ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: MATEMATYKA - FIZYKA z. 16 Nr kol. 308

JÓZEF JOACHIM TELEGA

PEWNE TYPY LINIOWYCH, JEDNORODNYCH OBIEKTÓW ILOCZYNOWYCH (PODWÓJNYCH, ROZDWOJONYCH) KLASY PIERWSZEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono możliwości budowania bardziej złożonych obiektów iloczynowych (podwójnych, rozdwojonych) klasy pierwszej. Obiekty te stanowią uogólnienie zwykle rozpatrywanych obiektów liniowych jednorodnych określonych w punkcie.

Podano również definicję obiektów podwójnych i omówiono związki pomiędzy obiektami tego rodzaju a obiektami iloczynowymi.

WSTĘP

Na ogół rozpatrywane obiekty geometryczne są funkcją punktu. We wstępie podamy definicję obiektów będących funkcją dwu punktów tej samej rozmaitości. Obiekty takie nazywać będziemy podwójnymi. Oczywiście można rozpatrywać obiekty zależne od i-punktów tej samej rozmaitości (obiekty wielopunktowe). Ograniczymy się tutaj tylko do obiektów podwójnych (tzn. dwupunktowych), gdyż określenie obiektów wielopunktowych jest prostym uogólnieniem definicji obiektów podwójnych.

Tensory wielopunktowe wprowadził A.D. Michal [7], (por. S. Gołąb [2]). Ściśle rzecz biorąc w pracy [7] rozpatrzono tensory zależne od i-punktów n-wymiarowej rozmaitości analitycznej. Tensorami podwójnymi zajmował się również J.L. Ericksen [1].

Do dalszych rozważań przyjmiemy definicję rozmaitości podaną w pracach [5] i [6].

Niech x_o i $\bar{x}_o$ będą dowolnymi punktami tej samej rozmaitości n-wymiarowej X^n. Weźmy w tych punktach struktury lokalne $\mathfrak{M}_{x_o}$, $\overline{\mathfrak{M}}_{\bar{x}_o}$. Oznaczmy przez μ, $\bar{\mu}$ lokalne układy współrzędnych takie, że $\mu \in \mathfrak{M}_{x_o}$, a $\bar{\mu} \in \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{x}_o}$.

Definicja. Mówimy, że dla punktów $x_o \in X^n$, $\bar{x}_o \in X^n$ określony jest obiekt podwójny względem struktur lokalnych $\mathfrak{M}x_o$, $\overline{\mathfrak{M}}\bar{x}_o$, jeżeli dana jest funkcja Φ, która w sposób jedoznaczny przyporządkowuje każdej parze układów $\mu \in \mathfrak{M}_{x_o}$, $\bar{\mu} \in \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{x}_o}$ ciąg M liczb ω^P, P=1,...,M. Funkcję taką możemy zapisać w postaci

$$\omega = \Phi(\mu, \bar{\mu}), \qquad \text{gdzie } \omega = (\omega^P),\ P=1,\ldots,M.$$

Jeszcze ogólniejszy jest obiekt podwójny zaczepiony, który jest określony przez funkcję

$$\omega = \Phi(x_o, \bar{x}_o, \mu, \bar{\mu}).$$

Z definicji tej widać, iż obiekty podwójne można traktować jako obiekty iloczynowe określone na iloczynie kartezjańskim rozmaitości przez siebie, w sensie definicji podanej przez M. Kucharzewskiego [3], [5]. Tak więc podane w pracy [5] (por. również [3]) prawa transformacji iloczynowego obiektu geometrycznego, zaczepionego, specjalnego i czysto różniczkowego określają równocześnie prawa transformacji odpowiednio podwójnego obiektu geometrycznego, zaczepionego, specjalnego i czysto różniczkowego. Prawa transformacji tych obiektów mają odpowiednio postać

$$\omega' = F(\omega, \varphi, \Phi) \tag{1}$$

$$\omega' = F(\omega, \overset{i}{\underset{o}{\xi}}, \eta^{\alpha}_{o}, \varphi, \Phi), \tag{2}$$

$$\omega' = F(\omega, \xi^{i}_{o}, \eta^{\alpha}_{o}, \xi^{i'}_{o}, \eta^{\alpha'}_{o}, L, \bar{L}) \tag{3}$$

