ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 16 Nr kol. 308

JÓZEF JOACHIM TELEGA

# PRZESTRZENIE TRANSLATOROWE

Streszczenie. Wprowadzenie na rozmaitości tensora podwójnego - translatora - pozwala zdefiniować klasę przestrzeni, w których można dodawać wektory brane z przestrzeni stycznych do rozmaitości w różnych punktach. Translator umożliwia też przenoszenie gęstości tensorowych i koneksji afinicznych z jednego punktu rozmaitości do dowolnego innego. Przestrzenie tego typu nazywamy translatorowymi.

## WSTĘP

W przestrzeni euklidesowej $E^n$ można wprowadzić pojęcie tzw. translatora (shifter), czyli tensora podwójnego, przy pomocy którego można przenosić równolegle (w sensie euklidesowym) wektory z jednego punktu przestrzeni do dowolnego innego [1], [2]. Istota tej metody jest następująca [1]: niech $V^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$ oznaczają współrzędne wektora $V$ w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych w punkcie $\eta(\eta^\beta)$, $\beta = 1, \ldots, n$. Wiadomo, że w dowolnym innym punkcie $\xi(\xi^i)$ istnieje jedyny wektor $v$, którego współrzędne $v^i$, $i = 1, \ldots, n$ w tym samym układzie wynoszą

$$v^i = \delta^i_\alpha V^\alpha \tag{1}$$

Mówimy wówczas, że wektor $v$ powstał przez równoległe przesunięcie wektora $V$ z punktu $\eta$ do punktu $\xi$.

Dokonujemy dowolnych transformacji

$$\xi^{i'} = \xi^{i'}(\xi^{i}), \quad \eta^{\alpha'} = \eta^{\alpha'}(\eta^{\alpha}), \tag{2}$$

w punktach odpowiednio $\xi, \eta$. Z(1) i (2) otrzymujemy:

$$v^{i'}(\xi^{j'}) \frac{\partial \xi^{i}}{\partial \xi^{i'}} = \delta^{i}_{\alpha} V^{\alpha'}(\eta^{\gamma'}) \frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial \eta^{\alpha'}} \Longrightarrow v^{i'} = \delta^{i}_{\alpha} A^{i'}_{i} B^{\alpha}_{\alpha'} V^{\alpha'},$$

gdzie:

$$A^{i'}_{i} = \frac{\partial \xi^{i}}{\partial \xi^{i'}}, \qquad B^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial \eta^{\alpha'}}.$$

Wprowadzając wielkość

$$g^{i'}_{\alpha'}(\xi', \eta') \overset{df}{=} \delta^{i}_{\alpha} A^{i'}_{i} B^{\alpha}_{\alpha'} \tag{3}$$

mamy

$$v^{i'} = g^{i'}_{\alpha'} V^{\alpha'}.$$

Obiekt dany zależnością (3) J.L. ERICKSEN [1] nazywa translatorem.

Wydaje się, iż translator - podobnie jak tensor metryczny w przestrzeniach Riemanna - można przyjąć jako dany dla każdych dwu punktów rozmaitości i badać takie właśnie przestrzenie, które nazwiemy "translatorowymi". Takie uogólnienie jest celem tej pracy.

Łatwo sprawdzić, iż translator jest tensorem podwójnym w sensie podanym w pracy [5]. Biorąc mianowicie dowolne transformacje $\xi^{i''} = \xi^{i''}(\xi^{i'})$, $\eta^{\alpha''} = \eta^{\alpha''}(\eta^{\alpha'})$ i uwzględniając (3) otrzymujemy

$$g^{i''}_{\alpha''} = \delta^{i}_{\alpha} A^{i''}_{i} B^{\alpha}_{\alpha''} = \delta^{i}_{\alpha} A^{i''}_{i'} A^{i'}_{i} B^{\alpha}_{\alpha'} B^{\alpha'}_{\alpha''} = A^{i''}_{i'} B^{\alpha'}_{\alpha''} g^{i'}_{\alpha'}, \tag{4}$$

co oznacza, że translator jest mieszanym tensorem podwójnym o walencji (1,0; 0,1).

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań przypomnimy ogólną definicję tensorów podwójnych [5].

