeżeli operator $X \cdot \Phi$ jest zwężający, to istnieje operator analityczny P taki, że $s = P(u)$.

D o w ó d. Do dowodu twierdzenia będą potrzebne: pojęcie zbieżności ciągu dwuargumentowego w przestrzeni Banacha oraz dwa lematy.

Niech $\{v_m\}$ będzie ciągiem dwuargumentowym o wartościach w pewnej przestrzeni Banach \mathcal{E} . Ciąg ten nazywa się ciągiem zbieżnym do granicy $v \in \mathcal{E}$, jeżeli:

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{M(\mathcal{E}), N(\mathcal{E})} \bigwedge_{m > M(\mathcal{E})} \bigwedge_{n > N(\mathcal{E})} \|v - v_m\| < \epsilon$$

Symbol $C(\mathcal{E})$ oznacza zbiór wszystkich operatorów zwężających odwzorowujących domknięty zbiór przestrzeni \mathcal{E} w siebie.

L e m a t 1

Jeżeli ciąg $\{A_n\}$ operatorów z $C(\mathcal{L})$ jest silnie zbieżny do operatora $A \in C(\mathcal{L})$, tj. jeżeli $\bigwedge_{\epsilon \in \mathcal{L}} \|\Delta(v) - A_n(v)\| \rightarrow 0$, to ciąg $\{v_m\}$ określony równościami:

$$v_{m,n} = A_m(v_{m,n-1})$$

jest zbieżny do rozwiązania równania $v = A(v)$.

D o w ó d l e m a t u. Z zasady odwzorowań zwięzających wynika, że dla ustalonego m istnieje granica $v_m = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{m,n}$ taka, że $v_m = A_m(v_m)$. Mają miejsce następujące oszacowania:

$$\|v - v_{m,n}\| < \|v - v_m\| + \|v_m - v_{m,n}\|, \quad (4.33)$$

oraz:

$$\begin{aligned} \|v - v_{m,n}\| &= \|A(v) - A_m(v_{m,n})\| < \|A(v) - A_m(v)\| + \|A_m(v) - A_m(v_{m,n})\| < \|A(v) - A_m(v)\| + \\ &+ \lambda_m \|v - v_{m,n}\| < \|A(v) - A_m(v)\| + \lambda \|v - v_{m,n}\|, \end{aligned}$$

gdzie: $0 < \lambda_m \leq \lambda < 1$.

Zatem:

$$\|v - v_{m,n}\| < \frac{1}{1-\lambda} \|A(v) - A_m(v)\|. \quad (4.34)$$

Z nierówności (4.34) wynika, że dla $m > M$ zachodzi nierówność $\|v - v_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Oprócz tego przy ustalonym $m > M$, dla $n > N$ spełniona jest nierówność $\|v_m - v_{m,n}\| < \frac{\epsilon}{2}$. Zatem dla $m > M$ i $n > N$ z nierówności (4.33) wynika, że $\|v - v_{m,n}\| < \epsilon$, co kończy dowód lematu.

L e m a t 2

Jeżeli funkcja $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ w wyrażeniu (4.32) jest wielomianem, a W jest operatorem wielomianowym, to $X \cdot \Phi \cdot W$ też jest operatorem wielomianowym.

D o w ó d l e m a t u. Bez utraty ogólności można założyć, że φ jest jednomianem stopnia r : $\varphi(t) = t^r$, ($t \in \mathcal{R}$). Wówczas:

$$[\Phi(W(s))] (n) = \left[\sum_{k=1}^m w_k s^{(k)} (nI) \right]^r, \quad (4.35)$$

gdzie: $w_k \in L_{\text{sym}}(\mathcal{R}^k)$, $n \in \mathcal{N}$. Wyrażenie (4.35) jest sumą m^r składników typu:

$$\begin{aligned} [w_{k_1} s^{(k_1)}] (nI) \dots [w_{k_r} s^{(k_r)}] (nI) &= \\ &= \sum_{p_1 \in \mathcal{N}^{k_1}} w_{k_1} (nI - p_1) s^{(k_1)} (p_1) \dots \sum_{p_r \in \mathcal{N}^{k_r}} w_{k_r} (nI - p_r) s^{(k_r)} (p_r) = \\ &= \sum_{p_1, \dots, p_r} w_{k_1} (nI - p_1) \dots w_{k_r} (nI - p_r) s^{(k_1)} (p_1) \dots s^{(k_r)} (p_r) = \\ &= \sum_{p \in \mathcal{N}^{k_1 + \dots + k_r}} w_{k_1, \dots, k_r} (nI - p) s^{(k_1 + \dots + k_r)} (p). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Z wyrażenia (4.36) wynika, że $w_{k_1, \dots, k_r} \in L_{\text{sym}}(\mathcal{R}^{k_1 + \dots + k_r})$, a więc $\Phi \cdot W$ jest operatorem wielomianowym. Pozostaje zbadać złożenie operatora splotowego X z operatorem jednorodnym Y o odpowiedzi impulsowej $y \in L_{\text{sym}}(\mathcal{R}^m)$. Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} [X \cdot Y(s)] (n) &= \sum_{p \in \mathcal{N}} x(n-p) \sum_{q \in \mathcal{N}^m} y(pI - q) s^{(m)} (q) = \\ &= \sum_{q \in \mathcal{N}^m} s^{(m)} (q) \sum_{p \in \mathcal{N}} x(n-p) y(pI - q) = \\ &= \sum_{q \in \mathcal{N}^m} s^{(m)} (q) \sum_{p \in \mathcal{N}} y(nI - q - pI) x(p) = \sum_{q \in \mathcal{N}^m} y'(nI - q) s^{(m)} (q), \end{aligned}$$

gdzie:

$$y'(k) = \sum_{p \in \mathcal{N}} y(k - pI) x(p), \quad k \in \mathcal{N}^m. \quad (4.37)$$

Z wyrażenia (4.37) wynika nierówność:

$$\sum_{k \in \mathcal{N}^m} |y'(k)| = \sum_{k \in \mathcal{N}^m} \left| \sum_{p \in \mathcal{N}} y(k - pI) x(p) \right| \leq \sum_{p \in \mathcal{N}} |x(p)| \sum_{k \in \mathcal{N}^m} |y(k)|.$$

oraz pełna symetria funkcji y' . Zatem $y' \in L_{sym}(J^m)$, a więc operator $X \cdot \Phi \cdot W$ jest operatorem wielomianowym, co kończy dowód lematu.

Niech $\{\Phi_m\}$ będzie ciągiem operatorów $L^\infty(J) \rightarrow L^\infty(J)$ określonych następująco:

$$[\Phi_m(v)](n) = \Psi_m[v(n)], \quad n \in J$$

gdzie: $\{\Psi_m\}$ jest ciągiem wielomianów, $(\Psi_m: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R})$, zbieżnych jednostajnie do funkcji analitycznej Ψ . Niech $\{s_{pq}\}$ będzie dwuargumentowym ciągiem elementów przestrzeni $L^\infty(J)$ o wyrazach określonych następująco:

$$s_{pq} = u + X [\Phi_p(s_{p,q-1})], \quad s_{p,q} = u.$$

Z lematu 2 wynika, że istnieje ciąg $\{P_{pq}\}$ operatorów wielomianowych takich, że:

$$s_{pq} = P_{pq}(u).$$

Zatem z definicji operatora analitycznego i z lematu 1 wynika, że istnieje operator analityczny P taki, że $s = P(u)$. \square

Dowód twierdzenia 4.4 daje jednocześnie algorytm poszukiwania rozwiązania równania (4.31) w formie operatora analitycznego. Jest to algorytm iteracyjny, który w skończonej liczbie kroków daje operator wielomianowy.

Identyfikację układu przy użyciu operatora wielomianowego stopnia m , określonego wyrażeniem (4.28), przeprowadza się wykorzystując metodę identyfikacji operatorem jednorodnym. Pozostaje w mocy wzór (4.24), za pomocą którego wyznacza się odpowiedź impulsową x_m (najwyższego stopnia):

$$x_m(nI-p) = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \sum_{q \in K_{m-r}^p} [P_m(\Delta_q)](n), \quad (4.38)$$

gdzie: $n \in J$, a P_m jest operatorem układu podlegającego identyfikacji. Po określeniu odpowiedzi impulsowej x_m można wprowadzić operator P_{m-1} o stopniu obniżonym:

$$[P_{m-1}(s)](n) = [P_m(s)](n) - \sum_{p \in J^m} x_m(nI-p) s^{(m)}(p),$$

a następnie wyznaczyć odpowiedź impulsową x_{m-1} ze wzoru analogicznego do (4.38):

$$x_{m-1}(nI-p) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{r=0}^{m-2} (-1)^r \sum_{q \in K_{m-1-r}^p} [P_{m-1}(\Delta_q)](n),$$

gdzie: $n \in J$, $p \in J^{m-1}$. Kontynuując dalej ten proces można kolejno określić wszystkie odpowiedzi impulsowe x_m, x_{m-1}, \dots, x_1 operatora wielomianowego P_m i tym samym zakończyć identyfikację.