$$\omega = F(\omega, L, \bar{L}) \tag{4}$$

gdzie: ξ_o^i, $i = 1,\dots,n$ oznaczają współrzędne punktu x_o w układzie $\mu \in \mathfrak{M}_{x_o}$, $\xi_o^{i'}$ współrzędne tegoż punktu w układzie $\mu' \in \mathfrak{M}_{x_o}$; η_o^α, $\alpha = 1,\dots,n$ są współrzędnymi punktu $\bar{x}_o$ w układzie $\bar{\mu} \in \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{x}_o}$, zaś $\eta_o^{\alpha'}$ współrzędnymi tego samego punktu (tzn. $\bar{x}_o$) w układzie $\bar{\mu}' \in \overline{\mathfrak{M}}_{\bar{x}_o}$, φ jest transformacją prowadzącą od układu współrzędnych μ do układu μ', natomiast $\bar{\varphi}$ prowadzi od układu $\bar{\mu}$ do $\bar{\mu}'$. Symbol L oznacza ciąg liczb postaci

$$L = (A_i^{i'}, \dots\dots, A_{i_1\dots i_t}^{i'}),$$

przy czym

$$A_{i_1\dots i_k}^{i'} = \frac{\partial^k \xi^{i'}}{\partial\xi^{i_k}\dots\partial\xi^{i_1}}(\xi_o^i), \quad J = |A_i^{i'}| \neq 0, \quad 1 \leqslant t \leqslant r,$$

przez r oznaczyliśmy klasę rozważanej rozmaitości.
Ciąg liczb L jest przyporządkowany w jednoznaczny sposób transformacji (por. [5])

$$\varphi: \ \xi^{i'} = \varphi^{i'}(\xi^i), \quad i = 1,\dots,n$$

Analogicznie, transformacji

$$\bar{\varphi}: \ \eta^{\alpha'} = \bar{\varphi}^{\alpha'}(\eta^\alpha), \quad \alpha = 1,\dots,n$$

przyporządkowany jest w sposób jednoznaczny ciąg liczb

$$\bar{L} = (B_\alpha^{\alpha'}, \dots, B_{\alpha_1\dots\alpha_6}^{\alpha'}),$$

gdzie:

$$B^{\alpha'}_{\alpha_1 \dots \alpha_\varrho} = \frac{\partial \eta^{\alpha'}}{\partial \eta^{\alpha_\varrho} \dots \partial \eta^{\alpha_1}} (\eta^{\alpha}_{o}), \quad \bar{J} = \left| B^{\alpha'}_{\alpha} \right| \neq 0, \quad 1 \leq \sigma \leq r.$$

Fakt, że obiekty podwójne mają takie same prawa transformacji jak obiekty iloczynowe jest bardzo istotny, gdyż oznacza on, iż każda własność obiektu iloczynowego jest równocześnie własnością obiektu podwójnego i vice versa. Wynika to z analogiczności praw transformacji tych obiektów. Tak więc podaną w pracy [3] konstrukcję liniowych jednorodnych obiektów iloczynowych klasy pierwszej można "przenieść" na obiekty podwójne.

§ 1. Celem tego paragrafu jest omówienie konstrukcji podanej w [3].
Weźmy pod uwagę dwie rozmaitości: n-wymiarową X^n oraz $\bar{n}$-wymiarową $X^{\bar{n}}$. Przez liniowy, jednorodny obiekt iloczynowy klasy pierwszej rozumiemy obiekt iloczynowy o następującym prawie transformacji [3]:

$$\omega^{P'} = F^{P'}_{Q}(A,B)\omega^{Q}, \qquad P,\ Q = 1,\dots,M. \tag{1.1}$$

Obiekt ten jest określony w punkcie $\bar{\bar{x}}_o = (x_o, \bar{x}_o) \in X^n \times X^{\bar{n}}$, $A = \| A^{i'}_{i} \|$, $i = 1,\dots,n$ jest macierzą transformacji związaną ze zmianą układu współrzędnych w punkcie $x_o \in X^n$, zaś $B = \|B^{\alpha'}_{\alpha}\| \alpha = 1,\dots,\bar{n}$ w punkcie $\bar{x}_o \in X^{\bar{n}}$. Obiekt (1.1) jest iloczynowym obiektem specjalnym, czysto różniczkowym (por. wzór (4)). Wiadomo, że całą teorię obiektów iloczynowych można zastosować do obiektów rozdwojonych (M. Kucharzewski [3]) jak i obiektów podwójnych (por. Wstęp). Dlatego też wszystkie rozważania przedstawione w tej pracy przenoszą się na tego rodzaju obiekty (tzn. podwójne lub rozdwojone).

Korzystając z przedstawionej przez M. Kucharzewskiego [3] konstrukcji macierzy $F(A,B) = \| F^{P'}_{Q}(A,B)\|$ podamy w dalszych paragrafach sposób konstruowania bardziej złożonych obiektów iloczynowych (podwójnych, rozdwojonych) klasy pierwszej oraz zaproponujemy nazwy dla tych obiektów.