Weźmy dwa dowolne punkty n-wymiarowej rozmaitości M. Niech $\xi = \mu(x)$, $\eta = \bar{\mu}(\bar{x})$, gdzie $\mu \in \mathcal{U}_x$, $\bar{\mu} \in \mathcal{U}_{\bar{x}}$ przy czym $\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_{\bar{x}}$ oznaczają struktury lokalne w punktach odpowiednio $x$, $\bar{x}$ (por. [3]). Zakładamy, iż rozmaitość jest wymaganej do rozważań klasy. Tensorem podwójnym o walencji $(m,p,q,\delta)$ nazywamy geometryczny obiekt podwójny o prawie transformacji

$$T^{r'_1 \ldots r'_m \varrho'_1 \ldots \varrho'_q}{}_{s'_1 \ldots s'_p \sigma'_1 \ldots \sigma'_\delta} =$$

$$= A^{r'_1}_{r_1} \ldots A^{r'_m}_{r_m} B^{\varrho'_1}_{\varrho_1} \ldots B^{\varrho'_q}_{\varrho_q} A^{s_1}_{s'_1} \ldots A^{s_p}_{s'_p} B^{\sigma_1}_{\sigma'_1} \ldots B^{\sigma_\delta}_{\sigma'_\delta} T^{r_1 \ldots r_m \varrho_1 \ldots \varrho_q}{}_{s_1 \ldots s_p \sigma_1 \ldots \sigma_\delta} \tag{5}$$

$$r, s, \varrho, \sigma = 1, \ldots n,$$

gdzie:

$A^{r'}_{r} = \dfrac{\partial \xi^{r'}}{\partial \xi^{r}}$; $\xi^{r'}$ są współrzędnymi punktu $x$ w układzie $\mu' \in \mathcal{U}_x$, $B^{\varrho'}_{\varrho} = \dfrac{\partial \eta^{\varrho'}}{\partial \eta^{\varrho}}$; $\eta^{\varrho'}$ są współrzędnymi punktu $\bar{x}$ w układzie $\bar{\mu}' \in \mathcal{U}_{\bar{x}}$;

Widzimy więc, że zależność (4) jest szczególnym przypadkiem związku (5).

§ 1. Zdefiniujemy teraz przestrzeń translatorową.

Definicja 1.1. Przestrzenią translatorową $T^n$ nazywać będziemy n-wymiarową rozmaitość M, dla której określony jest geometryczny obiekt podwójny $g^i_\alpha(\xi, \eta)$, przy czym spełnione są następujące warunki:

I. $g^i_\alpha$ jest tensorem podwójnym, tzn.

$$g^{i'}_{\alpha'}(\xi', \eta') = A^{i'}_{i} B^{\alpha}_{\alpha'} g^{i}_{\alpha}(\xi, \eta), \qquad A^{i'}_{i} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{i}}, \quad B^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial \eta^{\alpha}}{\partial \eta^{\alpha'}} \tag{1.1}$$

II. Jeśli $\zeta^b$ są współrzędnymi dowolnego punktu $y \in M$, to

$$g_i^a(\zeta,\xi)\, g_\alpha^i(\xi,\eta) = g_\alpha^a(\zeta,\eta), \quad a, i, \alpha = 1,\dots,n \tag{1.2}$$

III. $$\det \| g_\alpha^i \| \neq 0.$$

Z postulatu drugiego i trzeciego wysnuwamy wniosek, że w przypadku gdy punkty x, $\bar{x}$, y są identyczne, to

$$g_\alpha^i(\xi,\xi) = \delta_\alpha^i. \tag{1.3}$$

Translator pozwala na przenoszenie wektorów z jednego punktu rozmaitości do dowolnego innego. Niech mianowicie $V^\alpha$ będą współrzędnymi wektora $V \in T(\bar{x})$, gdzie $T(\bar{x})$ jest przestrzenią styczną w punkcie $\bar{x}$. Wektorowi temu przyporządkowujemy wektor $v(v^i)$ określony następująco

$$v^i = g_\alpha^i(\xi,\eta) V^\alpha \tag{1.4}$$

Współrzędne $v^i$ nie zależą od wyboru układu współrzędnych w punkcie $\bar{x}$, gdyż jeśli $\bar{\mu} \to \bar{\mu}'$ to

$$v^{i(\bar{\mu}')} = g_{\alpha'}^i V^{\alpha'} = B_{\alpha'}^{\alpha} g_\alpha^i B_\beta^{\alpha'} V^\beta = g_\alpha^i \delta_\beta^\alpha V^\beta = g_\alpha^i V^{\alpha(\bar{\mu})} = v^i \tag{1.5}$$

Ponadto $v^i$ transformują się tak jak współrzędne wektora kontrwariantnego określonego w punkcie x, ponieważ

$$v^{i'} = g_\alpha^{i'} V^\alpha = A_i^{i'} g_\alpha^i V^\alpha = A_i^{i'} v^i \tag{1.6}$$

Określone wzorem (1.4) przeniesienie wektorów nazywać będziemy translatorowym.