Chcąc aproksymować operatorem wielomianowym operator układu zadany w sposób uwikłany, można zastosować połączony algorytm analizy i identyfikacji analogicznie jak podczas aproksymacji operatorem jednorodnym (paragraf 4.3). Postępowanie takie można stosować nawet wówczas, gdy charakterystyka bloku nieliniowego nie jest zadana w sposób algebraiczny, lecz graficzny.

Trzeba wreszcie zaznaczyć, że każdy operator wielomianowy jest syntetyzowalny w strukturze równoległej bloków realizujących składowe operatory jednorodne, spiętych sumatorem.

5. NIELINIOWE CZASOWO ZMIENNE UKŁADY ANALITYCZNE

5.1. \mathcal{K}_+ i \mathcal{K}_- algebry

Niech x będzie \mathbb{C} -wartościową funkcją zadaną w $\mathcal{K}_x \mathcal{J}^M$ taką, że:

(I) $x(n, m) = 0$ dla $n \in \mathcal{J}, m \notin \mathcal{J}^M$ ($n \in \mathcal{J}, m \in \mathcal{J}^M$),

(II) $\bigvee_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \bigwedge_{n \in \mathcal{J}} \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(n, m)| < \alpha$

Przez $\mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$ oznaczamy będzie zbiór wszystkich funkcji x spełniających warunki (I) i (II). Łatwo zauważyć, że $\mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$ jest przestrzenią liniową, a po wprowadzeniu normy:

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathcal{J}} \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(n, m)| \tag{5.1}$$

staje się przestrzenią Banacha.

TWIERDZENIE 5.1

Operator przyczynowy X określony wyrażeniem:

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{J}^M} x(n, m)s(m) \tag{5.2}$$

odwzorowuje przestrzeń $L^\infty(\mathcal{J}^M)$ w $L^\infty(\mathcal{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$.

D o w ó d. Jeżeli $x \in \mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$, to istnieje taka liczba $\alpha \in \mathcal{R}_+$, że dla dowolnego $s \in L^\infty(\mathcal{J}^M)$ i dowolnego $n \in \mathcal{J}$ zachodzi nierówność:

$$|[X(s)](n)| = \left| \sum_{m \in \mathcal{J}^M} x(n, m)s(m) \right| < \|s\| \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(n, m)| < \|s\| \alpha,$$

a więc $X(s) \in L^\infty(\mathcal{J})$. Zatem warunek $x \in \mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$ jest wystarczający.

Dowód konieczności trzeba rozpocząć od wykazania, że jeżeli $X: L^\infty(\mathcal{J}^M) \rightarrow L^\infty(\mathcal{J})$, to szereg $\sum_{m \in \mathcal{J}^M} x(n, m)$ jest absolutnie zbieżny przy dowolnym $n \in \mathcal{J}$.

Niech będzie przeciwnie i niech sygnał s będzie określony następująco:

$$s(m) = \exp[-j \arg x(o, m)], \quad m \in \mathcal{J}^M.$$

Wówczas:

$$[X(s)](o) = \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(o, m)|,$$

skąd wynika, że $X(s) \notin L^\infty(\mathcal{J})$, a więc szereg $\sum_{m \in \mathcal{J}^M} x(n, m)$ musi być absolutnie zbieżny przy dowolnym $n \in \mathcal{J}$. Aby wykazać, że funkcja $\sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(\cdot, m)|$ jest ograniczona, korzysta się z twierdzenia Banacha-Steinhausa:

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcjonałów liniowych zadanych w przestrzeni Banacha i niech $\|f_n\|$ oznacza normę funkcjonału f_n . Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(s)|$ jest skończona dla dowolnego s , to ciąg $\{\|f_n\|\}$ jest ograniczony.

W tym przypadku funkcjonał f_n zadany na $L^\infty(\mathcal{J}^M)$ określony jest następująco:

$$f_n(s) = \sum_{m \in \mathcal{J}^M} x(n, m)s(m).$$

Jego normę oblicza się z wyrażenia:

$$\|f_n\| = \sup_{s \in L^\infty(\mathcal{J}^M)} \frac{|f_n(s)|}{\|s\|_{L^\infty(\mathcal{J}^M)}} = \sup_{\|s\|=1} |f_n(s)| = \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(n, m)|. \tag{5.3}$$

Jeżeli $X: L^\infty(\mathcal{J}^M) \rightarrow L^\infty(\mathcal{J})$, to ciąg $\{\|f_n(s)\|\}$ jest ograniczony od góry i z twierdzenia Banacha-Steinhausa oraz ze wzoru (5.3) wynika, że

$$\bigvee_{\alpha \in \mathcal{R}_+} \bigwedge_{n \in \mathcal{J}} \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(n, m)| < \alpha. \square$$

Z twierdzenia 5.1 wynika następujący

Wniosek

Każdemu elementowi x przestrzeni $\mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie element X przestrzeni Banacha $\mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)$ przyczynowych operatorów liniowych odwzorowujących $L^\infty(\mathcal{J}^M)$ w $L^\infty(\mathcal{J})$ z normą:

$$\|X\| = \sup_{s \in L^\infty(\mathcal{J}^M)} \frac{\|X(s)\|_{L^\infty(\mathcal{J})}}{\|s\|_{L^\infty(\mathcal{J}^M)}} = \|x\|_{\mathcal{K}_x(\mathcal{J}^M)} \tag{5.4}$$

Istotnie:

$$\sup_{s \in L^\infty(\mathcal{J}^M)} \frac{\|X(s)\|_{L^\infty(\mathcal{J})}}{\|s\|_{L^\infty(\mathcal{J}^M)}} = \sup_{\|s\|=1} \|X(s)\| = \sup_{n \in \mathcal{J}} \sum_{m \in \mathcal{J}^M} |x(n, m)|.$$

Przez $\Gamma(\mathcal{H}^M)$ oznaczany będzie zbiór:

$$\Gamma(\mathcal{H}^M) = \left\{ s \in L^\infty(\mathcal{H}^M) : \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \bigwedge_{n > N} |s(n) - \xi| < \varepsilon \right\}$$

$\Gamma(\mathcal{H}^M)$ jest więc zbiorem wszystkich sygnałów wielowymiarowych ograniczonych i zbieżnych przy $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_M \rightarrow \infty$. Będzie stosowany zapis $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)$ lub $s(n) \rightarrow \xi, (n \in \mathcal{H}^M)$. Nietrudno przekonać się, że $\Gamma(\mathcal{H}^M)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $L^\infty(\mathcal{H}^M)$ z niezmienną normą.

Symbol $\mathcal{K}(\mathcal{H}^M)$ oznaczać będzie zbiór wszystkich $x \in \mathcal{X}_T(\mathcal{H}^M)$ takich, że:

(I) istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) = \alpha_m$ dla dowolnego ustalonego $m \in \mathcal{H}^M$, (5.5)

(II) $\sum_{m \in \mathcal{H}^M} x(n, m) = \beta_n \rightarrow \beta$ przy $n \rightarrow \infty$. (5.6)

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{K}(\mathcal{H}^M)$ z normą określoną wzorem (5.1) jest podprzestrzenią przestrzeni Banacha $\mathcal{X}_T(\mathcal{H}^M)$.