Sposób konstruowania samej macierzy F jest bardzo prosty. Ponieważ funkcja F musi spełniać równanie fundamentalne i warunek identyczności (por. M. Kucharzewski, M. Kuczma [6]), więc otrzymujemy w rezultacie następujące związki

$$F(A,B)F(A_1,B_1) = F(A.A_1,B.B_1), \tag{1.2}$$

$$F(E,\bar{E}) = \tilde{e}. \tag{1.3}$$

W równaniach tych A, A_1, B, B_1 oznaczają dowolne macierze nieosobliwe odpowiednio stopnia n lub $\bar{n}$ zaś E, $\bar{E}$, $\tilde{e}$ są macierzami jednostkowymi odpowiednio stopnia n, $\bar{n}$ oraz M.

Rozpatrzmy dwa multiplikatywne równania funkcyjne.

pierwsze

$$H(A)\,H(A_1) = H(A.A_1), \tag{1.4}$$

spełniające warunek

$$H(E) = e; \tag{1.5}$$

i drugie

$$\bar{H}(B)\bar{H}(B_1) = \bar{H}(B.B_1) \tag{1.6}$$

spełniające warunek

$$\bar{H}(\bar{E}) = \bar{e}, \tag{1.7}$$

gdzie H, $\bar{H}$ są kwadratowymi macierzami odpowiednio stopnia m, $\bar{m}$, zaś E, $\bar{\bar{E}}$, e, $\bar{e}$ oznaczają macierze jednostkowe stopnia odpowiednio n, $\bar{n}$, m, $\bar{m}$.

Ponadto zachodzi związek: $M = m \cdot \bar{m}$.

Niech $H(x)$, $\bar{H}(\bar{x})$ będą dowolnymi rozwiązaniami równań (1.4), (1.6) spełniającymi odpowiednio warunki (1.5), (1.7). Oznaczmy przez $H^r_s(x), r,s=1,\dots,m$ elementy macierzy H, a przez $\bar{H}^\varrho_\sigma(\bar{x})\varrho,\sigma=1,\dots,\bar{m}$ elementy macierzy $\bar{H}$.

Przyporządkujmy każdej parze liczb (r,ϱ) liczbę P z ciągu $1, \dots\dots, M$. Oznaczmy przez $F(x,\bar{x})$ macierz, której elementy $F^{P'}_Q$ są zdefiniowane następująco:

$$F^{P'}_Q(x,\bar{x}) = H^r_s(x)\bar{H}^{\varrho'}_\sigma(\bar{x}), \qquad P,Q = 1,\dots, M. \tag{1.8}$$

gdzie P jest liczbą przyporządkowaną parze (r,ϱ), a Q parze (s,σ). F jest więc macierzą stopnia $M = m \cdot \bar{m}$ spełniającą związki (1.2) i (1.3). Macierz F nazywa się iloczynem Kroneckera macierzy H i $\bar{H}$ [9]. Jej elementy $F^{P'}_Q(x,\bar{x})$ są określone wzorem (1.8)

§ 2. Macierz $F(x,\bar{x})$ określa interesujący nas obiekt liniowy jednorodny o prawie transformacji (1.1)

Ponieważ liczba P została przyporządkowana parze (r,ϱ), więc $\omega^P = \omega^{r\varrho}$. Prawo transformacji obiektu $\omega^{r\varrho}$ ma postać

$$\omega^{r'\varrho'} = H^{r'}_s(A)\,\bar{H}^{\varrho''}_\sigma(B)\,\omega^{s\sigma} \tag{2.1}$$

W prosty sposób można również określić obiekty $\omega_p = \omega_{r\varrho}$, $\omega(\omega^r_\varrho)$ o prawach transformacji odpowiednio

$$\omega_{r'\varrho''} = H^s_{r'}(A)\bar{H}^\sigma_\varrho(B)\,\omega_{s\sigma} \tag{2.2}$$

$$\omega^{r'}_{\varrho'} = H^{r'}_s(A)\bar{H}^\sigma_{\varrho'}(B)\omega^s_\sigma, \tag{2.3}$$

przy czym $H^{s}_{r'}$ są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $\|H^{r'}_{s}(A)\|$, a $\bar{H}^{\sigma}_{\varrho'}$ oznaczają elementy macierzy odwrotnej do macierzy $\|\bar{H}^{\varrho'}_{\sigma}(B)\|$(por. M. Kucharzewski [4]).

Różnica między obiektami $\omega^{r\varrho}, \omega_{r\varrho}, \bar{\omega}^{r}_{\varrho}$ tkwi w prawie transformacji, natomiast ich konstrukcja jest analogiczna (sprowadza się do znajomości rozwiązań równań (1.4) i (1.6).