Powstaje pytanie przy pomocy jakiego tensora przenieść z powrotem wektor $v(v^i)$ określony zależnością (1.4) do punktu $\bar{x}$, tak aby otrzymać wektor $V(V^\alpha)$. Oznaczmy ten tensor podwójny przez $\bar{g}_i^\alpha(\eta,\xi)$, tzn.

$$V^\alpha = \bar{g}_i^\alpha(\eta,\xi)v^i \tag{1.7}$$

Uwzględniając (1.4) mamy:

$$V^\alpha = \bar{g}_i^\alpha(\eta,\xi)g_\beta^i(\xi,\eta)V^\beta \Rightarrow \bar{g}_i^\alpha(\eta,\xi)g_\beta^i(\xi,\eta) = \delta_\beta^\alpha \tag{1.8}$$

co oznacza, że $\bar{g}_i^\alpha(\eta,\xi)$ są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $\| g_\alpha^i(\xi,\eta) \|$. Oznaczać je będziemy przez $g_i^\alpha$.

Przesunięcie translatorowe wektora kowariantnego $u = (u_i(x))$ z punktu $x$ do $\bar{x}$ określamy wzorem

$$U_\alpha = g_\alpha^i(\eta,\xi)u_i \tag{1.9}$$

$U_\alpha$ są współrzędnymi wektora kowariantnego w punkcie $\bar{x}$, ponieważ

$$U_{\alpha'} = g_{\alpha'}^i\ u_i = B_{\alpha'}^\alpha\ g_\alpha^i u_i = B_{\alpha'}^\alpha U_\alpha \tag{1.10}$$

Łatwo również udowodnić, że współrzędne $U_\alpha$ nie zależą od wyboru układu współrzędnych w punkcie $x$ (por. wzór (1.5)). Przesuńmy z powrotem wektor $U(U_\alpha)$ do punktu $x$ przy pomocy na razie nieokreślonego tensora podwójnego $\bar{\bar{g}}_i^\alpha(\xi,\eta)$:

$$u_i = \bar{\bar{g}}_i^\alpha(\xi,\eta)U_\alpha = \bar{\bar{g}}_i^\alpha(\xi,\eta)g_\alpha^k(\eta,\xi)u_k \tag{1.11}$$

Z (1.11) otrzymamy

$$\bar{\bar{g}}_i^\alpha(\xi,\eta)g_\alpha^k(\eta,\xi) = \delta_i^k,$$

czyli $\bar{g}^{\alpha}_{i}(\xi,\eta)$ są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $\| g^{i}_{\alpha}(\xi,\eta) \|$. Tak więc ostatecznie otrzymujemy $\bar{g}^{\alpha}_{i}(\xi,\eta)=g^{\alpha}_{i}(\eta,\xi)$.

§ 2. Omówimy teraz przeniesienie translatorowe tensorów i gęstości tensorowych.

Weźmy dwa wektory: $V(V^{\alpha})$ i $U(U_{\beta})$ określone w punkcie $\bar{x}$.

Utwórzmy tensor

$$W^{\alpha}_{\beta} \overset{df}{=} V^{\alpha} U_{\beta}. \tag{2.1}$$

Tensor (2.1) chcemy przenieść do punktu x. Korzystając z (1.4), (1.11) definiujemy obiekt

$$w^{i}{}_{k} \overset{df}{=} g^{i}_{\alpha} V^{\alpha} g^{\beta}_{k} U_{\beta} = V^{\alpha} U_{\beta} g^{i}_{\alpha} g^{\beta}_{k} = W^{\alpha}_{\beta} g^{i}_{\alpha} g^{\beta}_{k} \tag{2.2}$$

Obiekt $w^{i}{}_{k}$ transformuje się jak tensor w punkcie x, gdyż,

$$w^{i'}{}_{k'} = W^{\alpha}_{\beta} g^{i'}_{\alpha} g^{\beta}_{k'} = A^{i'}_{i} A^{k}_{k'} W^{\alpha}_{\beta} g^{i}_{\alpha} g^{\beta}_{k} = A^{i'}_{i} A^{k}_{k'} w^{i}{}_{k}$$