TWIERDZENIE 5.2

Operator przyczynowy X określony wzorem (5.2) odwzorowuje przestrzeń $\Gamma(\mathcal{H}^M)$ w $\Gamma(\mathcal{H})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^M)$. Ponadto, jeżeli $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n), (n \in \mathcal{H}^M)$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [X(s)](n) = \beta \xi + \sum_{m \in \mathcal{H}^M} \alpha_m [s(n) - \xi]. \quad (5.7)$$

D o w ó d. Niech $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^M)$. Wówczas istnieje taka liczba $\delta \in \mathbb{R}_+$, że przy dowolnym $n \in \mathcal{H}$ spełniona jest nierówność:

$$\sum_{m < N} |x(n, m)| < \delta, \quad n \in \mathcal{H}^M,$$

skąd wynika, że:

$$\sum_{m < N} |\alpha_m| < \delta,$$

czyli szereg $\sum_{m \in \mathcal{H}^M} \alpha_m$ jest absolutnie zbieżny. Niech $s \in \Gamma(\mathcal{H}^M)$ i $s(n) = \xi + \Delta s(n)$, gdzie $\Delta s(n) \rightarrow 0, n \in \mathcal{H}^M$. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathcal{H}^M$ takie, że $|\Delta s(n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $n > N$, oraz istnieje $\nu \in \mathcal{H}$ takie, że:

$$\left| \sum_{m < N} [x(n, m) - \alpha_m] \Delta s(m) \right| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad \text{dla } n > \nu.$$

Czyli dla $n > \nu$ zachodzi następująca nierówność:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \in \mathcal{H}^M} [x(n, m) - \alpha_m] \Delta s(m) \right| &< \left| \sum_{m < N} [x(n, m) - \alpha_m] \Delta s(m) \right| + \\ &+ \sum_{m > N} (|x(n, m)| + |\alpha_m|) \Delta s(m) < \frac{1}{3} \varepsilon + 2 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd otrzymuje się:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathcal{H}^M} x(n, m) \Delta s(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathcal{H}^M} x(n, m) [s(m) - \xi] = \sum_{m \in \mathcal{H}^M} \alpha_m \Delta s(m). \quad (5.8)$$

Z wyrażeń (5.6) i (5.8) wynika, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathcal{H}^M} x(n, m) s(m) = \beta \xi + \sum_{m \in \mathcal{H}^M} \alpha_m [s(m) - \xi],$$

a więc $X(s) \in \Gamma(\mathcal{H})$.

Na odwrót, jeżeli $X : \Gamma(\mathcal{H}^M) \rightarrow \Gamma(\mathcal{H})$, to z tego, że $\Gamma(\mathcal{H}^M)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $L^\infty(\mathcal{H}^M)$ i z twierdzenia 5.1 wynika, że $x \in \mathcal{K}_T(\mathcal{H}^M)$. Podstawiając $s = \delta^p, (p \in \mathcal{H}_+^M, \delta^p \in \Gamma(\mathcal{H}^M))$, otrzymuje się:

$$[X(\delta^p)](n) = x(n, p), \quad n \in \mathcal{H}$$

a więc musi istnieć $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n, p) = \alpha_p$ przy dowolnym ustalonym $p \in \mathcal{H}_+^M$. Jeżeli podstawić $s(m) = 1$ dla wszystkich $m \in \mathcal{H}^M$, to

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{H}^M} x(n, m), \quad n \in \mathcal{H},$$

a zatem musi być spełniony warunek (5.6). Zatem $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}^M)$. \square

W szczególnym przypadku, gdy $M = 1$, twierdzenie 5.2 przechodzi w twierdzenie Kojimy-Schura ([1], par. 4.1).

Niech $\Gamma_0(\mathcal{H}^M)$ będzie zbiorem wszystkich M -wymiarowych sygnałów ograniczonych i zbieżnych do zera, tj.:

$$\Gamma_0(\mathcal{H}^M) = \left\{ s \in L^\infty(\mathcal{H}^M) : \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathcal{H}^M \bigwedge_{n > N} |s(n)| < \varepsilon \right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\Gamma_0(\mathcal{H}^M)$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\Gamma(\mathcal{H}^M)$.

Niech

$$\mathcal{K}_0(\mathcal{M}^M) = \left\{ x \in \mathcal{K}_r(\mathcal{M}^M) : \bigwedge_{n \in \mathcal{M}} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) = 0 \right\}.$$

Z twierdzenia 5.2 wynika następujące

TWIERDZENIE 5.3

Operator przyczynowy X zadany wyrażeniem (5.2) odwzorowuje przestrzeń $\Gamma_0(\mathcal{M}^M)$ w $\Gamma_0(\mathcal{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{K}_0(\mathcal{M}^M)$.

Z twierdzeń 5.2 i 5.3 wynika:

Wniosek

Każdemu elementowi x przestrzeni $\mathcal{K}(\mathcal{M}^M)$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie element X przestrzeni Banacha $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{M}^M)$ przyczynowych operatorów liniowych odwzorowujących $\Gamma(\mathcal{M}^M)$ w $\Gamma(\mathcal{M})$ z normą określoną wzorem (5.4). Każdemu elementowi x przestrzeni $\mathcal{K}_0(\mathcal{M}^M)$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie element X przestrzeni Banacha $\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{M}^M)$ operatorów przyczynowych liniowych odwzorowujących $\Gamma_0(\mathcal{M}^M)$ w $\Gamma_0(\mathcal{M})$, z normą określoną wzorem (5.4).

Przestrzenie $\mathcal{K}_r(\mathcal{M})$, $\mathcal{K}(\mathcal{M})$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{M})$ będą dalej krótko oznaczane przez \mathcal{K}_r , \mathcal{K} , \mathcal{K}_0 .

TWIERDZENIE 5.4

Przestrzenie \mathcal{K}_r , \mathcal{K} , \mathcal{K}_0 z mnożeniem:

$$[x_1 \ x_2] (n, m) = \sum_{p \in \mathcal{M}} x_1(n, p) x_2(p, m) \quad (5.9)$$

tworzą algebry Banacha. Ponadto dla algebr \mathcal{K}_r , \mathcal{K} , \mathcal{K}_0 obowiązują inkluzje $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_r$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_r$.

D o w ó d. Z wniosków do twierdzeń 5.1 oraz 5.2 i 5.3 wynika, że przestrzenie $\tilde{\mathcal{K}}_r$, $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{K}}_0$ z mnożeniem określonym jako złożenie operatorów tworzą, każda z osobna, algebry Banacha (dowolna przestrzeń operatorów liniowych ograniczonych odwzorowujących przestrzeń Banacha w siebie, z mnożeniem określonym jako złożenie operatorów, tworzy algebrę Banacha). Niech $X_1, X_2 \in \tilde{\mathcal{K}}_r$, wówczas:

$$\begin{aligned} [(X_1 \circ X_2)(s)](n) &= \sum_{p \in \mathcal{M}} x_1(n, p) \sum_{m \in \mathcal{M}} x_2(p, m) s(m) = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{M}} \left(\sum_{p \in \mathcal{M}} x_1(n, p) x_2(p, m) \right) s(m) = \sum_{m \in \mathcal{M}} [x_1 \ x_2] (n, m) s(m), \end{aligned}$$

skąd wynika, że $X_1 \circ X_2 = x_1 \ x_2$, a więc odwzorowanie $X \mapsto x$ jest izomorfizmem, czyli \mathcal{K}_r jest algebrą Banacha. Analogicznie wykazuje się, że algebrami Banacha są \mathcal{K} i \mathcal{K}_0 , przy czym $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_r$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_r$. \square .

Algebra \mathcal{K}_r znajduje zastosowanie w teorii $L^\infty(\mathcal{M})$ -stabilnych (BIBO) LTVSDS, gdzie X jest operatorem bloku elementarnego. Elementem neutralnym (jednością) algebry \mathcal{K}_r jest:

$$e(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n=m, \\ 0 & \text{gdy } n \neq m. \end{cases}$$

Jak wiadomo, zagadnienie BIBO-stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym prowadzi do warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby $e-x \in G(\mathcal{K}_r)$, gdzie $x \in \mathcal{K}_r$ jest odpowiedzią impulsową układu z otwartą pętlą. W przypadku algebry \mathcal{K}_r jest to zadanie o wiele trudniejsze niż dla algebry $L(\mathcal{M}_+)$ (paragraf 3.3). Na ogół nie da się tutaj podać warunków koniecznych i dostatecznych stabilności, a jedynie warunki dostateczne wynikające z twierdzenia 2.1, które można osłabić stosując twierdzenie 2.9. Takie osłabienie warunków daje widoczne korzyści, które ilustruje dobrze przykład z paragrafu 2.3.