Obiekt o prawie transformacji (2.1) M. Kucharzewski [3] nazywa uogólnionym, czyli $(H, \bar{H})$ tensorem iloczynowym (oczywiście może to również być obiekt podwójny lub rozdwojony). Wydaje się, iż nazwą tą można również objąć obiekty o prawach transformacji (2.2) i (2.3), gdyż celem ich wyznaczenia należy znać rozwiązania równań (1.4) i (1,6) spełniających odpowiednio warunki (1,5) i (1.7). Przez analogię do tensorów określonych w punkcie, $(H,\bar{H})$ tensor iloczynowy o prawie transformacji: (2.1) nazwiemy kontrwariantnym o walencji (1,0;1,0), (2.2) nazwiemy kontrwariantnym o walencji (0,1; 0,1), (2.3) nazwiemy mieszanym o walencji (1,0; 0,1).

Nasuwa się pytanie, jak określić obiekty bardziej złożone:

$$\omega^{P_1P_2}, \quad \omega_{Q_1Q_2}, \quad \omega^{P}_{Q}\ ?$$

Wydaje się naturalnym przyjęcie następujących definicji:

$$\omega^{P_1'P_2'} \overset{df}{=} \underset{1}{F}{}^{P_1'}_{P_1}(A,B)\,\omega^{P_1}\ \underset{2}{F}{}^{P_2'}_{P_2}(A,B)\,\omega^{P_2}, \tag{2.4}$$

$$\omega_{Q_1'Q_2'} \overset{df}{=} \underset{1}{F}{}^{Q_1}_{Q_1'}(A,B)\,\omega_{Q_1}\ \underset{2}{F}{}^{Q_2}_{Q_2'}(A,B)\,\omega_{Q_2}, \tag{2.5}$$

$$\omega^{P'}_{Q'} = \underset{1}{F}{}^{P'}_{P}(A,B)\,\omega^{P}\ \underset{2}{F}{}^{Q}_{Q'}(A,B)\,\omega_{Q}\ ^{1)} \tag{2.6}$$

---

1) Właściwie zapisy wzorów (2.4) - (2.6) są nieścisłe, gdyż np. w prawej stronie wzoru (2.4) zamiast ω^{P_i} powinno być $\underset{i}{\omega}{}^{P_i}$, i=1,2.

Korzystając z poprzednich rozważań zapiszemy

$$\omega^{p_1p_2} = \omega^{r_1\varrho_1 r_2\varrho_2} \overset{df}{=} \omega^{r_1\varrho_1}\omega^{r_2\varrho_2},$$

czyli

$$\omega^{r_1'\varrho_1' r_2'\varrho_2'} = \underset{1}{H}{}^{r_1'}_{r_1}(A)\underset{1}{\bar{H}}{}^{\varrho_1'}_{\varrho_1}(B)\omega^{r_1\varrho_1}\underset{2}{H}{}^{r_2'}_{r_2}(A)\underset{2}{\bar{H}}{}^{\varrho_2'}_{\varrho_2}(B)\omega^{r_2\varrho_2} =$$

$$= \underset{1}{H}{}^{r_1'}_{r_1}(A)\underset{1}{\bar{H}}{}^{\varrho_1'}_{\varrho_1}(B)\underset{2}{H}{}^{r_2'}_{r_2}(A)\bar{H}^{\varrho_2'}_{\varrho_2}(B)\omega^{r_1\varrho_1 r_2\varrho_2} \tag{2.7}$$

Macierz $\underset{1}{H}$ jest na ogół różna od macierzy $\underset{2}{H}$, co wynika z rozwiązań równania (1.4), (podobnie macierz $\bar{\bar{H}}$ może być różna od macierzy $\underset{2}{\bar{H}}$). Ponieważ dla obiektu $\omega^{r_1\varrho_1 r_2\varrho_2 1}$ wskaźniki z ciągów m i $\bar{m}$ "przeplatają się", więc przyjmiemy, że

$$\omega^{r_1r_2\varrho_1\varrho_2} \overset{df}{=} \omega^{r_1\varrho_1 r_2\varrho_2} \tag{2.8}$$