Ogólnie, dowolny tensor $t^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l}(\bar{x})$ po przeniesieniu translatorowym do punktu x wyrazi się wzorem

$$t^{i_1\ldots i_k}{}_{m_1\ldots m_l} \overset{df}{=} t^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l}\, g^{i_1}_{\alpha_1}\ldots g^{i_k}_{\alpha_k} g^{\beta_1}_{m_1}\ldots g^{\beta_l}_{m_l} \tag{2.3}$$

Jeśli $t(\bar{x})$ oznacza gęstość tensorową o wadze $-\gamma$, to uwzględniając postulat III oraz zależności (1.3) i (2.3) dochodzimy do wniosku, że gęstość ta w punkcie x ma postać

$$t^{i_1\ldots i_k}{}_{m_1\ldots m_l} = f(G)\, t^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l}\, g^{i_1}_{\alpha_1}\ldots g^{i_k}_{\alpha_k} g^{\beta_1}_{m_1}\ldots g^{\beta_l}_{m_l}, \tag{2.4}$$

gdzie:

$$f(G) = |G|^{\gamma} \text{ lub } f(G) = |G|^{\gamma} \operatorname{sgn} G, \quad G = \det \| g^{i}_{\alpha} \| .$$

Sprawdźmy, że wzór (2.4) rzeczywiście przedstawia gęstość tensorową w punkcie x. Rozpatrzmy przypadek, gdy $f(G) = |G|^{\gamma} \operatorname{sgn} G$. Przechodząc w punkcie x do nowego układu współrzędnych $(\mu \to \mu')$, otrzymujemy

$$t^{i'_1 \dots i'_k}{}_{m'_1 \dots m'_l} =$$

$$= |G'|^{\gamma} (\operatorname{sgn} G') t^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} A^{i'_1}_{i_1} g^{i_1}_{\alpha_1} \dots A^{i'_k}_{i_k} g^{i_k}_{\alpha_k} A^{m_1}_{m'_1} g^{\beta_1}_{m_1} \dots A^{m_l}_{m'_l} g^{\beta_l}_{m_l} =$$

$$= |G'|^{\gamma} (\operatorname{sgn} G') \, t^{\alpha_1 \dots \alpha_k}{}_{\beta_1 \dots \beta_l} g^{i_1}_{\alpha_1} \dots g^{\beta_l}_{m_l} A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{m_l}_{m'_l} .$$

Ale

$$|G'| \operatorname{sgn} G' = |\det \| g^{i'}_{\alpha} \||^{\gamma} \operatorname{sgn} (\det \| g^{i'}_{\alpha} \|) =$$

$$= |\det \| A^{i'}_{i} \||^{\gamma} \, |G|^{\gamma} \operatorname{sgn} (\det \| A^{i'}_{i} g^{i}_{\alpha} \|) =$$

$$= |\det \| A^{i'}_{i} \||^{\gamma} |G|^{\gamma} \operatorname{sgn} (\det \| A^{i'}_{i} \|) \operatorname{sgn} G .$$

Ponieważ wyznacznik $\det \| A^{i'}_{i} \|$ jest jakobianem związanym z transformacją układu współrzędnych, tzn. $\det \| A^{i'}_{i} \| = J$, więc

$$|G'|^{\gamma} \operatorname{sgn} G' = |J|^{\gamma} (\operatorname{sgn} J) |G|^{\gamma} \operatorname{sgn} G$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$t^{i'_1 \dots i'_k}{}_{m'_1 \dots m'_l} = |J|^{\gamma} (\operatorname{sgn} J) \, t^{i_1 \dots i_k}{}_{m_1 \dots m_l} A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{i'_k}_{i_k} A^{m_1}_{m'_1} \dots A^{m_l}_{m'_l}$$

co dowodzi słuszności związku (2.4) dla przypadku $f(G) = |G|^{\gamma} \operatorname{sgn} G$. Dla przypadku $f(G) = |G|^{\gamma}$ dowód jest podobny.