Natomiast algebra \mathcal{K}_0 może znaleźć zastosowanie w teorii liniowych układów o parametrach okresowo zmiennych. Niech $\mathcal{P}_0(\mathcal{M})$ będzie przestrzenią jednowymiarowych sygnałów o okresie \mathcal{V} , a $\mathcal{P}_0 + \Gamma_0(\mathcal{M})$ oznacza przestrzeń:

$$\mathcal{P}_0 + \Gamma_0(\mathcal{M}) = \{ \mathfrak{K}(s) = s + \Gamma_0(\mathcal{M}), s \in \mathcal{P}_0 \},$$

w której normę określa się następująco:

$$\| \mathfrak{K}(s) \| = \inf_{s \in \Gamma_0(\mathcal{M})} \| s - s \|_{L^\infty}$$

TWIERDZENIE 5.5

Operator X zadany wzorem (5.2) odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{P}_0 + \Gamma_0(\mathcal{M})$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy:

(I) $x \in \mathcal{K}_0$

(II) $x^*(n+\mathcal{V}, m) = x^*(n, m)$ dla dowolnego n i dowolnego ustalonego m ,
gdzie:

$$x^*(n, m) = x(n, n-m).$$

D o w ó d. Biorąc pod uwagę twierdzenie 5.3 wystarczy wykazać, że operator X określony wzorem (5.2) odwzorowuje \mathcal{P}_s w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki (I) i (II). Zachodzi następująca równość:

$$[X(s)](n) = \sum_{m \in \mathcal{J}} x(n,m)s(m) = \sum_{m \in \mathcal{J}} x^*(n,n-m)s(m),$$

z której wynika, że:

$$\begin{aligned} [X(s)](n+\vartheta) - [X(s)](n) &= \sum_{m \in \mathcal{J}} x^*(n+\vartheta, n+\vartheta-m)s(m) - \sum_{m \in \mathcal{J}} x^*(n, n-m)s(m) = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{J}} x^*[n+\vartheta, n-(m-\vartheta)]s(m) - \sum_{m \in \mathcal{J}} x^*(n, n-m)s(m) = \\ &= \sum_{q \in \mathcal{J}} x^*(n+\vartheta, n-q)s(q+\vartheta) - \sum_{m \in \mathcal{J}} x^*(n, n-m)s(m) = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{J}} [x^*(n+\vartheta, n-m) - x^*(n, n-m)]s(m). \end{aligned}$$

Równość:

$$\sum_{m \in \mathcal{J}} [x^*(n+\vartheta, n-m) - x^*(n, n-m)]s(m) = 0$$

dla dowolnego n i przy każdym $s \in \mathcal{P}_s$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

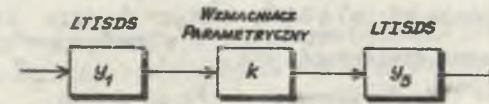
$$x^*(n+\vartheta, n-m) = x^*(n, n-m)$$

dla dowolnych n, m , a więc gdy spełniony jest warunek (II). \square

Twierdzenie 5.5 ma ważne znaczenie praktyczne, mówi bowiem, że ustalo-na odpowiedź układu na pobudzenie okresowe jest też okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedź impulsowa x spełnia warunki (I) i (II).

P r z y k ł a d

Na rysunku 5.1 pokazano układ złożony z dwóch LTISDS o odpowiedziach impulsowych $y_1, y_3 \in L(\mathcal{J}_+)$, przedzielonych wzmacniaczem o okresowo zmiennym wzmocnieniu $k \in \mathcal{P}_s(\mathcal{J})$. Wówczas odpowiedzi impulsowe poszczególnych bloków składowych zadane są wyrażeniami:



Rys. 5.1. Przykład układu z okresowo zmiennymi parametrami

$$\begin{aligned} x_1(n,m) &= y_1(n-m), \\ x_2(n,m) &= \begin{cases} k(n), & \text{dla } n=m, \\ 0, & \text{dla } n \neq m, \end{cases} \quad k(n+\vartheta) = k(n), \\ x_3(n,m) &= y_3(n-m). \end{aligned}$$

Stąd otrzymuje się kolejno:

$$[x_1 x_2](n,m) = y_1(n-m)k(m),$$

$$x(n,m) = [x_1 x_2 x_3](n,m) = \sum_{p \in \mathcal{J}} [x_1 x_2](n,p) x_3(p,m) =$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{J}} y_1(n-p) k(p) y_3(p-m) = \sum_{q \in \mathcal{J}} k(q+m) y_1(n-m-q) y_3(q).$$

$$x^*(n,m) = x(n, n-m) = \sum_{q \in \mathcal{J}} k(q+n-m) y_1(m-q) y_3(q).$$

Zachodzi nierówność:

$$\sum_{m \in \mathcal{J}} |x(n,m)| = \sum_{n \in \mathcal{J}} \left| \sum_{q \in \mathcal{J}} k(q+m) y_1(n-m-q) y_3(q) \right| <$$

$$< \sum_{q \in \mathcal{J}} |y_3(q)| \sum_{n \in \mathcal{J}} |k(q+m) y_1(n-m-q)| =$$

$$= \sum_{q \in \mathcal{J}} |y_3(q)| \sum_{p \in \mathcal{J}} |k(n-p) y_1(p)|,$$

z której wynika, że $x \in \mathcal{X}_r$. Z nierówności:

$$|x(n,m)| = \left| \sum_{q \in \mathcal{J}} k(q+m) y_1(n-m-q) y_3(q) \right| < \sum_{q \in \mathcal{J}} |y_1(n-m-q) y_3(q)|,$$

(\Rightarrow $\sup_{q \in \mathcal{M}} |k(q)|$) i z tego, że $y_1, y_3 \in L(\mathcal{M}_+)$ wynika, że przy dowolnym ustalonym m funkcja $x(\cdot, m) \in L(\mathcal{M})$, a więc $\bigwedge_{m \in \mathcal{M}} \lim_{n \rightarrow \infty} x(n, m) = 0$. Tak więc $x \in \mathcal{X}_0$. Ponadto łatwo stwierdzić, że:

$$x^*(n+\nu, m) = x^*(n, m).$$

Zatem operator układu pokazanego na rysunku 5.1 spełnia założenia twierdzenia 5.5.

Często zachodzi potrzeba wyznaczenia tylko ustalonej odpowiedzi okresowej na pobudzenie okresowe. Można tego dokonać za pomocą operatora Y :

$$[Y(s)](n) = \sum_{m=0}^{\nu-1} y(n, m) s(m), \quad 0 \leq n, m < \nu-1. \quad (5.10)$$

Jak widać, odpowiedź impulsowa operatora Y jest macierzą skończonych rozmiarów. Macierz tę określa wzór:

$$y(n, m) = [X(LU^m)](n).$$

Zatem:

$$y(n, m) = \sum_{p=-\infty}^n x(n, p) e(p-m) = \sum_{q=-\infty}^{n-m} x(n, m+q) e(q) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{p=-\infty}^{-1} x(n, m+p\nu) = \sum_{p=1}^{\infty} x(n, m-p\nu), & \text{gdy } 1-\nu < n-m < -1, \\ \sum_{p=-\infty}^0 x(n, m+p\nu) = \sum_{p=0}^{\infty} x(n, m-p\nu), & \text{gdy } 0 < n-m < \nu-1. \end{cases}$$

W pracach [45] i [46] opisano metodę numeryczną bezpośredniego wyznaczenia macierzy y bez pośrednictwa odpowiedzi impulsowej x dla obwodu elektrycznego o parametrach okresowo zmiennych. Pokazano tam, że problem ten sprowadza się do analizy aktywnego drabinkowego obwodu rezystancyjnego o wspólnym początku i końcu. Podany algorytm umożliwia zastosowanie maszyny cyfrowej. W pracy [44] porównano wyniki obliczeń i eksperymentów przeprowadzonych na rzeczywistym układzie elektronicznym.

5.2. Jednorodna operatory czasowo zmienne

Funkcję $x \in \mathcal{X}_r(\mathcal{M}^M)$ nazywa się w pełni symetryczną, jeżeli przy ustalonym $n \in \mathcal{M}$ jej wartość $x(n, m)$ nie zmienia się przy dowolnej permutacji współrzędnych m_1, \dots, m_M elementu $m \in \mathcal{M}^M$. Przestrzeń $\mathcal{X}_r(\mathcal{M}^M)$ złożona z funkcji w pełni symetrycznych będzie oznaczana przez $\mathcal{X}_{rsym}(\mathcal{M}^M)$. Analogicznie wprowadza się przestrzenie $\mathcal{X}_{sym}(\mathcal{M}^M)$ i $\mathcal{X}_{osym}(\mathcal{M}^M)$.