Podobnie z (2.5) i (2.6) otrzymujemy związki

$$\omega_{s_1's_2'\sigma_1'\sigma_2'} \overset{df}{=} \omega_{s_1'\sigma_1' s_2'\sigma_2'} = \underset{1}{H}{}^{s_1}_{s_1'}(A)\underset{1}{\bar{H}}{}^{\sigma_1}_{\sigma_1'}(B)\underset{2}{H}{}^{s_2}_{s_2'}(A)\bar{H}^{\sigma_2}_{\sigma_2'}(B)\omega_{s_1\sigma_1 s_2\sigma_2} \tag{2.9}$$

$$\omega^{r'\varrho'}{}_{s'\sigma'} = \underset{1}{H}{}^{r'}_{r}(A)\underset{1}{\bar{H}}{}^{\varrho'}_{\varrho}(B)\underset{2}{H}{}^{s}_{s'}(A)\bar{H}^{\sigma}_{\sigma'}(B)\omega^{r\varrho}{}_{s\sigma} \tag{2.10}$$

Obiekty (2.7), (2.9) i (2.10) nazwiemy $(\underset{i}{H}, \underset{j}{\bar{\bar{H}}})$ i, j = 1,2 tensorami iloczynowymi, gdzie $(\underset{i}{H}, \underset{j}{\bar{\bar{H}}}) = (\underset{1}{H}, \underset{2}{H};\ \underset{1}{\bar{\bar{H}}}, \underset{2}{\bar{\bar{H}}})$, o walencjach odpowiednio (2,0; 2,0), (0,2; 0,2), (1,1; 1,1). Tensor iloczynowy (2.7) jest tensorem kontrawariantnym (2.9) kowariąntnym, natomiast(2.10) mieszanym.

Ogólnie przyjmujemy, że:

$$\omega^{P'_1\ldots P'_k}{}_{Q'_1\ldots Q'_l} \overset{df}{=} \underset{1}{F}{}^{P'_1}{}_{P_1}(A,B)\,\omega^{P_1}\ldots\underset{k}{F}{}^{P'_k}{}_{P_k}(A,B)\,\omega^{P_k}\ \underset{k+1}{F}{}^{Q_1}{}_{Q'_1}(A,B)\,\omega_{Q_1}\ldots$$

$$\ldots\ldots\ \underset{k+l}{F}{}^{Q_l}{}_{Q'_l}(A,B)\,\omega_{Q}$$

czyli

$$\omega^{r'_1\varrho'_1\ldots r'_k\varrho'_k}{}_{s'_1\sigma'_1\ldots s'_l\sigma'_l} = \underset{1}{H}{}^{r'_1}{}_{r_1}(A)\,\underset{1}{\bar{\bar{H}}}{}^{\varrho'_1}{}_{\varrho_1}(B)\,\omega^{r_1\varrho_1}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ \underset{k+l}{H}{}^{s}{}_{s'_l}(A)\,\underset{k+l}{\bar{\bar{H}}}{}^{\sigma_l}{}_{\sigma'_l}(B)\,\omega_{s_l\sigma_l} = \underset{1}{H}{}^{r'_1}{}_{r_1}(A)\,\underset{1}{\bar{\bar{H}}}{}^{\varrho'_1}{}_{\varrho_1}(B)\ldots$$

$$\ldots\ \underset{k+l}{H}{}^{s_l}{}_{s'_l}(A)\,\underset{k+l}{\bar{\bar{H}}}{}^{\sigma_l}{}_{\sigma'_l}(B)\,\omega^{r_1\varrho_1\ldots r_k\varrho_k}{}_{s_1\sigma_1\ldots\sigma_l\sigma_l} \qquad (2.11)$$

Oczywiście obiekt taki jest $(H, \bar{H})$ mieszanym tensorem iloczynowym (podwójnym, rozdwojonym), przy czym $i, j = 1, \ldots, k+l$, o walencji $(k,l;\ k,l)$. Ponadto zakładamy, że

$$\omega^{r_1 \ldots r_k \varrho_1 \ldots \varrho_k}{}_{s_1 \ldots s_l \sigma_1 \ldots \sigma_l} \stackrel{df}{=} \omega^{r_1 \varrho_1 \ldots r_k \varrho_k}{}_{s_1 \sigma_1 \ldots s_l \sigma_l} \tag{2.12}$$

Połóżmy we wzorach (2.1), (2.2), (2.3), $H(A) = A$, $\bar{H}(B) = B$. Wówczas zachodzą związki

$$\omega^{r'\varrho'} = A^{r'}_{s} B^{\varrho'}_{\sigma} \omega^{s\sigma}, \tag{2.13}$$

$$\omega_{r'\varrho'} = A^{s}_{r'} B^{\sigma}_{\varrho'} \omega_{s\sigma} \tag{2.14}$$

$$\omega^{r'}_{\varrho'} = A^{r'}_{s} B^{\sigma}_{\varrho'} \omega^{s}_{\sigma} \tag{2.15}$$

Obiekty te nazwiemy następująco:

(2.13) iloczynowym tensorem kontrawariantnym o walencji $(1,0;1,0)$
(2.14) iloczynowym tensorem kowariantnym o walencji $(0,1;\ 0,1)$
(2.15) iloczynowym tensorem mieszanym o walencji $(1,0;\ 0,1)$.