§ 3. Obiekty geometryczne, których translatorowe przeniesienie omówiliśmy do tej pory, należą do obiektów liniowych jednorodnych klasy pierwszej. Zajmiemy się obecnie przeniesieniem translatorowym parametrów koneksji afinicznej w przestrzeni translatorowej. Załóżmy, iż w przestrzeni $T^n$ określone jest pole parametrów koneksji afinicznej $\Gamma$. Weźmy dwa dowolne punkty: $x$, $\bar{x}$ tej przestrzeni. Chcemy przenieść translatorowo koneksję $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ z punktu $\bar{x}$ do $x$. Korzystając z zależności (1.3) i prawa transformacji koneksji afinicznej [4] przyjmujemy następujący wzór

$$\tilde{\Gamma}^{k}_{ij} \overset{df}{=} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\bar{x})\, g^{\alpha}_{i}\, g^{\beta}_{j}\, g^{k}_{\gamma} + g^{k}_{\alpha}\, \partial_i g^{\alpha}_{j} \tag{3.1}$$

Zależności (3.1) otrzymaliśmy przez formalne zastąpienie w prawie transformacji parametrów koneksji, pochodnych cząstkowych translatorem. Zagadnienie to zostanie przedstawione również w pracy [6]. Udowodnimy, że wzór (3.1) określa koneksję afiniczną w punkcie $x$:

$$\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} g^{\alpha}_{i'} g^{\beta}_{j'} g^{k'}_{\gamma} + g^{k'}_{\alpha}\, \partial_{i'} g^{\alpha}_{j'} =$$

$$= \Gamma^{\gamma}_{\alpha|\beta} A^{i}_{i'}\, g^{\alpha}_{i}\, A^{j}_{j'} g^{\beta}_{j}\, A^{k'}_{k}\, g^{k}_{\gamma} + A^{k'}_{k}\, g^{k}_{\alpha} \partial_{i'} A^{j}_{j'} g^{\alpha}_{j} =$$

$$= \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha}_{i}\, g^{\beta}_{j}\, g^{k}_{\gamma}\, A^{i}_{i'} A^{j}_{j'} A^{k'}_{k} + A^{k'}_{k}\, g^{k}_{\alpha}\, g^{\alpha}_{j}\, \partial_{i'} A^{j}_{j'} + A^{k'}_{k}\, g^{k}_{\alpha}\, A^{j}_{j'} A^{i}_{i'} \partial_i g^{\alpha}_{j} =$$

$$= (\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha}_{i}\, g^{\beta}_{j}\, g^{k}_{\gamma} + g^{k}_{\alpha} \partial_i g^{\alpha}_{j})\, A^{i}_{i'} A^{j}_{j'} A^{k'}_{k} + A^{k'}_{k}\, \delta^{k}_{j}\, \partial_{i'} A^{j}_{j'} =$$

$$= \tilde{\Gamma}^{k}_{ij} A^{i}_{i'} A^{j}_{j'} A^{k'}_{k} + A^{k'}_{j} A^{j}_{i'j'}, \quad \text{gdzie} \quad A^{j}_{i'j'} \overset{df}{=} \frac{\partial^2 \xi^{j}}{\partial \xi^{j'} \partial \xi^{i'}} = \partial_{i'} A^{j}_{j'},$$

Tak więc zależność (3.1) rzeczywiście określa przesuniętą translatorowo z punktu $\bar{x}$ do $x$ koneksję afiniczną. Zwróćmy uwagę na fakt, iż zdefiniowane wzorem (3.1) przeniesienie translatorowe nie zachowuje na ogół symetrii, ponieważ pochodna cząstkowa $\partial_i g^{\alpha}_{j}$ nie musi być symetryczna względem wskaźników $i$, $j$.

## UWAGI KOŃCOWE

Jak wiadomo, w algebrze tensorowej nie mamy możliwości dodawania, np. wektorów kontrawariantnych określonych w różnych punktach tej samej rozmaitości. Trudność tę lokalnie usuwa równoległe przenoszenie w sensie Levi-Civity. Przy przenoszeniu translatorowym nie musimy zakładać lokalności, poza tym wydaje się ono prostsze i bardziej operatywne. Weźmy mianowicie dwa dowolne wektory: jeden $U = (U^i(x))$, a drugi $V = (V^\alpha(\bar{x}))$, przy czym na ogół $\bar{x} \neq x$. Punkty $x$, $\bar{x}$ są dowolnymi punktami przestrzeni $T^n$. Wektory te można dodać do siebie w trojaki sposób (por. [1] ):