TWIERDZENIE 5.6

Dla każdego $x \in \mathcal{X}_r(\mathcal{M}^M)$ istnieje $x \in \mathcal{X}_{rsym}(\mathcal{M}^M)$ taka, że

$$\sum_{p \in \mathcal{M}^M} x'(n, p) s(p) = \sum_{p \in \mathcal{M}^M} x(n, p) s(p)$$

przy dowolnym $s \in L_{sym}^{\infty}(\mathcal{M}^M)$ i dowolnym $n \in \mathcal{M}$.

D o w ó d. Stosując takie same oznaczenia jak w dowodzie twierdzenia 4.3, otrzymuje się:

$$\sum_{p \in \mathcal{M}^M} x'(n, p) s(p) = \sum_{q \in \mathcal{M}^M} s(q) \sum_{p \in \mathcal{M}^M(q)} x'(n, p), \quad n \in \mathcal{M}. \quad (5.11)$$

Zawsze istnieje taki element $x \in \mathcal{X}_{rsym}(\mathcal{M}^M)$, że dla dowolnego $n \in \mathcal{M}$ zachodzi:

$$1_q x(n, q) = \sum_{p \in \mathcal{M}^M(q)} x'(n, p). \quad (5.12)$$

Z wyrażen (5.11) i (5.12) wynika, że:

$$\sum_{p \in \mathcal{M}^M} x'(n, p) s(p) = \sum_{q \in \mathcal{M}^M} 1_q x(n, q) s(q) = \sum_{p \in \mathcal{M}^M} x(n, p) s(p). \quad \square$$

Analogiczne twierdzenie jest oczywiście słuszne dla przestrzeni $\mathcal{X}(\mathcal{M}^M)$ i $\mathcal{X}_0(\mathcal{M}^M)$.

Z twierdzenia 5.6 wynika, że operator jednorodny czasowo zmienny stopnia m można zdefiniować bez utraty ogólności w następujący sposób:

$$[X(s)](n) = \sum_{p \in \mathcal{M}^m} x(n, p) s^{(m)}(p), \quad n \in \mathcal{M}, \quad (5.13)$$

gdzie odpowiedź impulsowa x jest w pełni symetryczna. Operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$ odwzorowuje $L^{\infty}(\mathcal{J}^m)$ w $L^{\infty}(\mathcal{J}^m)$, zatem z twierdzenia 5.1 wynika, że operator jednorodny X odwzorowuje $L^{\infty}(\mathcal{J}^m)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{K}_0(\mathcal{J}^m)$. Łatwo przekonać się, że operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$ odwzorowuje przestrzeń $\Gamma(\mathcal{J}^m)$ w $\Gamma(\mathcal{J}^m)$, a więc z twierdzenia 5.2 wynika, że operator jednorodny odwzorowuje $\Gamma(\mathcal{J}^m)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{K}(\mathcal{J}^m)$. Ponadto, jeżeli $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} s(n)$, $(n \in \mathcal{J})$, to $\lim_{p \rightarrow \infty} s^{\textcircled{m}}(p) = \xi^m$ i z wyrażenia (5.7) otrzymuje się:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [X(s)](n) = \beta \xi^m + \sum_{p \in \mathcal{J}^m} \alpha_p [s^{\textcircled{m}}(p) - \xi^m].$$

Analogicznie, operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$ odwzorowuje $\Gamma_0(\mathcal{J}^m)$ w $\Gamma_0(\mathcal{J}^m)$, czyli z twierdzenia 5.3 wynika, że operator jednorodny X odwzorowuje $\Gamma_0(\mathcal{J}^m)$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathcal{K}_0(\mathcal{J}^m)$.

Normę elementu $X(s)$ można łatwo oszacować za pomocą nierówności:

$$\|X(s)\|_{L^{\infty}(\mathcal{J}^m)} \leq \|x\|_{\mathcal{K}_X(\mathcal{J}^m)} \|s\|_{L^{\infty}(\mathcal{J}^m)}$$

Identyfikacja układu nieliniowego czasowo zmiennego przy użyciu operatora jednorodnego stopnia m niczym istotnym się nie różni od identyfikacji układu czasowo niezmienniczego. Polega ona na wyznaczeniu funkcji $x[(\cdot), p_1, \dots, p_m]$ dla wszystkich wartości p_1, \dots, p_m drogą pomiaru odpowiedzi układu na ciąg $\{\Delta_n(i)\}$ pobudzeń określony w paragrafie 4.3.

Funkcję tę określa się ze wzoru (4.24) przy niezmiennionych oznaczeniach:

$$x(n, p) = \frac{1}{m!} \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \sum_{q \in \mathcal{K}_{m-r}^p} [X(\Delta_q)](n). \quad (5.14)$$

Poniżej zostanie zbadane zagadnienie układów jednorodnych z okresowo zmiennymi parametrami. Nietrudno spostrzec, że operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$ odwzorowuje $\mathcal{P}_0(\mathcal{J})$ w $\mathcal{P}_{\varphi, 1}(\mathcal{J}^m)$. Niech x będzie odpowiedzią impulsową operatora zadanego wyrażeniem (5.2) a x^* będzie nową odpowiedzią impulsową daną wzorem:

$$x^*(n, p) = x(n, nI-p), \quad n \in \mathcal{J}, \quad p \in \mathcal{J}^m. \quad (5.15)$$

Uogólnieniem twierdzenia 5.5 jest następujące

TWIERDZENIE 5.7

Operator X określony wzorem (5.2) odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{P}_{\varphi, 1}(\mathcal{J}^m) + \Gamma_0(\mathcal{J}^m)$ w $\mathcal{P}_0(\mathcal{J}) + \Gamma_0(\mathcal{J})$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (I) $x \in \mathcal{K}_0(\mathcal{J}^m)$,
- (II) $x^*(n+\varphi, p) = x^*(n, p)$ dla dowolnego $n \in \mathcal{J}$ i dowolnego ustalonego $p \in \mathcal{J}^m$.

D o w ó d przeprowadza się podobnie jak dla twierdzenia 5.5. Zachodzi równość:

$$[X(s)](n) = \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x(n, p) s(p) = \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x^*(n, nI-p) s(p), \quad n \in \mathcal{J},$$

z której wynika, że:

$$\begin{aligned} [X(s)](n+\varphi) - [X(s)](n) &= \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x^*[n+\varphi, (n+\varphi)I-p] s(p) - \\ &- \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x^*(n, nI-p) s(p) = \sum_{q \in \mathcal{J}^m} x^*(n+\varphi, nI-q) s(q+\mathcal{J}I) - \\ &- \sum_{p \in \mathcal{J}^m} x^*(n, nI-p) s(p) = \sum_{p \in \mathcal{J}^m} [x^*(n+\varphi, nI-p) - x^*(n, nI-p)] s(p), \end{aligned}$$

a zatem musi być spełniony warunek (II). \square

Łatwo można stwierdzić, że operator $(\cdot)^{\textcircled{m}}$ odwzorowuje przestrzeń $\mathcal{P}_0(\mathcal{J}) + \Gamma_0(\mathcal{J})$ w $\mathcal{P}_{\varphi, 1}(\mathcal{J}^m) + \Gamma_0(\mathcal{J}^m)$, a więc operator jednorodny zadany wzorem (5.13) odwzorowuje $\mathcal{P}_0(\mathcal{J}) + \Gamma_0(\mathcal{J})$ w siebie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedź impulsowa x spełnia warunki (I) i (II) twierdzenia 5.7. Wówczas ustalona odpowiedź układu na pobudzenie okresowe jest również okresowa. Przestrzeń wszystkich x spełniających warunki twierdzenia 5.7 będzie dalej oznaczana przez $\mathcal{K}_0(\mathcal{J}^m)$.

Można wreszcie określić operator jednorodny odwzorowujący $\mathcal{P}_0(\mathcal{J})$ w siebie. Uogólnieniem operatora Y zadanego wzorem (5.10) jest operator Y :

$$[Y(s)](n) = \sum_{p=0}^{(\varphi-1)I} y(n, p) s(p),$$

gdzie: $0 \leq n < \varphi-1$, $p \in \mathcal{J}^m$.