Ogólnie: kładąc w (2.11) $H(A) = A$, $\bar{H}(B) = B$ i uwzględniając (2.12) otrzymujemy

$$\omega^{r'_1 \ldots r'_k \varrho'_1 \ldots \varrho'_k}{}_{s'_1 \ldots s'_l \sigma'_1 \ldots \sigma'_l} = A^{r'_1}_{r_1} \ldots A^{r'_k}_{r_k} B^{\varrho'_1}_{\varrho_1} \ldots B^{\varrho'_k}_{\varrho_k} A^{s_1}_{s'_1} \ldots$$

$$A^{s_l}_{s'_l} B^{\sigma_1}_{\sigma'_1} \ldots B^{\sigma_l}_{\sigma'_l} \omega^{r_1 \ldots r_k \varrho_1 \ldots \varrho_k}{}_{s_1 \ldots s_l \sigma_1 \ldots \sigma_l} \tag{2.16}$$

Obiekt taki nazwiemy mieszanym tensorem iloczynowym (podwójnym, rozdwojonym) o walencji $(k,l;\ k,l)$.

Jeśli $\bar{H}(B) = \bar{\bar{K}}(\bar{J})$, $\bar{J} = |B_{\alpha}^{\varrho}| \neq 0$ (jest tak zawsze, gdy $m < n$), to prawo transformacji (2.1) ma postać

$$\omega^{r'\varrho'} = H_{r}^{r'}(A)\bar{\bar{K}}_{\varrho}^{\varrho'}(\bar{J})\omega^{r\varrho} \tag{2.17}$$

Obiekt (2.17) nazwiemy H-kontrawariantnym tensorem iloczynowym o walencji (1,0; 1,0) (por. [3]). Podobnie można postąpić z zależnościami (2.2) i (2.3). Ogólnie, jeśli położymy (2.11) $\bar{H}_j(B) = \bar{\bar{K}}_j(\bar{J})$, $j = 1, \dots k+1$, to obiekt ω nazwiemy H_i, $i = 1, \dots k+1$ mieszanym tensorem iloczynowym o walencji $(k,l;\ {}^{i}k,l)$.

§ 3. S. Gołąb (por. [2]) zdefiniował J-obiekty (obiekty typu J) jako obiekty o prawie transformacji zależnym tylko od jakobianu transformacji, prowadzącej od jednego do drugiego układu współrzędnych, czyli

$$\omega' = F(\omega, J).$$

Rozszerzmy tę definicję na obiekty iloczynowe.

Definicja 3.1. Iloczynowy (podwójny, rozdwojony) obiekt geometryczny nazywamy obiektem typu $(J, \bar{J})$, jeżeli jego prawo transformacji ma postać

$$\omega' = F(\omega, J, \bar{J}), \quad J = \det A, \quad \bar{J} = \det B \tag{3.1}$$

Jeśli w (2.1) przyjmiemy, że $H(A) = f(J)$, $J = \det A$, $\bar{H}(B) = \bar{\bar{f}}(\bar{J})$, $\bar{J} = \det B$, przy czym $f(J) = |J|^{a}$ albo $f(J) = |J|^{a} \operatorname{sgn} J$; $\bar{\bar{f}}(\bar{J}) = |\bar{J}|^{\alpha}$ lub $\bar{\bar{f}}(\bar{J}) = |\bar{J}|^{\alpha} \operatorname{sgn} \bar{J}$, to obiekt o prawie transformacji

$$\omega' = f(J)\,\bar{\bar{f}}(\bar{J})\,\omega, \tag{3.2}$$

będzie gęstością iloczynową (podwójną, rozdwojoną). Oczywiście jest to obiekt typu $(J, \bar{J})$.

W szczególności obiekty o prawach transformacji

$$\omega' = |J|^{a}\,|\bar{J}|^{\alpha}\omega, \tag{3.3}$$

$$\omega' = |J|^{a}|\bar{J}|^{\alpha}(\operatorname{sgn}\bar{J})\omega, \tag{3.4}$$

$$\omega' = |J|^{a}(\operatorname{sgn} J)|\bar{J}|^{\alpha}\omega, \tag{3.5}$$

$$\omega' = |J|^{a}\,(\operatorname{sgn} J)|\bar{J}|^{\alpha}(\operatorname{sgn}\bar{J})\omega, \tag{3.6}$$

nazwiemy odpowiednio iloczynową gęstością Weyla - czyli $(W,\bar{W})$ gęstością - o wadze $(-a, -\alpha)$, iloczynową gęstością mieszaną - $(W, \bar{G})$ gęstością - o wadze $(-a, -\alpha)$, iloczynową gęstością mieszaną-$(G,\bar{W})$ gęstością - o wadze $(-a,-\alpha)$ oraz iloczynową gęstością zwykłą -$(G,\bar{G})$ gęstością - o wadze $(-a, -\alpha)$.