1) przenosimy translatorowo wektor $U = (U^i(x))$ do punktu $\bar{x}$ i następnie dodajemy do wektora $V$ w punkcie $\bar{x}$, tzn.

$$t^\alpha = g^\alpha_i(\bar{x}, x)U^i(x) + V^\alpha(\bar{x}),$$

2) przenosimy wektor $V = (V^\alpha(\bar{x}))$ do punktu $x$ i dodajemy do wektora $U$ w punkcie $x$, czyli

$$w^i = U^i(x) + g^i_\alpha(x,\bar{x})\, V^\alpha(\bar{x}),$$

3) zarówno wektor $U$, jak i wektor $V$ przenosimy do dowolnego innego punktu $y$, a następnie wektory te dodajemy do siebie, tzn.

$$\omega^a = g^a_i(y,x)U^i(x) + g^a_\alpha(y,\bar{x})V^\alpha(\bar{x}), a,i,\alpha=1,\ldots,n$$

Te trzy sposoby prowadzą do tych samych wyników. Będziemy dowodzić równoważności tych związków, w następującej kolejności

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$$

a) $1. \Rightarrow 2.$

Prawdziwość tej implikacji wynika z rozważań przeprowadzonych w § 1.

b) 2. $\Rightarrow$ 3.

Przesuwając translatorowo wektor o współrzędnych $w^i$ z punktu $x$ do $y$ i uwzględniając wzór (1.2) otrzymujemy

$$g^a_i(y,x)w^i = g^a_i(y,x)U^i(x) + g^a_i(y,x)g^i_\alpha(x,\bar{x})V^\alpha(\bar{x}) =$$

$$= g^a_i(y,x)U^i(x) + g^a_\alpha(y,\bar{x})V^\alpha(\bar{x}) = \omega^a$$

c) 3. $\Rightarrow$ 1.

Dowód jak w punkcie b) przy czym należy dodatkowo skorzystać z zależności

$$g^\alpha_a(\bar{x},y)g^a_\beta(y,\bar{x}) = \delta^\alpha_\beta \quad (\text{por. § 1) c.n.u.}$$

Z przeprowadzonych w pracy wywodów wynika twierdzenie, iż translator określa izomorfizm przestrzeni stycznych do rozmaitości. Mianowicie oznaczając przez $T(x)$, $T(\bar{x})$ przestrzenie styczne do rozmaitości w punktach odpowiednio $x$, $\bar{x}$ widać, że odwzorowanie $h: T(\bar{x}) \to T(x)$ dane zależnością (por. wzór (1.3))

$$v = h(V) = \| g^i_\alpha(x,\bar{x}) \| V, \quad V \in T(\bar{x})$$

jest izomorfizmem (korzystamy tu również z postulatu III-go).

Wpłynęło do Redakcji w styczniu 1971 r.

LITERATURA

[1] ERICKSEN J.L. - Double tensor fields, Encyclopedia of Physics, ed. by S. Flügge, Vol. III/1, Springer Verlag 1960.

[2] JAUNZEMIS W. - On tensor methods in classical mechanics, Tensor 20 (1969), 20-24.

[3] KUCHARZEWSKI M. - Elementy teorii obiektów geometrycznych,Katowice,1969 (skrypt).

[4] RASZEWSKI P.K. - Geometria Riemanna i analiza tensorowa, Warszawa, 1958.

[5] TELEGA J.J. - Pewne typy liniowych jednorodnych obiektów iloczynowych (podwójnych, rozdwojonych) klasy pierwszej.Z.N.Pol. Śl.,Matematyka-Fizyka (w druku).

[6] TELEGA J.J. - O pochodnej kowariantnej tensorów iloczynowych, podwójnych i rozdwojonych (w przygotowaniu).

ТРАНСЛАТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Р е з ю м е

Введение на многообразию двойного тензора-транслатора - позволяет определить класс пространств, в которых можно слагать векторы взятые из касательных пространств к многообразию в разных точках. Транслятор дает возможность переносить тензоры и коэффициенты связности с одной точки многообразия в любую точку. Пространства этого типа называем транслаторными.

SHIFTER SPACES

S u m m a r y

Introduction on the manifold of a double tensor - shifter - makes it possible to define the class of spaces in which vectors taken from spaces tangent to manifold in different points may be added. The shifter permits the shifting of tensor densities and affine connections from one point of the manifold to another.Spaces of this type are called shifter spaces.