Jeżeli $x \in \mathcal{X}_p(\mathcal{M}^m)$, to odpowiedź impulsowa y określa następujące wyrażenie:

$$y(n,p) = [X(\cup P)](n),$$

gdzie: $\cup = (\cup_1, \dots, \cup_m)$, $p \in \mathcal{M}^m$, $0 < p < (\vartheta-1)I$. Stąd otrzymuje się:

$$y(n,p) = \sum_{q < nI} x(n,q)e(q-p) = \sum_{q < nI-p} x(n,p+q)e(q) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{q < -I} x(n,p+q\vartheta) = \sum_{q > I} x(n,p-q\vartheta), & \text{gdy } (1-\vartheta)I < nI-p < 0, \\ \sum_{q < 0} x(n,p+q\vartheta) = \sum_{q > 0} x(n,p-q\vartheta), & \text{gdy } 0 < nI-p \leq (\vartheta-1)I. \end{cases}$$

Operator jednorodny stopnia m odwzorowujący $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M})$ w siebie określa wzór:

$$[Y(s)](n) = \sum_{p=0}^{(\vartheta-1)I} y(n,p)s^{\textcircled{m}}(p).$$

5.3. Analityczne operatory czasowo zmienna

Operatorem wielomianowym czasowo zmiennym stopnia m nazywa się operator P_m określony następująco:

$$P_m(s) = \sum_{k=1}^m X_k(s), \quad (5.16)$$

gdzie X_k jest operatorem jednorodnym stopnia k . Operator wielomianowy jest odwzorowaniem $L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M})$, lub $\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M})$, lub $\Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_0(\mathcal{M})$, lub $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M})$ wtedy i tylko wtedy, gdy X_k dla $k=1, \dots, m$ należą odpowiednio do $\mathcal{X}_r(\mathcal{M}^k)$, $\mathcal{X}(\mathcal{M}^k)$, $\mathcal{X}_0(\mathcal{M}^k)$, $\mathcal{X}_\vartheta(\mathcal{M}^k)$.

Normę elementu $P_m(s)$ można oszacować za pomocą nierówności:

$$\|P_m(s)\|_{L^\infty(\mathcal{M})} < \sum_{k=1}^m \|X_k\|_{\mathcal{X}_r(\mathcal{M}^k)} \|s\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^k \quad (5.17)$$

Jeżeli dla każdego $s \in Z$, gdzie Z jest zbiorem⁶⁾ w $L^\infty(\mathcal{M})$, istnieje granica $P(s)$ ciągu $\{P_m(s)\}$ w sensie normy, to operator $P: L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M})$ nazywa się operatorem analitycznym. Z wyrażenia (5.17) wynika, że jeżeli zwykły potęgowy szereg:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|X_k\| \|s\|^k$$

jest zbieżny, to szereg funkcjonalny:

$$P(s) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(s)$$

jest także zbieżny. Analogicznie określa się operatory analityczne:

$$P: \Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}), \Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_0(\mathcal{M}), \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M}).$$

Poniższe twierdzenie daje warunek wystarczający na to, aby operator układu zadany w postaci uwikłanej można było rozwikłać przy użyciu operatora analitycznego.

TWIERDZENIE 5.8

Niech w równaniu

$$s = u + X[\phi(s)] \quad (5.18)$$

$s \in L^\infty(\mathcal{M})$, lub $\Gamma(\mathcal{M})$, lub $\Gamma_0(\mathcal{M})$, lub $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M})$; $X \in \tilde{\mathcal{X}}_r$, lub $\tilde{\mathcal{X}}$, lub $\tilde{\mathcal{X}}_0$, lub $\tilde{\mathcal{X}}_\vartheta$; ϕ jest funkcją taką, że:

$$[\phi(v)](n) = \varphi[v(n)], \quad (5.19)$$

gdzie: $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jest funkcją analityczną. Jeżeli operator $X \circ \phi$ spełnia warunek zwężenia, to istnieje operator analityczny $P: L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M})$, lub $\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M})$, lub $\Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_0(\mathcal{M})$, lub $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M})$ taki, że $s = P(u)$.

D o w ó d. Trzeba najpierw wykazać niezbędną

L e m a t. Jeżeli funkcja $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ w wyrażeniu (5.19) jest wielomianem, a W jest operatorem wielomianowym $L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M})$, lub $\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M})$, lub $\Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_0(\mathcal{M})$, lub $\mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}_\vartheta(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M})$, to $X \circ \phi \circ W$ też jest

⁶⁾ Z jest więc obszarem zbieżności ciągu $\{P_m\}$.

operatorem wielomianowym odpowiednio $L^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow L^\infty(\mathcal{M})$ lub $\Gamma(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M})$, lub $\Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_0(\mathcal{M})$, lub $\mathcal{P}_0(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{P}_0(\mathcal{M}) + \Gamma_0(\mathcal{M})$.

D o w ó d l e m a t u. Bez utraty ogólności można przyjąć, że φ jest jednomianem stopnia r : $\varphi(t) = t^r$. Wówczas:

$$[\Phi(W(s))] (n) = \left[\sum_{k=1}^m \sum_{p \in \mathcal{M}^k} x_k(n, p) s^{\otimes k} (p) \right]^r. \quad (5.20)$$

Wyrażenie (5.20) jest skończoną sumą składników typu:

$$\begin{aligned} & \sum_{p_1 \in \mathcal{M}^{k_1}} x_{k_1}(n, p_1) s^{\otimes k_1} (p_1) \dots \sum_{p_r \in \mathcal{M}^{k_r}} x_{k_r}(n, p_r) s^{\otimes k_r} (p_r) = \\ & = \sum_{p_1, \dots, p_r} x_{k_1}(n, p_1) \dots x_{k_r}(n, p_r) s^{\otimes k_1} (p_1) \dots s^{\otimes k_r} (p_r) = \\ & = \sum_{p \in \mathcal{M}^{k_1 + \dots + k_r}} x_{k_1, \dots, k_r}(n, p) s^{\otimes (k_1 + \dots + k_r)} (p). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Z wyrażenia (5.21) wynikają następujące implikacje:

$$x_{k_j} \in \mathcal{K}_{\text{rsym}}(\mathcal{M}^{k_j}), \quad \text{dla } j=1, \dots, r \Rightarrow x_{k_1, \dots, k_r} \in \mathcal{K}_{\text{rsym}}(\mathcal{M}^{k_1 + \dots + k_r}),$$

$$x_{k_j} \in \mathcal{K}_{\text{sym}}(\mathcal{M}^{k_j}), \quad \text{dla } j=1, \dots, r \Rightarrow x_{k_1, \dots, k_r} \in \mathcal{K}_{\text{sym}}(\mathcal{M}^{k_1 + \dots + k_r}),$$

$$x_{k_j} \in \mathcal{K}_{\text{osym}}(\mathcal{M}^{k_j}), \quad \text{dla } j=1, \dots, r \Rightarrow x_{k_1, \dots, k_r} \in \mathcal{K}_{\text{osym}}(\mathcal{M}^{k_1 + \dots + k_r}).$$

Oprócz tego odpowiedź impulsowa:

$$\begin{aligned} x_{k_1, \dots, k_r}^*(n, p) &= x_{k_1, \dots, k_r}(n, nI-p) = x_{k_1}(n, nI-p_1) \dots x_{k_r}(n, nI-p_r) = \\ &= x_{k_1}^*(n, p_1) \dots x_{k_r}^*(n, p_r) \end{aligned}$$

spełnia warunek $x_{k_1, \dots, k_r}^*(n+\vartheta, p) = x_{k_1, \dots, k_r}^*(n, p)$, jeżeli tylko $x_{k_j}^*(n+\vartheta, p_j) = x_{k_j}^*(n, p_j)$ dla $j=1, \dots, r$. Zatem ma miejsce następująca implikacja:

$$x_{k_j} \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}^{k_j}), \quad \text{dla } j=1, \dots, r \Rightarrow x_{k_1, \dots, k_r} \in \mathcal{K}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}^{k_1 + \dots + k_r}).$$

Z twierdzeń 5.4 i 5.5 wynika, że operator $X_0 \Phi \circ W$ jest operatorem wielomianowym, co kończy dowód lematu. Dalszą część dowodu przeprowadza się identycznie jak dla twierdzenia 4.4, wykorzystując lemat 1 tego twierdzenia. \square

Identyfikację układu czasowo zmiennego przy użyciu operatora wielomianowego przeprowadza się metodą opisaną przy końcu paragrafu 4.5, polegającą na kolejnym obniżaniu stopnia wielomianu funkcjonalnego.