§ 4. Niech macierz $\bar{K}$ w (2.17) będzie określona następująco:

$$\bar{k}(\bar{J}) = \bar{f}(\bar{J}), \quad \text{gdzie } \bar{f}(\bar{J}) = |\bar{J}|^{\alpha} \text{ lub } \bar{f}(\bar{J}) = |\bar{J}|^{\alpha}\operatorname{sgn}\bar{J}.$$

Wówczas obiekt o prawie transformacji

$$\omega^{r'} = \bar{f}(\bar{J})\, H^{r'}_{s}(A)\,\omega^{s}, \tag{4.1}$$

nazwiemy H - tensorową gęstością iloczynową [3].

Ogólnie, kładąc w (2.11) $\bar{H}(B) = \bar{f}(\bar{J})$, $j = 1,\dots,k+l$, gdzie $\bar{f}_j(\bar{J}) = |\bar{J}|^{\alpha_j}$ lub $\bar{f}_j(\bar{J}) = |\bar{J}|^{\alpha_j}\operatorname{sgn}\bar{J}$, otrzymujemy obiekt o prawie transformacji

$$\omega^{r'_1\dots r'_k}{}_{s'_1\dots s'_l} = \bar{f}_1(\bar{J})\dots\bar{f}_{k+l}(\bar{J})H^{r'_1}_{r_1}(A)\dots H^{s_1}_{s'_1}(A)\,\omega^{r_1\dots r_k}{}_{s_1\dots s_l} \tag{4.2}$$

który nazwiemy $\underset{i}{H}$ - tensorową gęstością iloczynową (podwójną, rozdwojoną). Powróćmy raz jeszcze do obiektu (2.11). Niech $b, b < k+l$ spośród macierzy $\underset{i}{H}$ określa związek $\underset{i}{H}(A) = \underset{i}{\tilde{f}}(A) = \underset{i}{f}(J)$, przy czym $\underset{i}{f}(A) = |J|^{a_i}$ lub $\underset{i}{f}(A) = |J|^{a_i}\operatorname{sgn}J$ zaś β, $\beta < k+l$, spośród macierzy $\bar{H}$ wyraża równanie $\underset{j}{\bar{H}}(B) = \underset{j}{\bar{f}}(\bar{J})$.

Wtedy obiekt o prawie transformacji

$$\omega^{r'_1\ldots r'_m\varrho'_1\ldots\varrho'_q}{}_{s'_1\ldots s'_p\sigma'_1\ldots\sigma'_\delta} = \underset{1}{f}(J)\ldots\underset{b}{f}(J)\underset{1}{\bar{f}}(\bar{J})\ldots\underset{\beta}{\bar{f}}(\bar{J})\underset{1}{H}{}^{r'_1}_{r_1}(A)$$

$$\ldots\underset{\delta}{\bar{H}}{}^{\sigma_\delta}_{\sigma'_\delta}(B)\,\omega^{r_1\ldots r_m\varrho_1\ldots\varrho_q}{}_{s_1\ldots s_p\sigma_1\ldots\sigma_\delta}, \tag{4.3}$$

$$m + p = k+l-b, \qquad q+\delta = k+l-\beta$$

nazwiemy $(\underset{i}{H}, \underset{j}{\bar{H}})$ tensorową gęstością iloczynową o walencji $(m, p; q, \delta)$ i wadze $(-a_1 - \ldots - a_b, -\alpha_1 - \ldots - \alpha_\beta)$. Przypadkami szczególnymi wzoru (4.3) są związki

$$\omega^{r'_1\ldots r'_m\varrho'_1\ldots\varrho'_q}{}_{s'_1\ldots s'_p\sigma'_1\ldots\sigma'_\delta} = \underset{1}{f}(J)\ldots\underset{b}{f}(J)\underset{1}{\bar{f}}(\bar{J})\ldots\underset{\beta}{\bar{f}}(\bar{J})\,A^{r'_1}_{r_1}\ldots$$