LITERATURA

UWAGI KOŃCOWE

W konkluzji trzeba stwierdzić, że zastosowanie algebr Banacha w teorii sygnałów wielowymiarowych pozwala ustawić na wspólnej płaszczyźnie dużą liczbę klas sygnałów i układów oraz udowodnić dla nich wspólne twierdzenia przy słabych założeniach. Dotyczy to głównie twierdzeń o stabilności różnych typów. Szczególne korzyści wynikają z teorii algebr Banacha dla klasy układów czasowo niezmienniczych, a to ze względu na ich komutatywność. W układach czasowo zmiennych, które nie są komutatywne, korzyści z zastosowania algebr Banacha są znacznie mniejsze. Szczególnie jest to widoczne w rozdziale piątym.

W rozdziale trzecim dotyczącym układów liniowych czasowo niezmienniczych rozpatruje się równoległe sygnały spróbkowane i ciągłe. W dalszych rozdziałach zaniechano tego, ograniczając się wyłącznie do sygnałów spróbkowanych zaznaczając tylko, że większość twierdzeń przenosi się na sygnały czasowo ciągłe. Należy jednak to przedłużenie stosować ostrożnie, na co zwrócono uwagę już chociażby pod koniec paragrafu 3.2. Podobnie podczas identyfikacji układu operatorem jednorodnym (lub wielomianowym) nie można stosować impulsów Diraca jako pobudzeń próbnych, tylko ciągi impulsów aproksymujących impulsy Diraca, na przykład mogą to być wąskie impulsy prostokątne. Także metoda syntezy operatora jednorodnego opisana w paragrafie 4.4 w zasadzie nie może być przeniesiona do klasy sygnałów czasowo ciągłych. Zastosowania maszyn i najrozmaitszych wyspecjalizowanych urządzeń cyfrowych wytkumaczą chyba nadanie priorytetu klasie sygnałów spróbkowanych.

PODZIĘKOWANIE

Autor dziękuje Panu Profesorowi Wiesławowi Żelazce za wnikliwe przeczytanie rękopisu pracy i dokonanie wielu cennych poprawek.

- [1] AHMADI M., KING R.A.: A stability criterion for N-dimensional zero-phase recursive digital filters. Proc. IEEE v. 65, pp. 893-898, June 1977.
- [2] ANDERSON B.D., NEWCOMB R.W.: Linear passive networks: functional theory. Proc. IEEE, pp. 72-88, Jan. 1976.
- [3] ANDERSON B.D., JURY E.I.: Stability test for two-dimensional recursive filters. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, pp. 366-372, Aug. 1973.
- [4] BARKER H.A., AMBATI S.: Nonlinear sampled-data system analysis by multidimensional Z transforms. Proc. IEEE, pp. 1407-1413, Sept. 1972.
- [5] BAUMGARTNER S.L., RUGH W.J.: Complete identification of a class of nonlinear systems from steady-state frequency response. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 753-758, Sept. 1975.
- [6] BELAL A.A., SHENOI B.A.: Scaling of linear time-varying networks passivity, and losslessness. IEEE Trans. Circuits and Systems, May 1977.
- [7] BIESIEKERSKI W.A.: Цифровые автоматические системы. Москва 1976.
- [8] BITTNER R.: Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych. Warszawa 1974.
- [9] BOSE N.K.: Problems and progress in multidimensional systems theory. Proc. IEEE, pp. 824-840, June 1977.
- [10] CHRISTENSEN G.S.: On the convergence of Volterra series. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 736-737, Dec. 1968.
- [11] COOKE R.G.: Infinite matrices and sequence spaces. Macmillan and Company, Ltd London, 1950.
- [12] CRUZ J.B.Jr.: A generalization of the impulse train approximation for time-varying linear system synthesis in the time domain. IRE Trans. Circuit Theory, pp. 393-394, Dec. 1959.
- [13] CRUZ J.B.Jr.: On the realizability of linear differential systems. IRE Trans. Circuit Theory, pp. 347-348, Sept. 1960.
- [14] CYPKIN J.Z., POPKOW J.S.: Teoria nieliniowych impulsnych systemów. Moskwa 1973.
- [15] DECARLO R., SAEKS R., MURRAY J.: A Nyquist-like test for the stability of two-dimensional digital filters. Proc. IEEE pp. 978-979, June 1977.
- [16] DE SANTIS R.: Causality theory in systems analysis. Proc. IEEE, pp. 36-44, January 1976.
- [17] DESOER C.A.: Nonlinear distortion in feedback amplifiers. IRE Trans. Circuit Theory pp. 1-6, March 1962.
- [18] DESOER C.A., CHAN W.S.: The feedback interconnection of multivariable systems: simplifying theorems for stability. Proc. IEEE, pp. 139-144, January 1976.
- [19] DOUGLAS R.G.: Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press, New York, London 1972.
- [20] FRIEDLAND B.: A technique for the analysis of time-varying sampled-data systems. Trans. AIEE vol. 75, part II, pp. 407-413, January 1957.
- [21] FUKS B.A.: Введение в теорию аналитических функций многих переменных. Москва 1962.
- [22] GACHOW P.D., CZERSKI J.I.: Уравнения типа свертки. Наука, Москва 1978.
- [23] GELFAND I.M., RAJKOW D.I., SZYLOW G.E.: Коммутативные нормированные кольца. Москва 1960.

- [24] HARPER T.R., RUGH W.J.: Structural features of factorable Volterra systems. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 822-832, Dec. 1976.
- [25] HOFFMAN K.: Banach spaces of analytic functions. Prentice-Hall, Inc. 1962.
- [26] HUANG T.S.: Stability of two-dimensional recursive filters. IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, pp. 158-163, June 1972.
- [27] JUSTICE J.H., SHANKS J.L.: Stability criterion for n-dimensional digital filters. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC - 18, pp. 284-286, June 1973.
- [28] KANTOROWICZ L.W., AKIŁOW G.P.: Funkcjonalnyj analiz. Moskwa 1977.
- [29] KLIR G.J.: Trends in general system theory. Wiley, New York, 1972.
- [30] KREJN S.G.: Liniejnije urawnienija w banachowom prostranstwie. Moskwa 1971.
- [31] LAVI A., NARAYANAN S.: Analysis of a class of nonlinear discrete systems using multidimensional modified Z transforms. IEEE Trans. on Autom. Control, pp. 90-93, Feb. 1968.
- [32] MARCHESINI G., PICCI G.: On the functional identification of nonlinear systems from input-output data records. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 757-759, Dec. 1969.
- [33] MESAROWIC M.D., TAKAHARA Y.: General systems theory: mathematical foundations. Academic Press 1975.
- [34] NAYLOR A.W.: Generalized frequency response concepts for time-varying discrete-time linear systems. IEEE Trans. on Circuit Theory, pp. 428-440, Sept. 1963.
- [35] PORTER W.A.: An overview of polynomial systems theory. Proc. IEEE, pp. 18-23, Jan. 1976.
- [36] PUCHOW G.E.: Przeobrazowania Taylora i ich primienienie w elektrotechnice i elektronice. Naukowa Dumka, Kijew 1978.
- [37] PUPKOW K.A., KAPALIN W.I., JUSZCZENKO A.S.: Funkcjonalnyje riady w teorii nieliniowych sistem. Nauka, Moskwa 1976.
- [38] RICKART C.E.: General theory of Banach algebras. New York, Van Nostrand 1960.
- [39] RONKIN L.I.: Elementy teorii analiticeskich funkcji mnogich piermiennych. Naukowa Dumka, Kijew, 1977.
- [40] RUDIN W.: Functional analysis. Mc Graw-Hill B.C. 1973.
- [41] RUDIN W.: Real and complex analysis. Mc Graw-Hill, N. York, 1966.
- [42] SHANMUGAM K., LAL M.: Analysis and synthesis of a class of nonlinear systems. IEEE Trans. Circuits, Systems, pp. 17-25, Jan 1976.
- [43] SIWCZYŃSKI M.: Możliwości zastosowania pewnych grup do analizy układów niestacjonarnych. Materiały Seminarium Polsko-Czechosłowackiego; VSSE Plzeň, Czechosłowacja, ss. 48-51, 1978.
- [44] SIWCZYŃSKI M., TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Analiza obwodów o okresowo zmiennych parametrach metodą wariacyjną. Prace Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej Nr 40, ss. 125-132, 1978.
- [45] SIWCZYŃSKI M., TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Analiza i modelowanie aktywnych obwodów z okresowo zmiennymi parametrami. Materiały VIII Sympozjum Metody Matematyczne w Elektrotechnice Opole - Pokrzywna 1979.
- [46] SIWCZYŃSKI M., TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Analiza i realizacja aktywnych obwodów z okresowo zmiennymi parametrami. Rozprawy Elektrotechniczne, Warszawa, 2/81.
- [47] SIWCZYŃSKI M.: Techniki algebr Banacha sygnałów czasowo wielowymiarowych w teorii nieliniowych układów analitycznych. Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, nr 72, 1980.

- [48] SIWCZYŃSKA Z., SIWCZYŃSKI M.: Drgania w linii długiej obciążonej elementem nieliniowym. Prace Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej, nr 40, ss. 133-135, 1978.
- [49] SMETS H.B.: Analysis and synthesis of nonlinear systems. IRE Trans. Circuit Theory, pp. 459-469, Dec. 1960.
- [50] STRÖM T., SIGNELL S.: Analysis of periodically switched linear circuits. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 531-541, Oct. 1977.
- [51] TROTT G.W., CHRISTENSEN G.S.: On the uniqueness of the Volterra series. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 759-760, Dec. 1969.
- [52] TROTT G.W., CHRISTENSEN G.S.: A larger region convergence for the Volterra series. Int. J. Control, pp. 377-384, v. 14, nr 2, 1971.
- [53] WILLEMS J.C.: Some results on the L stability of linear time-varying systems. IEEE Trans. Automatic Control, pp. 660-665, Dec. 1969.
- [54] WILLEMS J.C.: Mechanisms for the stability and instability feedback systems. Proc. IEEE, pp. 24-35, Jan. 1976.
- [55] WYSOCKI E.M., RUGH W.J.: Further results on the identification problem for the class of nonlinear systems S. IEEE Trans. Circuits and Systems, pp. 664-670, Nov. 1976.
- [56] VIDYASAGAR M.: Some applications of the spectral-radius concept to nonlinear feedback stability. IEEE Trans. Circuit Theory, pp. 607-615, Nov. 1972.
- [57] VOLTERRA V.: Theory of functional and integral and integrodifferential equations. Dover Publications, New York, 1959.
- [58] ZAMES G.: Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. IEEE Trans. Circuit Theory, pp. 392-404, Sept. 1963.
- [59] ZAMES G., KALLMAN R.R.: On spectral mappings, higher order circle criteria and periodically varying systems. IEEE trans. Automatic Control, pp. 649-652, Dec. 1970.
- [60] ŻELAZKO W.: Algebry Banacha. Warszawa 1968.

ZASTOSOWANIE ALGEBR BANACHA W TEORII SYGNAŁÓW I UKŁADÓW
WIELOWYMIAROWYCH

Streszczenie

Praca niniejsza jest poświęcona głównie zastosowaniu algebr Banacha wielowymiarowych sygnałów czasowo dyskretnych i czasowo ciągłych w teorii układów liniowych i nieliniowych układów analitycznych.

We wstępie podano podstawowe określenia i sformułowano problem pracy.

W rozdziale drugim przedstawiono, wraz z dowodami, podstawowe twierdzenia dotyczące głównie odwracalności elementów algebr Banacha oraz funkcji jednej i wielu zmiennych w algebrach Banacha. Sformułowano tam też twierdzenia o izomorfizmach algebr Banacha i algebr funkcji analitycznych wielu zmiennych.

W rozdziale trzecim omówiono konkretne splotowe algebry Banacha przy czynowych sygnałów wielowymiarowych czasowo dyskretnych i czasowo ciągłych, w tym także sygnałów wielookresowych. Określono odpowiednie przekształcenia Gelfanda tych algebr, za pomocą których sformułowano kryteria stabilności liniowych układów wielowymiarowych czasowo niezmienniczych.

W rozdziale czwartym algebry te zastosowano do badania nieliniowych czasowo niezmienniczych układów analitycznych. Podano kilka twierdzeń dotyczących stabilności takich układów. Przedstawiono algorytmy analizy, syntezy i identyfikacji analitycznych układów nieliniowych czasowo dyskretnych.

Rozdział piąty poświęcono teorii operatorów układów czasowo zmiennych. Wprowadzono pojęcia operatorów jednorodnych, wielomianowych i analitycznych dla układów nieliniowych czasowo zmiennych i sformułowano odpowiednie twierdzenia o stabilności takich układów. Podano twierdzenie o stabilności asymptotycznej nieliniowych układów z okresowo zmiennymi parametrami.

THE BANACH ALGEBRAS APPLICATION IN THE MULTIDIMENSIONAL
SIGNALS AND SYSTEMS THEORY

Summary

This work refers to Banach algebras of multidimensional discrete-time and continuous-time signals application in the linear and nonlinear analytical systems theory.

In the preface basic definitions were given and the problem of the work was formulated.

In the second section the general theorems of Banach algebras elements invertibility with proofs and the general theorems of single- and multi-variable functions in the Banach algebras were given. There were also formulated the theorems of the isomorphisms between the Banach algebras and multivariable analytical functions algebras.

In the third section the convolution Banach algebras of causal multidimensional discrete-time, and continuous-time signals, and also multiperiodical signals were described. The Gelfand transformations of these algebras were defined, and the stability criterion of multidimensional linear time-invariant systems, were given.

In the fourth section these algebras were applied in order to study nonlinear time-invariant analytical systems. There were also formulated the stability theorems for these systems. The algorithms of analysis, identification and synthesis of nonlinear analytical sampled data systems, were given.

In the fifth section the time varying operators theory was described. The concepts of the homogenous, polynomial and analytical time varying operators were introduced. The theorems of BIBO-stability and asymptotical stability of these operators were formulated. The asymptotical stability theorems of the periodically varying systems were also given.

ПРИМЕНЕНИЕ БАНАХОВЫХ АЛГЕБР В ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе применены банаховы алгебры многомерных дискретных и непрерывных сигналов к теории линейных и нелинейных аналитических систем.

Введение в работу дает основные определения и постановку задачи.

Во второй главе сформулированы основные теоремы об обратимости элементов банаховых алгебр и о функциях одной и многих переменных в банаховых алгебрах. Дана также формулировка теоремы о изоморфных отображениях банаховых алгебр на алгебры аналитических функций многих переменных.

В третьей главе введены сверточные банаховы алгебры каузальных многомерных дискретных и непрерывных сигналов, в том числе многопериодических сигналов. Даны определения преобразований Гельфанда этих алгебр, с помощью которых сформулирован критерий устойчивости многомерных инвариантных во времени систем.

В четвертой главе эти алгебры применены к изучению нелинейных инвариантных во времени аналитических систем. Выведены теоремы об их устойчивости, сформулированы алгоритмы анализа, синтеза и идентификации нелинейных аналитических дискретных во времени систем.

Пятая глава содержит теорию параметрических нелинейных аналитических операторов. Здесь даны определения однородных, полиномиальных и аналитических нелинейных параметрических систем и сформулированы теоремы об их устойчивости. В этой главе дана теорема об асимптотической устойчивости нелинейных систем с периодически меняющимися параметрами.



**WYDAWNICTWA NAUKOWE I DYDAKTYCZNE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
MOŻNA NABYĆ W NASTĘPUJĄCYCH PLACÓWKACH:**

- 44-100 Gliwice — Księgarnia nr 096, ul. Konstytucji 14 b
44-100 Gliwice — Spółdzielnia Studencka, ul. Wrocławska 4 a
40-950 Katowice — Księgarnia nr 015, ul. Żwirki i Wigury 33
40-096 Katowice — Księgarnia nr 005, ul. 3 Maja 12
41-900 Bytom — Księgarnia nr 048, Pl. Kościuszki 10
41-500 Chorzów — Księgarnia nr 063, ul. Wolności 22
41-300 Dąbrowa Górnicza — Księgarnia nr 081, ul. ZBoWiD-u 2
47-400 Racibórz — Księgarnia nr 148, ul. Odrzańska 1
44-200 Rybnik — Księgarnia nr 162, Rynek 1
41-200 Sosnowiec — Księgarnia nr 181, ul. Zwycięstwa 7
41-800 Zabrze — Księgarnia nr 230, ul. Wolności 288
00-901 Warszawa — Ośrodek Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN —
Pałac Kultury i Nauki

Wszystkie wydawnictwa naukowe i dydaktyczne zamawiać można poprzez Składnicę Księgarską w Warszawie, ul. Mazowiecka 9.