$$\ldots A^{r'_m}_{r_m} B^{\varrho'_1}_{\varrho_1}\ldots B^{\varrho'_q}_{\varrho_q} A^{s_1}_{s'_1}\ldots A^{s_p}_{s'_p} B^{\sigma_1}_{\sigma'_1}\ldots B^{\sigma_\delta}_{\sigma'_\delta}\,\omega^{r_1\ldots r_m\varrho_1\ldots\varrho_q}{}_{s_1\ldots s_p\sigma_1\ldots\sigma_\delta}, \tag{4.4}$$

$$\omega^{r'_1\ldots r'_m\varrho'_1\ldots\varrho'_q}{}_{s'_1\ldots s'_p\sigma'_1\ldots\sigma'_\delta} = A^{r'_1}_{r_1}\ldots B^{\sigma_\delta}_{\sigma'_\delta}\,\omega^{r_1\ldots r_m\varrho_1\ldots\varrho_q}{}_{s_1\ldots s_p\sigma_1\ldots\sigma_\delta} \tag{4.5}$$

Obiekt o prawie transformacji (4.4) nazywać będziemy iloczynową gęstością tensorową o walencji (m,p; q,δ) i wadze ($-a_1 - \ldots - a_b$, $-\alpha_1 - \ldots - \alpha_\beta$), zaś obiekt o prawie transformacji (4.5) tensorem iloczynowym o walencji (m,p; q,δ).
Tensory o prawie transformacji (4.5) wprowadził A.D. Michal [7], przy czym rozpatrywał on tensory zależne od i-punktów rozmaitości analitycznej. Dla i = 2 otrzymujemy właśnie tensor podwójny o prawie transformacji (4.5). Obiekty o prawie transformacji (4.4) rozpatrują S. Gołąb [2] i J.L. Erickson [1].

Uwagi końcowe

Przedstawiony w tej pracy podział liniowych jednorodnych obiektów iloczynowych (podwójnych, rozdwojonych) klasy pierwszej nie jest oczywiście wyczerpujący. Celem naszym było wykorzystanie znajomości konstrukcji macierzy F(A,B) do budowania bardziej złożonych obiektów iloczynowych (podwójnych, rozdwojonych). Z praw transformacji przedstawionych w pracy obiektów widać, iż stanowią one uogólnienie, zwykle rozpatrywanych obiektów liniowych, jednorodnych klasy pierwszej określonych w punkcie. Ma to ważne znaczenie praktyczne. I tak obiekty iloczynowe i podwójne znalazły zastosowanie we współczesnej mechanice ośrodków ciągłych, zaś obiekty rozdwojone w geometrii przestrzeni zanurzonych [2], [8].

Wpłynęło do Redakcji w styczniu 1971 r.

LITERATURA

[1] ERICKSEN J.L. - Double tensor fields, Encyclopedia of Physics, ed by S. Flugge, Vol. III/1, Springer 1960.

[2] GOŁĄB S. - Rachunek tensorowy, Warszawa 1966.

[3] KUCHARZEWSKI M. - Objekte des Kartesischen Produktes zweier Mannigfaltigkeiten, Ann. Pol.Math. 20 (1968), 215-221.

[4] KUCHARZEWSKI M. - Einige Bemerkungen über die linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse, Ann. Pol.Math.19(1967), 1-12.

[5] KUCHARZEWSKI M. - Elementy teorii obiektów geometrycznych, Katowice 1969 (skrypt).

[6] KUCHARZEWSKI M., KUCZMA M. - Basic concepts of the theory of geometric objects. Rozprawy Matematyczne, Warszawa 1964.

[7] MICHAL A.D. - Functionals of r-dimensional manifolds admitting continuous groups of point transformations, Trans. Ann. Math. Soc. 29(1927), 612-646.

[8] SCHOUTEN J.A.- Ricci - calculus, Springer 1954.

[9] ГАНТМАХЕР Ф.Р. - Теория матриц, Москва 1967.

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ЛИНЕЙНЫХ, ОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОГО-ОБРАЗИЙ (ДВОЙНЫХ, РАЗДВОЕННЫХ) ПЕРВОГО КЛАССА

Р е з ю м е

Работа содержит возможности конструирования более сложных объектов произведения многообразий двойных, раздвоенных первого класса. Объекты эти представляют обобщение обычно рассматриваемых линейных, однородных объектов определённых в точке.

SOME TYPES OF LINEAR HOMOGENOUS PRODUCT
(DOUBLE, CONNECTING) OBJECTS OF THE FIRST CLASS

S u m m a r y

The paper shows the possibilities of building more complex product (double, connecting) objects of the first class. They form the generalization of usually considered linear homogenous objects defined in a point.

Also the definition of double objects is given, and the relations between objects of this kind and product objects are discussed.